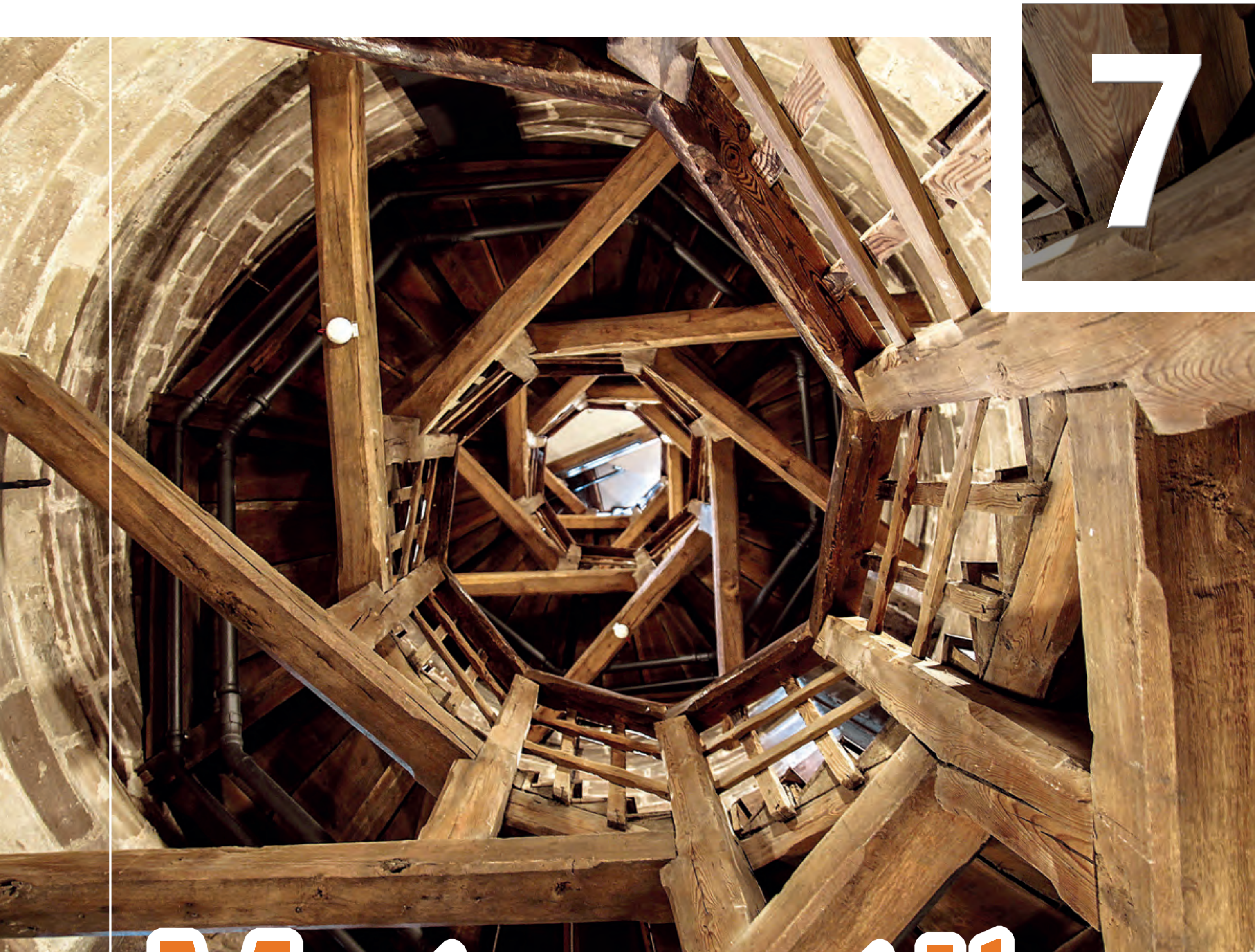
ÚJGENERÁCIÓS tankönyv

OFI



7

Matematika

esemény kör hatvány

statisztika tükrözés térfogat

leszámlálás grafikon

felszín súlyvonal függvény

MATEMATIKA 7.

Eszterházy Károly Egyetem
Oktatáskutató és Fejlesztő Intézet

A kiadvány 2017. 04. 20-tól tankönyvvé nyilvánítási engedélyt kapott a TKV/2277–15/2017. számú határozattal.

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI-rendelet: 2. sz. melléklet: Kerettanterv
az általános iskolák 5–8. évfolyama számára 2.2.03. előírásainak.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők: Kónya István, Zarubay Attila

Tananyagfejlesztő: Gedeon Veronika, Paróczay Eszter, Számadó László, Tamás Beáta, dr. Wintsche Gergely
Alkotószerkesztő: dr. Wintsche Gergely
Vezetőszerkesztő: Tóthné Szalontay Anna
Tudományos szakmai szakértő: Rózsahegyiné dr. Vásárhelyi Éva
Pedagógiai szakértő: Illés János
Olvasószerkesztő: Darcsiné Molnár Edina
Fedélterv: Orosz Adél
Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél
Illusztráció: Létai Márton
Szakábra: Szalóki Dezső

Fotók: Flickr, MorgueFile, Pixabay, WikimediaCommons, Wikipedia, Dominic Alves, Kováts Borbála, Louis K., Márton Tünde, Wintsche Gergely, Wolfgang Lonien

A tankönyv szerkesztői ezúton is köszönetet mondanak mindazoknak a tudós és tanár szerzőknek, akik az elmúlt évtizedek során olyan módszertani kultúrát teremtettek, amely a kísérleti tankönyvek készítőinek is ösztönzést és példát adott. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják.

ISBN 978-963-436-065-0

Eszterházy Károly Egyetem • 3300 Eger, Eszterházy tér 1.
Tel.: (+36-1) 235-7200 • Fax: (+36-1) 460-1822 • Vevőszolgálat: vevoszolgalat@ofi.hu

Kiadásért felel: dr. Liptai Kálmán rektor
Raktári szám: FI-503010701/1
Műszakiiroda-vezető: Horváth Zoltán Ákos
Műszaki szerkesztő: Orosz Adél • Grafikai szerkesztő: Kováts Borbála, Márton Tünde, Farkas Éva
Nyomdai előkészítés: Gados László • Terjedelem: 28,84 (A/5) ív, tömeg: 564,93 gramm • 1. kiadás, 2017

Az újgenerációs tankönyvek az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001 számú, „A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése” című projektje keretében készült. A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

Nyomta és kötötte az Alföldi Nyomda Zrt., Debrecen
Felelős vezető: György Géza vezérigazgató
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

magyar nyomdatermék
NYOMDA- ÉS PAPÍRIPARI SZÖVETSÉG

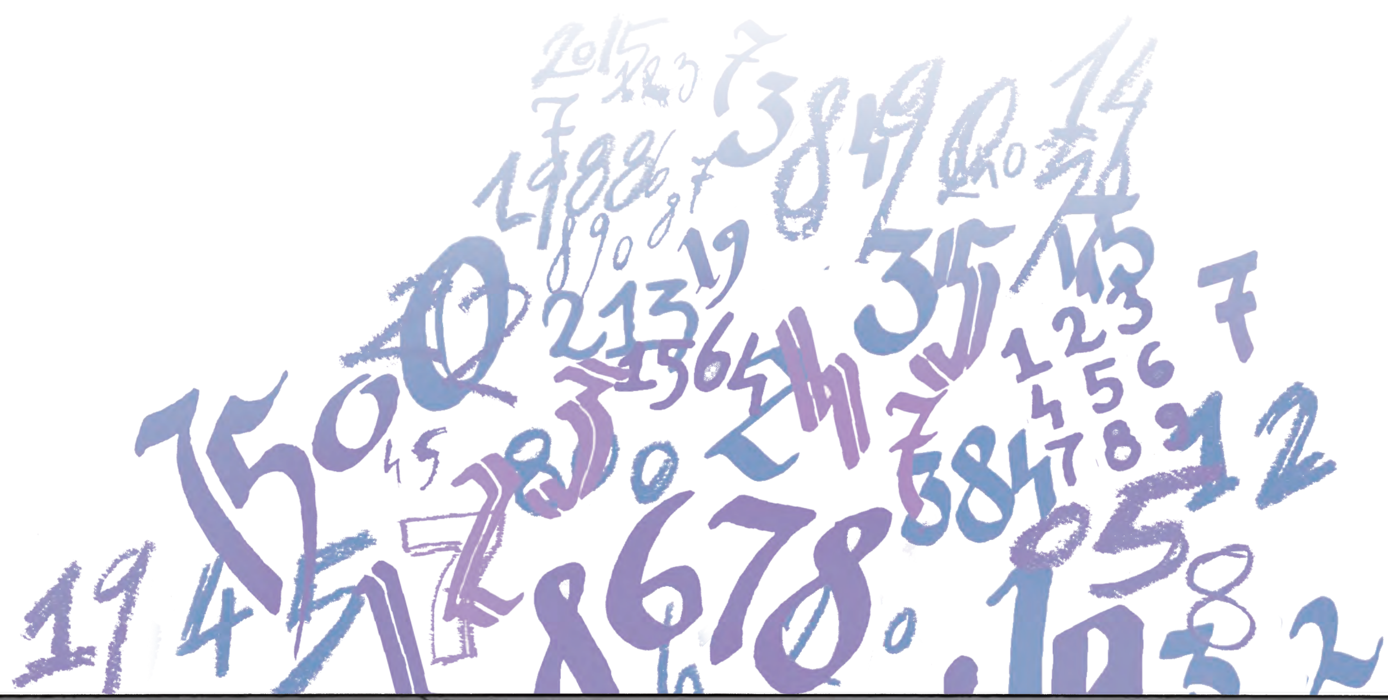
SZÉCHENYI 2020

Magyarország Kormánya

Európai Unió
Európai Szociális Alap

BEFEKTETÉS A JÖVŐBE

MATEMATIKA 7.



TARTALOM

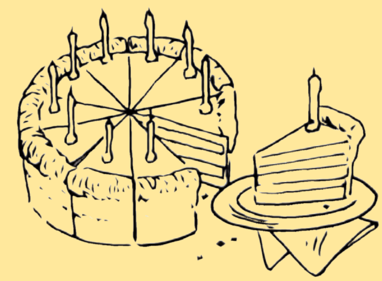
Bevezetés 6

I. Gondolkodjunk! 7

1. Számold össze! 8
2. Rendezd sorba! 11
3. Kiválasztások 13
4. Igazold! Cáfold! 15
5. Matematikai játékok 18
6. Összefoglalás 20

II. Racionális számok és hatványozás . . 21

1. Az egész számok tulajdonságainak áttekintése 22
2. A törtek 27
3. Törtek összeadása, kivonása 30
4. Törtek szorzása, osztása 34
5. Törtek tizedes tört alakja 38
6. Műveletek véges tizedes törtekkel . . . 41
7. Szöveges feladatok 45
8. Zárójelfelbontások, összetett műveletek 47
9. Nagy számok és a hatványalak 49
10. A hatványozás azonosságai I. 53
11. A hatványozás azonosságai II. 55
12. Normálalak 57
13. Összefoglalás 59



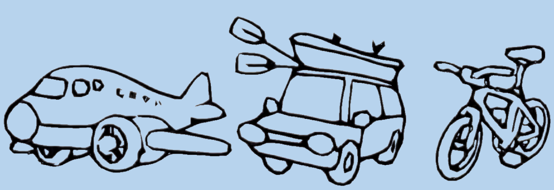
III. Geometriai transzformációk 63

1. Fontos geometriai fogalmak 64
2. Síkidomok, testek 67
3. Geometriai transzformációk 70
4. Középpontos tükrözés 73
5. A középpontos tükrözés alkalmazása 76
6. Szögpárok 78
7. Középpontos és tengelyes szimmetria 80
8. Paralelogramma és deltoid 83
9. A paralelogramma területe 85
10. A háromszög területe 88
11. A trapéz területe 90
12. A deltoid területe 92
13. Középpontosan szimmetrikus alakzatok 94
14. Sokszögek 97
15. Szerkesztések 100
16. Összefoglalás 103

TARTALOM

IV. Oszthatóság 107

1. Ismétlés 108
2. Prímtényezős felbontás 110
3. Osztó, többszörös 112
4. Legnagyobb közös osztó 115
5. Legkisebb közös többszörös 117
6. Egy kis logika 119
7. Oszthatósági szabályok 122
8. Készítsünk magunknak oszthatósági szabályokat! (Kiegészítő tananyag) . . 124
9. Matematikai játékok 127
10. Összefoglalás 128

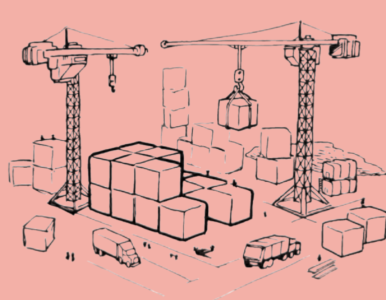


V. Egyenletek, egyenlőtlenségek 131

1. Arányosságról még egyszer 132
2. Mit tudunk a százalékszámításról? . . 134
3. Összetett százalékszámítási feladatok 138
4. Szöveges feladatok 140
5. Számok és betűk használata I. 142
6. Számok és betűk használata II. 144
7. Egyenletmegoldási módszerek: próbálgatás és lebontogatás 147
8. A mérlegelv 150
9. Azonosság, ellentmondás, egyenletek megoldása 154
10. Egyenlőtlenségek megoldása mérlegelvvel 157
11. Szöveges feladatok megoldása egyenlettel 160
12. Összefoglalás 161

VI. Geometria 167

1. Egybevágó háromszögek 168
2. Összefüggések a háromszög oldalai, szögei között 171
3. A háromszög és a köré írt köre 173
4. A háromszög és a beírt köre 175
5. Magasságvonalak a háromszögben . . 177
6. Súlyvonalak és középvonalak a háromszögben 179
7. Sokszögek szögei és átlói 181
8. A kör kerülete 184
9. A kör területe 186
10. A hasáb felszíne és térfogata 188
11. A henger felszíne és térfogata 191
12. Összefoglalás 194



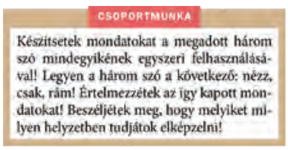
VII. Függvények, statisztika 199

1. Két halmaz közötti hozzárendelések . . 200
2. Függvények megadási módjai 203
3. Olvassunk a grafikonról! 206
4. Ábrázoljunk képlet alapján! 209
5. Keressünk szabályokat! 213
6. Átlag, módusz, medián 215
7. Gyakoriság, relatív gyakoriság 217
8. Valószínűség 219
9. Összefoglalás 223

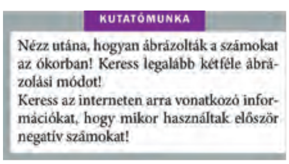
Üdvözlünk a 7. osztályban!

Az új matematikakönyvedet tartod a kezedben.
Ha ennek a sorozatnak az 5.-es vagy 6.-os könyvéből tanultál korábban, akkor találsz néhány ismerős dolgot, de lesznek újdonságok is.

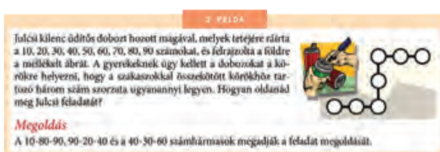
A fejezet elején olvasható történet egy a témához kapcsolódó híres matematikusról mesél.



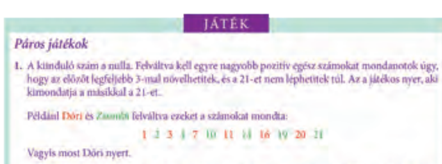
Az új ismereteket játékkal, csoportokban végezhető feladatokkal vagy érdekes példákkal vezetjük be.



A tankönyv otthoni kutatómunkának ajánlott feladatokat is tartalmaz.

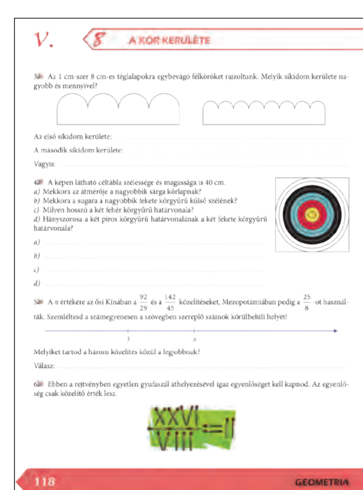


A feladatokat nehézségük szerint három csoportba soroltuk:
1 könnyű 2 közepes 3 kicsit nehéz



Az eltérő feladattípusokat jól megkülönböztethető keretbe foglaltuk, és felirattal láttuk el.

A könyvben érdekes kiegészítéseket is találsz.



A fontos tudnivalókat piros színnel emeltük ki, hogy könnyebben megtaláld azokat.

A könyvhöz tartozó munkafüzet példái és néhány könnyed, játékos feladat is segít a tanulásban.

JÓ TANULÁST ÉS KELLEMES UTAZÁST!

I. GONDOLKODJUNK!

Esztert és Kristófot első hallásra nem hozta lázba a kötelező tanulmányi kirándulás híre.
– Láttad, hogy Judit néni még azt is előírta, hogy előadást tartsunk a többieknek? – fordult Eszter Kristófhoz.
Kristóf csak bólogatott, de nem válaszolt, mert teljesen elmerült annak az új téridőtrafónak a tanulmányozásában, amit az iskola egy nemzetközi pályázaton nyert. A szerkezet lehetővé tette, hogy az osztály néhány tagja a kirándulás alkalmával szabadon mozogjon a térben és az időben.
A kezdeti unott várakozást és az első téridőutazást követően Kristóf úgy fordult Eszterhez, mintha csak az egy nappal korábban feltett kérdésére válaszolna, bár ez alkalommal elégedett mosoly terült szét az arcán.
– Azt hittem, halálosan unalmas lesz, de ez elképesztő volt! Láttuk Arisztotelészt meg Alexandroszt fiatalon. Ott sétáltak előttünk, akár meg is tudtuk volna érinteni őket! És az a fordítókütyü, amit kaptunk, Attila eddigi legjobban sikerült szerkezete!
– Érdekes volt hallani, amikor Arisztotelész a logikáról, a logikai következtetésekről mesélt, aztán meg arról magyarázott, hogyan emlékezünk azokra a dolgokra, amiket korábban érzékeltünk, és hogy tulajdonképpen ebből következik az, hogy tudunk valamit – mondta Eszter elgondolkodva.
– Kár, hogy utána a katonák elvitték a kis Nagy Sándort vívóedzésre. Rémes, hogy még be sem jelölhetem facebookon! – nevetett Kristófra, aki lelkesen böngészte a következő utazás kiírását a neten.

I. 1. SZÁMOLD ÖSSZE!

CSOPORTMUNKA

Keressetek válaszokat két-háromfős csoportokban a következő kérdésekre!

I. Hányféleképpen lehet a 10-et három pozitív egész szám összegére bontani, ha a számok sorrendje
a) nem számít;
b) számít?

II. Hányféle olyan háromszög van, amelyeket tíz egyforma pálcikából (például gyufaszálból) tudtok kirakni?

A csoportmunka során láthattátok, hogy vannak olyan kérdések, amelyekben csak összeszámlálás a feladat. Az ilyen típusú kérdésekkel is a matematika foglalkozik. Amíg az esetek száma nem túl nagy, addig figyelmes felsorolással is megválaszolhatod a kérdéseket, de nagy esetszám esetén nem könnyű a feladat.

1. PÉLDA

Az ábrán látható bűvös négyzet minden sorában és minden oszlopában ugyanannyi a három szám összege. Töltsük ki a táblázatot! Előfordulhat-e, hogy nyolc tanuló mindegyike másféle sorrendben írja be a hiányzó számokat?

43	21	
	36	33
	23	

Megoldás

Számoljuk össze a lehetséges sorrendeket! Írjunk betűket a hiányzó számok helyére!

43	21	*a*
b	36	33
c	23	*d*

A középső oszlopban a számok összege 80, vagyis minden sorban és minden oszlopban ugyanennyi lesz az összeg. Az *a* és a *b* értékét azonnal meg tudjuk mondani. Mivel a beírás sorrendjét szeretnénk összeszámolni, ezért ezt a két esetet kell végiggondolnunk:

I. eset: az *a* beírásával kezdünk.
Ezután a *d* és a *b* is beírható lesz. E kettő közül bármelyikkel is folytatjuk, utána már a *c* értéke is megadható lesz.
Mindezek alapján a következő sorrendek lehetségesek:

a, b, c, d; *a, b, d, c;* *a, d, b, c;* *a, d, c, b.*

II. eset: a *b* beírásával kezdünk.
Ezután már az *a* és a *c* is beírható lesz. E kettő közül bármelyikkel is folytatjuk, utána már a *d* értéke is kiszámolható lesz.
Vagyis most ezek a sorrendek lehetségesek:

b, a, c, d; *b, a, d, c;* *b, c, a, d;* *b, c, d, a.*

43	21	**16**
11	36	33
26	23	**31**

A két eset vizsgálata során nyolc különböző sorrendet kaptunk. A bűvös négyzet kitöltésekor ezek bármelyike követhető, vagyis előfordulhat, hogy nyolc tanuló mindegyike másféle sorrendben írja be a hiányzó számokat.

Érdekesség

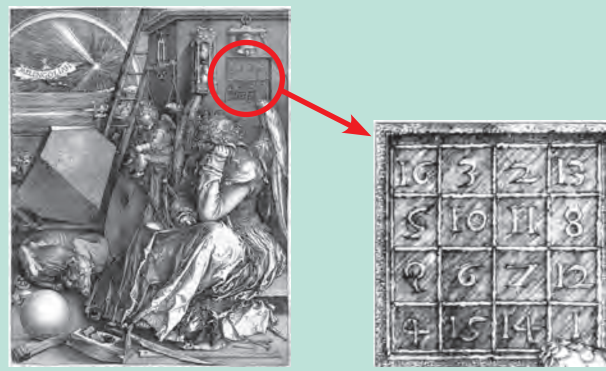
A bűvös négyzetek kitöltése a fenti példánál szigorúbb szabályok szerint is történhet. Megkövetelhető, hogy a sorok és oszlopok mellett a két átlóban szereplő számok összege is egyenlő legyen a „bűvös” számmal. Ráadásul az is megszabható, hogy az egész számokat 1-től kezdődően írjuk be a táblázatba.

Ezeket a szabályokat figyelembe véve egy háromszor hármas és egy négyszer négyes bűvös négyzetet mutatunk. Ez utóbbi megtalálható Albrecht Dürer *Melankólia* című metszetén is.

A világhálón további érdekességeket találhatsz a bűvös négyzetekkel kapcsolatban.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

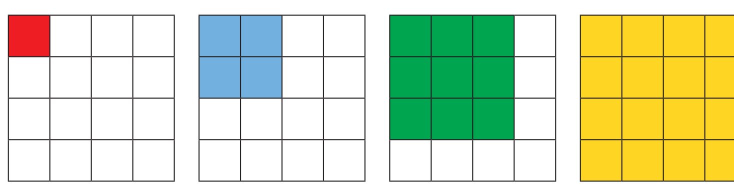
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1



2. PÉLDA

Öt vízszintes és öt függőleges egyenes egy négyszer négyes négyzetrácsot alkot. Hány négyzetet határoz meg ez a tíz egyenes?

Megoldás



Ezek az egyenesek négy különböző nagyságú négyzetet határoznak meg. A bal felső sarokba rajzolt legkisebb piros négyzetet minden sorban négy helyre tehetjük le és négy sor közül választhatunk. Ha az összes lehetséges elhelyezést figyelembe vesszük, akkor 16 esetet kapunk. Hasonló módon gondolkodva kapjuk, hogy a többi méretű négyzetből 9, 4, illetve 1 darab lesz. Ebből következik, hogy a 10 egyenes összesen 16 + 9 + 4 + 1 = 30 négyzetet határoz meg.

FELADATOK

1. Válaszolj a kérdésekre!

a) Hány darab kétjegyű páros szám van?

b) Hány darab háromjegyű páratlan szám van?

2. Nekeresdiában csak öt betű van: két magánhangzó és három mássalhangzó. Minden szó hárombetűs, és pontosan egy magánhangzót tartalmaz. Hány szó lehet összesen Nekeresdiában?

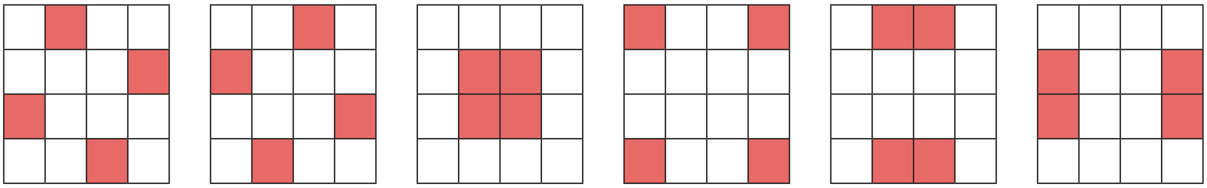
3. Egy társasjátékban annyit léphetsz előre a bábuddal, amennyit a dobókockával dobsz. A startmező sorszáma 0.

a) Hányas sorszámú mezőkön állhat a bábud, ha már háromszor dobtál?
b) Hányas sorszámú mezőkön állhatott közben a bábud, ha a harmadik dobás után a 17-es mezőre került?
c) Hányas sorszámú mezőkön állhatott közben a bábud, ha a harmadik dobás után a 9-es mezőre került?

4. Növekedő számsort kell készítened négy pozitív egész számból. A számsorban a 10 legyen a legnagyobb szám, és az 5-nek is szerepelnie kell benne. Az öttel osztható számok elé mindig pontosan egy darab nem öttel osztható számot kell írnod. Hányféle számsort tudsz készíteni?

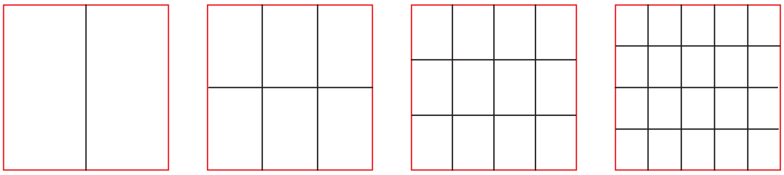
5. Válaszolj a kérdésekre!
a) Hány egyenes jelöli ki a sakktábla négyzetrácsát?
b) Hány darab négyzetet határoznak meg a sakktáblát kijelölő egyenesek?

6. Figyeld meg az ábrán Dürer *Melankólia* című metszetét, majd válaszolj az alábbi kérdésekre!
a) Mennyi a bűvös száma a metszeten látható négyszer négyes bűvös négyzetnek?
b) Mennyi a számok összege a besatírozott mezőkben?



7. Liza szobájából, a szemközti háromszintes ház minden szintjén négy ablak látható. Este megfigyelte, hogy ezek közül négy mögött nem ég a villany. A sötét ablakok sem sarkukkal, sem oldalukkal nem érintkeznek. Hányféleképpen helyezkedhet el ez a négy ablak? Rajzolj a füzetedbe!

8. Az ábrán egy olyan, négyzet alakú ablakokból álló sorozat első négy elemét látjuk, amelyekre rácsot terveztek. Az első ablakot a rács két, a második ablakot hat egyforma részre osztja, és így tovább.



a) Hány darab függőleges szakaszból állna a rács a hetedik ablakon?
b) Hány darab vízszintes szakaszból állna a rács a nyolcadik ablakon?
c) Hány részre osztaná a rács a tizedik ablakot?
d) Hány cm^2 lenne egy kis téglalap területe az ötödik ablakon, ha az eredeti ablak 1,44 m^2 területű?
e) Hányadik ablakot osztaná a rács 9900 részre?

2. RENDEZD SORBA!

CSOPORTMUNKA

Készítsetek mondatokat a megadott három szó mindegyikének egyszeri felhasználásával! Legyen a három szó a következő: nézz, csak, rám! Értelmezzétek az így kapott mondatokat! Beszéljétek meg, hogy melyiket milyen helyzetben tudjátok elképzelni!

Ebben a leckében olyan kérdésekre keressük a választ, amelyekben a sorba rendezések számát kell megadnunk. Például hányféle háromsávos zászló képzelhető el három tetszőleges szín mindegyikének felhasználásával?

A rajz mutatja, hogy hatféle zászlót tudtunk készíteni.

1. PÉLDA

Öt jó barát minden nap egyszerre érkezik a tanterem bejáratához. Az első iskolai napon elhatározták, hogy mindennap másféle sorrendben lépnek be a terembe. Vajon megtehetik ezt a téli szünet megkezdéséig? Hányadik tanítási napon fog megtörténni, hogy kénytelenek olyan sorrendben belépni a terembe, amilyen korábban már előfordult?

Megoldás

Ha csak hárman lennének, akkor a bevezető kérdés alapján azonnal tudnánk, hogy hatféle sorrend fordulhat elő.

Ha négyen lennének, akkor bármelyikük beléphetne elsőnek, de a maradék három gyerek utána hatféleképpen mehetne be a terembe. Ez összesen $4 \cdot 6$, azaz 24 sorrend lenne.

Mivel öten vannak, és bármelyikük beléphet elsőnek, ezért az elsőnek belépőt még négy tanuló fogja követni. Már tudjuk, hogy ők négyen 24 különböző sorrendben léphetnek be a terembe, ezért a sorrendek száma $5 \cdot 24$, azaz 120. A téli szünet kezdése évenként változó, de december 20-a környékén szokott lenni. Egy hónapban kb. 20–22 tanítási nap van, és időközben egy őszi szünet is volt. A téli szünet megkezdéséig – durva számításaink szerint – a 80. tanítási napig sem jutunk el. Így eddig – vagyis a téli szünet megkezdéséig – biztosan megtehetik, hogy minden nap másféle sorrendben lépnek be a tanterembe. Mivel 120 különböző sorrendet kaptunk, így a 121. tanítási napon fog előfordulni, hogy kénytelenek olyan sorrendben belépni a terembe, amilyen korábban már előfordult.

2. PÉLDA

Különböző színű téglákból egy kis piramist építettünk. A téglák sorrendjét csak soronként szabad megváltoztatni.

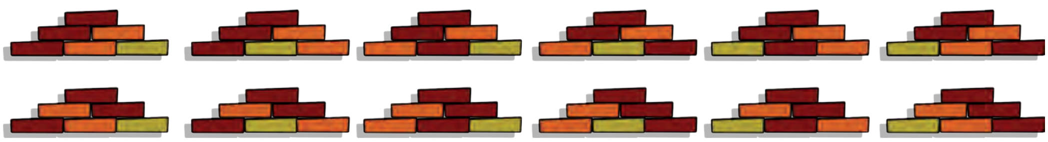
Hányféle piramis építhető összesen?

Megoldás

A felső tégla csakis piros lehet. A pirosat és a barnát kétféleképpen tehetjük alá.

Az alsó sorban látható három téglát hatféleképpen tudjuk sorba rendezni. Ezt a hat sorrendet mindkét megkezdett változat alá elhelyezhetjük.

I. 2. RENDEZD SORBA!



Vagyis az összes eset száma $1 \cdot 2 \cdot 6$, azaz 12-féle piramis építhető.

3. PÉLDA

A 100 méteres síkfutás döntőjében nyolc versenyző állt rajthoz. Hányféleképpen lehet elképzelni az érmek kiosztását?

Megoldás

A rendelkezésünkre álló információk alapján minden versenyzőt egyformán esélyesnek kell gondolnunk, ezért az első helyre nyolcan futhatnak be. Ha rögzítjük az egyik versenyzőt győztesként, akkor a második helyre hét jelöltünk lehet. Ez összesen $8 \cdot 7$, azaz 56 sorrendet jelent. Ha rögzítjük az első és a második helyezettet is, akkor a harmadik helyre hat jelöltünk marad. Ez összesen $56 \cdot 6$, azaz 336 sorrendet jelent.
Tehát az érmek kiosztását 336-féleképpen lehet elképzelni.

FELADATOK

1. Készíts háromjegyű számokat a képen látható számkártyák mindegyikének felhasználásával! Sorold fel az összes esetet! Hány esetben kaptál négyzetszámot? (Négyzetszámot kapsz, ha egy egész számot megszorzol önmagával.)

2. Hányféle sorrendben rakhatod egymás mellé a következő szavak betűit? A megoldások között értelmes szavak is lesznek. Írd le ezeket!
a) RÉT; *b)* ADNI; *c)* TAPOS.

3. Lázár Ervin *A Négyszögletű Kerek Erdő* című mesekönyvében olvashatsz arról, hogy az erdő lakói költői versenyt rendeztek. Szerették volna eldönteni, hogy ki a legnagyobb költő közöttük. Nagyon sok vers született.
Bruckner Szigfrid ezt írta:

Ej, mi a kő! tyúkanyó, kend
a szobában lakik itt bent?

Miután a többiek elmagyarázták neki, hogy ez nem az ő verse, a következő változattal állt elő:

Ej, kend, tyúkanyó, mi a kő,
itt bent lakik a szobában?

Hányféle változatot írhatott volna ilyen módon Bruckner Szigfrid, ha csak soronként keverte össze a szavakat, és a *kő* és a *szobában* szavak előtt az *a* névelőt mindig megtartotta?

4. A 246 813 579 egy olyan kilencjegyű szám, amelyikben az összes pozitív számjegy szerepel. Hány ilyen kilencjegyű szám készíthető, ha először a páros, aztán a páratlan számjegyeket kell felhasználnod?

5. Az iskolai verseny döntőjébe a tíz legjobb sakkozó került. Hányféleképpen alakulhat az arany-, ezüst-, bronzérem kiosztása?

6. Hány különböző ötjegyű számot tudsz előállítani a 0, 1, 2, 3, 4 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával?

3. KIVÁLASZTÁSOK

Egy gyümölcskosárban alma, körte, szilva, barack és szőlő található, mindegyikből egy-egy darab. Hányféleképpen választható ki közülük kettő?
Ilyen és ehhez hasonló kérdésekkel fogunk foglalkozni ebben a leckében.
Most nem fontos a sorrend, csak a kiválasztás. Ha valaki almát és barackot választott, az ugyanaz, mintha barackot és almát választott volna.
A gyümölcsök kis száma miatt könnyen végiggondolhatók az esetek.

Az alma mellé bármelyik másik gyümölcsöt választhatjuk. Ez négy eset.
A körte mellé már csak a következő gyümölcsöket választhatjuk, hiszen az alma–körte párt már felsoroltuk: szilva, barack, szőlő. Ez három eset.
A szilva mellé már csak a következő gyümölcsöket választhatjuk: barack, szőlő. Ez két eset.
Végezetül a barack mellé már csak a szőlőt választhatjuk. Ez még egy eset.

Vagyis tízféle kiválasztás lehetséges.

1. PÉLDA

A 32 fős osztályban minden héten két hetest választanak. A neveket egyforma cédulákra írják, és bedobják egy dobozba. Ezután kivesznek két cédulát, így kapják a két hetes nevét. Hányféle kimenetele lehet összesen ennek a sorsolásnak?

Megoldás

Ha megkülönböztetnénk a sorrendet is, akkor elsőre 32 név közül sorsolhatnak ki valakit, a második helyre pedig a maradék 31 név bármelyike kerülhetne. Ez összesen $32 \cdot 31$, azaz 992 lehetőség. Ebben az esetben azonban azt is beszámítottuk az összeszámlálásba, ha Gazsit választják először, aztán Matyit, és azt is, ha Matyit választják elsőnek, aztán Gazsit, azaz minden lehetőséget kétszer számoltunk. Ezért a 992-t meg kell feleznünk, hogy megkapjuk a helyes megoldást.

Tehát a sorsolásnak $992 : 2 = 496$ kimenetele lehet.

2. PÉLDA

Hány olyan hétjegyű szám van, amelynek számjegyei növekvő sorrendben követik egymást?

Megoldás

Ezen feltételek mellett csak a kilenc pozitív számjegyre gondolhatunk:

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ha ezek közül kihúzunk kettőt, akkor máris megmarad egy a feltételeknek eleget tevő szám.

Vagyis annyi hétjegyű szám készíthető, ahányféleképpen a fent látható kilenc számjegyből kihúzhatunk kettőt:

~~12~~3456789, ~~1~~2~~3~~456789, ~~1~~23~~4~~56789, ~~1~~234~~5~~6789, ~~1~~2345~~6~~789, ~~1~~23456~~7~~89, ~~1~~234567~~8~~9, ~~1~~2345678~~9~~,
1~~23~~456789, 1~~2~~3~~4~~56789, 1~~2~~34~~5~~6789, 1~~2~~345~~6~~789, 1~~2~~3456~~7~~89, 1~~2~~34567~~8~~9, 1~~2~~345678~~9~~,
12~~34~~56789, 12~~3~~4~~5~~6789, 12~~3~~45~~6~~789, 12~~3~~456~~7~~89, 12~~3~~4567~~8~~9, 12~~3~~45678~~9~~,
123~~45~~6789, 123~~4~~5~~6~~789, 123~~4~~56~~7~~89, 123~~4~~567~~8~~9, 123~~4~~5678~~9~~,
1234~~56~~789, 1234~~5~~6~~7~~89, 1234~~5~~67~~8~~9, 1234~~5~~678~~9~~,
12345~~67~~89, 12345~~6~~7~~8~~9, 12345~~6~~78~~9~~,
123456~~78~~9, 123456~~7~~8~~9~~,
1234567~~89~~.

A darabszámok soronként: 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 36. Vagyis 36 ilyen hétjegyű szám van.

Megjegyzés
Természetesen gondolkodhatunk a következő módon is:
A kilenc számjegyből tetszőleges kettőt kihúzhatunk. Elsőre kilenc, másodikra nyolc számjegy lehet a kihúzott. Ez összesen 72 lehetőség, de ekkor minden kihúzásra kétszer gondoltunk. Ezért kell a 72-nek a felét vennünk.
A megoldásban látott módszert azért mutattuk, mert így az is megfigyelhető, hogy hogyan lehet hiánytalanul felsorolni az összes lehetőséget.

FELADATOK

1. Hány olyan nyolcjegyű szám van, amelynek számjegyei csökkenő sorrendben követik egymást?

2. Egy nyolcszemélyes társaságban mindenki mindenkivel kezet fogott. Hány kézfogás történt összesen?

3. Hét pont úgy helyezkedik el a síkon, hogy semelyik három nem illeszkedik egy egyenesre. Hány darab szakaszt kell rajzolnod, ha minden lehetséges módon összekötöd őket?

4. Egy 15 fős csoportban 13 mozijegyet kell kiosztani. Egynél több jegyet senki nem kaphat. Hányféle kiosztás lehetséges?

5. Az iskolai pályázatra öt pályamű érkezett. A három legjobbat díjazzák. A díjakat nem különböztetik meg egymástól. Hányféleképpen történhet a díjazás?

6. Egy társasjátékhoz hat darab különböző színű bábu tartozik: piros, zöld, fehér, sárga, lila és fekete. Hárman szeretnének játszani, ezért három bábut kell kiválasztani. Hányféleképpen lehet ezt megtenni? Sorold fel az eseteket!

7. Egy sakkfeladványt öt bábuval lehet kirakni a sakktáblára: három világossal és két sötéttel. Tudjuk, hogy a világos és a sötét királynak is a táblán kell lennie, továbbá nem lehet két azonos világos bábu a táblán. Hányféle kiválasztása lehet a bábuknak egy ilyen feladvány esetén?

4. IGAZOLD! CÁFOLD!

Figyeld meg a *Ha … , akkor …* felépítésű állítások megfordítását:

Ha esik az eső, akkor esernyőt viszek magammal.
Ha esernyőt viszek magammal, akkor esik az eső.

A fenti két mondatról azt mondjuk, hogy az egyik a másik megfordítása. A két mondat nagyon hasonlóan hangzik, hiszen ugyanazokból a szavakból áll, de jelentésük mégis eltérő. Ezért az igazságtartalmukat is meg kell vizsgálnunk.

1. PÉLDA

Fogalmazzuk meg a következő állítások megfordítását! Döntsük el, hogy melyik állítás igaz, melyik nem! Az igaz állításokat igazoljuk, a hamisakat cáfoljuk!

a) Ha egy négyszög minden szöge egyenlő, akkor az négyzet.
b) Ha egy egész szám 3-ra végződik, akkor osztható 13-mal.

Megoldás

a) Az eredeti állítás: Ha egy négyszög minden szöge egyenlő, akkor az négyzet.
A megfordítása: Ha egy négyszög négyzet, akkor minden szöge egyenlő.
Az eredeti állítás hamis. Cáfolatként gondoljunk a téglalapra. Olyan négyszög, amelynek minden szöge egyenlő, és mégsem négyzet.
Az állítás megfordítása igaz. Igazolásként gondoljunk arra, hogy az olyan téglalapokat nevezzük négyzetnek, amelyeknek minden oldala egyenlő hosszúságú. Mivel a téglalapok minden szöge derékszög, ezért a négyzeteké is.

b) Az eredeti állítás: Ha egy egész szám 3-ra végződik, akkor osztható 13-mal.
A megfordítása: Ha egy egész szám osztható 13-mal, akkor 3-ra végződik.
Az eredeti állítás hamis. Cáfolatként vegyük a 23-at. A végződése 3, de nem osztható 13-mal.
Az állítás megfordítása is hamis. A 26 osztható 13-mal, de nem végződik 3-ra.

2. PÉLDA

Alakítsuk át a következő mondatokat olyan formájúvá, hogy beszélhessünk a megfordításukról! Fogalmazzuk meg a megfordításukat is!

a) A lónak négy lába van.
b) Az arany fénylik.
c) A rombusz tengelyesen tükrös négyszög.
d) Minden pozitív egész szám reciproka pozitív tört szám.

Megoldás

a) Ha egy állat ló, akkor négylábú.
A megfordítása: Ha egy állat négylábú, akkor ló.
b) Ha valami arany, akkor fénylik.
A megfordítása: Ha valami fénylik, akkor az arany.
c) Ha egy négyszög rombusz, akkor tengelyesen tükrös.
A megfordítása: Ha egy négyszög tengelyesen tükrös, akkor rombusz.
d) Ha egy szám pozitív egész szám, akkor a reciproka pozitív tört szám.
A megfordítása: Ha egy szám pozitív tört szám, akkor a reciproka pozitív egész szám.

Beszélgetés során előfordulhat, hogy egy állítással nem értesz egyet. Ilyenkor az eredeti állítás tagadását kell megfogalmaznod:

(1) Ez fehér ing.
(2) Ez nem fehér ing.

Az első mondat tagadásakor nagyon sokan egy ingre gondolnak, ami nem fehér. Pedig ezt a mondatot nem csak egy zöld ingre mondhatjuk, hanem például egy piros kabátra vagy egy barna dobozra is.
Ha egy állítás tagadását hallod, akkor gondolj ezekre!

3. PÉLDA

a) Gondoltam egy számot, ami nem negatív. Milyen számra gondolhattam?
b) Hogyan lehetne befejezni a következő mondatot: *A kezemben tartott dolgozat nem jó, hanem* … ?

Megoldás

a) Előjelét tekintve háromféle számra gondolhatunk: negatív, nulla, pozitív. A feladatban a negatív tagadásáról van szó, vagyis gondolhattunk pozitív számra, de a nullára is. (Ezeket a számokat együttesen nemnegatív számoknak nevezzük.)

b) Nem lehet egyértelműen meghatározni, hogy kinek mit jelent a jó.
Tudjuk, hogy ötféle érdemjegy lehetséges: elégtelen, elégséges, közepes, jó, jeles.
Ha ilyen értelemben gondolunk a jó tagadására, akkor a mondat lehetséges befejezései: elégtelen, elégséges, közepes, jeles.
Természetesen formailag nem csak az érdemjegyekre gondolhatnánk. Ezért például ilyen mondatokat is hallhatunk: *a kezemben tartott dolgozat nem jó, hanem csapnivaló!* vagy *[…] nem jó, hanem szuper!*

Az ilyen típusú szófordulatokat a reklámok is használják. Egy nagy cég óriási plakátokon arra kér: Ne a jót válaszd! Válaszd a nagyszerűt! A „jó” tagadásához, vagyis a „nem jő” kifejezéshez nem a „rossz” jelentést társítják, hanem a „nagyszerű”-t!

A matematikában egy állítás vagy igaz, vagy nem igaz (hamis).
Az igaz állítások tagadása hamis, a hamis állítások tagadása pedig igaz.
Egy állítás és a tagadása közül az egyik – és csakis az egyik – igaz, a másik hamis!

FELADATOK

1. Döntsd el a tankönyv 2. példájában szereplő mondatokról és megfordításaikról, hogy igazak vagy hamisak! A hamis állításokat cáfold!

2. Fogalmazd meg a következő állítások megfordítását! Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis! Az igaz állításokat igazold, a hamisakat cáfold!

a) Ha egy négyszög minden oldala egyenlő, akkor az négyzet.
b) Ha egy egész szám 5-re végződik, akkor osztható 5-tel.
c) Ha egy állatnak hat lába van, akkor az rovar.
d) Ha egy négyszögnek van szimmetriatengelye, akkor az deltoid.

3. Tudunk mondani olyan igaz állításokat, amelyeknek a megfordítása is igaz. Például:
Ha egy pozitív egész szám osztható 5-tel, akkor az utolsó számjegye 0 vagy 5.
Ha egy pozitív egész szám utolsó számjegye 0 vagy 5, akkor osztható 5-tel.
Ilyenkor a két mondatot egy igaz állításként is megfogalmazhatjuk:
Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 5-tel, ha utolsó jegye 0 vagy 5.
Fogalmazd meg a következő állítások megfordítását! Ha az eredeti állítás és a megfordítása is igaz, akkor fogalmazd meg őket egy igaz állításként!

a) Ha egy négyszög deltoid, akkor a két-két szomszédos oldala egyenlő hosszúságú.
b) Ha egy szám osztható 12-vel, akkor osztható 4-gyel.
c) Ha egy háromszög két oldala egyenlő hosszúságú, akkor tengelyesen szimmetrikus.
d) Ha egy szám osztható 15-tel, akkor osztható 3-mal és 5-tel.

4. A *Minden négyzet téglalap* állítás tagadása:
Nem igaz, hogy minden négyzet téglalap.
Ezt a mondatot így is mondhatjuk:
Van olyan négyzet, amelyik nem téglalap.
Az eredeti állítás igaz, a tagadása hamis!
A fentiek alapján fogalmazd meg a következő állítások tagadását! Döntsd el, hogy melyik igaz, melyik hamis!

a) Minden paralelogramma rombusz.
b) Minden bogár rovar.
c) Minden kocka téglatest.

5. A *Nincs olyan háromszög, amelyben két tompaszög van* állítás tagadása: *Nem igaz, hogy nincs olyan háromszög, amelyben két tompaszög van.*
Ezt a mondatot így is mondhatjuk:
Van olyan háromszög, amelyben két tompaszög van.
Az eredeti állítás igaz, a tagadása hamis!
A fentiek alapján fogalmazd meg a következő állítások tagadását! Dönts, hogy melyik igaz, melyik hamis!

a) Nincs olyan háromszög, amelyben két derékszög van.
b) Nincs olyan állat, amelyiknek nyolc lába van.
c) Nincs olyan test, amelyiknek hat lapja van.

JÁTÉK

Páros játékok

1. Felváltva kell egyre nagyobb pozitív egész számokat mondanotok úgy, hogy az előzőt legfeljebb 3-mal növelhetitek, és a 21-et nem léphetitek túl. A kiinduló szám a nulla. Az a játékos nyer, aki kimondatja a másikkal a 21-et.

Például Dóri és Zsombi felváltva ezeket a számokat mondta:

1 2 3 4 7 10 11 14 16 19 20 21

Vagyis most Dóri nyert.

Játsszátok el többször a játékot, és közben készítsétek el saját stratégiáitokat! Hogyan kell játszanod, ha nyerni szeretnél?

2. Rakjatok ki egymás mellé néhány (például 6-8 darab) kupakot, némelyik a többihez képest legyen fordítva!

A kezdő játékosnak meg kell fordítania egy olyan kupakot, amelyiknek nem látszik a teteje, majd minden tőle jobbra lévő kupakkal is ugyanezt kell tennie. Most például balról a harmadik, az ötödik és a hatodik kupaknak nem látszik a teteje, tehát elsőként ezek közül kell valamelyiket megfordítania, majd pedig az ettől jobbra lévőket is.
Ha például a kezdő játékos balról a harmadik kupak megfordítása mellett dönt, akkor ilyen kupaksort kap:

Ekkor a második játékosnak is ez a feladata.
Az a játékos nyer, aki eléri, hogy mindegyik kupaknak látszódjon a teteje.

Játsszátok el többször a játékot! Érdemes úgy játszani, hogy az egyik játékos kirakja a kupakokat, a másik pedig dönthet, hogy szeretne-e kezdeni. A játék során szerezz olyan tapasztalatokat, hogy amikor dönthetsz a kezdésről, akkor mindig te nyerj!

FELADATOK

1. Dóri és Zsombi továbbra is a lecke első játékát játsszák.
a) Zsombi kimondta a 17-et. Mit mondjon Dóri, hogy megnyerje a játékot?
b) Dóri kimondta a 16-os számot. Hányféle befejezése van innen a játéknak, ha Dóri már nem rontja el, és ő nyeri a játékot?
c) Zsombi kimondta a 14-es számot. Hányféle befejezése van innen a játéknak, ha Dóri már nem rontja el, és ő nyeri a játékot?

2. Hogyan változik a taktikád a lecke első játékában, ha
a) az előző számot maximum 4-gyel lehet növelni, és a 31-et nem szabad túllépni?
b) az előző számot maximum 6-tal lehet növelni, és a 50-et nem szabad túllépni?

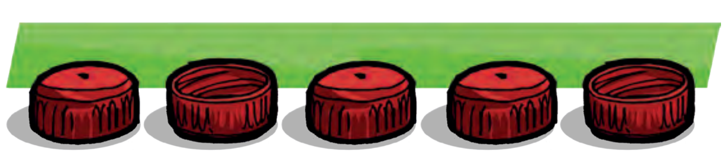
3. Gondold tovább a lecke második játékában megkezdett játszmát! Szerinted ki fog nyerni? Válaszodat részletesen indokold meg!

4. A lecke második játékában megismert szabályokkal kell játszanod. Szeretnél kezdeni? Válaszodat indokold, és rajzold le a folytatást a füzetedbe!

a)

b)

c)



d)

I. 6. ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a fejezetben különböző összeszámlálási kérdésekre kerestük a választ. Voltak olyan helyzetek, amikor bizonyos dolgok sorrendjét kellett összeszámolnunk. Azokat a helyzeteket is megnéztük, amikor a kiválasztások lehetséges módjait kellett meghatároznunk. Ilyenkor a sorrend nem számított. Az esetek nem túl nagy száma miatt a lehetőségeket általában fel is tudtuk sorolni.

Aztán az állítások megfordításával és tagadásával foglalkoztunk. Vizsgáltuk ezen mondatok igazságtartalmát is.

Végezetül matematikai játékok segítségével gondolkodási módszereinket fejlesztettük.

FELADATOK

1. Írd fel a 0, 3, 6 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával képezhető összes
a) páros számot;
b) páratlan számot;
c) öttel osztható számot!

2. Válaszolj az alábbi kérdésekre!
a) Hányféle sorrendben helyezheted egymásra az ötödikes matematikakönyved, a munkafüzeted, a hatodikos matematikakönyved és a munkafüzeted?
b) Az előző kupac tetejére ráteszed a hetedikes matematikakönyvedet és a munkafüzetedet is. Így hányféle sorrend alakulhat ki összesen?

3. Hányféle betűsor készíthető az Á, I, D, K betűk mindegyikének egyszeri felhasználásával? Hány értelmes szó keletkezett így?

4. Egy barátságos tornán öt labdarúgócsapat vett részt.
a) Hányféle sorrendben végezhettek?
b) Hányféle sorrendben végezhettek, ha a két legesélyesebbnek kikiáltott csapat valóban az első két helyet szerezte meg?

5. Hány darab 90 000-nél nagyobb 5-tel osztható szám készíthető az 1, 3, 5, 7, 9 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával?

6. Az *ABCDEFGHIJ* tízszög csúcsaiból nyolcat kell választanod. Hány nyolcszöget kaphatsz ilyen módon?

7. A 28 fős osztályban egy osztálytitkárt, egy sportfelelőst és egy gazdasági felelőst választanak. Hányféleképpen lehetséges ez?

8. Fogalmazd meg a következő mondatok megfordításait! Minden esetben dönts, hogy melyik igaz és melyik hamis!
a) Ha egy tört számlálója és nevezője is páros szám, akkor a tört egyszerűsíthető.
b) Ha egy háromjegyű szám minden számjegye egyenlő, akkor osztható hárommal.
c) Ha egy egész szám végződése 75, akkor osztható 25-tel.
d) Ha egy szám osztható néggyel, akkor osztható hússzal.

9. Fogalmazd meg a következő állítások tagadását!
a) Minden macska szereti a tejet.
b) Nincs olyan macska, amelyik fehér.
c) Minden macska tud nyávogni.
d) Van olyan macska, amelyik fekete.

10. Panni firkálgatott a kockás füzetébe és egy idő után ezt látta maga előtt:

G	Á	S	P	Á	R
Á	S	P	Á	R	
S	P	Á	R		
P	Á	R			
Á	R				
R					

a) Hányféleképpen olvashatja ki a Gáspár nevet, ha csak jobbra vagy lefelé léphet?
b) Hányféleképpen olvashatja ki a Gáspár nevet, ha egymás után legfeljebb kétszer léphet jobbra vagy lefelé?

II. RACIONÁLIS SZÁMOK ÉS HATVÁNYOZÁS

Bár a második útra Gazsi és Attila kártyáját sorsolta ki a véletlenszám-generátor, az al-Hvárizmiről szóló Wikipédia-lapot valamennyi gyerek elolvasta. A két szerencsés időutazó reménykedett, hogy a 800-as évek elejének Perzsiájába való utazás legalább annyira izgalmas lesz, mint az előző páros útja.

A két fiú már jó előre beállította a fordító protokollrobotot, így a megérkezés pillanatában még épp elcsípték a következő beszélgetést:

– Miért rajzolsz magadnak négyzeteket és téglalapokat? – kérdezte érdeklődve Rashid.

– Egyenleteket oldok meg. Nézd csak, ha itt egy téglalapot is rajzolok, akkor épp kiegészítem az egészre – válaszolta al-Hvárizmi.

Rashid nem tágított, mindenképpen megpróbálta kizökkenteni az elmélyülten dolgozó tudóst.

– Miért használsz hindu jeleket? Én is láttam már néhány helyen, de nem szoktam használni őket.

– Sokkal kényelmesebb. Ezt ideírom, ezt meg alá, és kész is az összeadás.

– Gyors vagy. Lehet ezekkel az új jelekkel szorozni is?

– Persze. Gyere el délután az iskolába, ahol gyerekeknek magyarázok – mosolyodott el al-Hvárizmi, és visszafordult a rajzaihoz.

– Láttad? – súgta Attila Gazsinak. – Már az új számokat használja. Kicsit hasonlítanak a mi számainkra, de sok különbség is van.

– Úgy tűnik, több mint 1000 éve ugyanazokat a dolgokat tanuljuk a suliban – somolygott Gazsi, aki már elképzelte, hogyan meséli el a többieknek, hogy már ezer éve is az összeadást és a szorzást kellett gyakorolni az iskolában.

II. 1. AZ EGÉSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE

Az emberek ősidők óta számolnak. Kezdetben tárgyaikat, munkaeszközeiket, összegyűjtött javaikat számolták meg. Az egy, a kettő már nem egy konkrét tulajdonságú tárgyat jelentett, hanem a vizsgált tárgyak számát. A szám fogalommá vált. Az ember először valószínűleg a kézujjait, majd a lábujjait használta a megszámláláshoz. Ez teljesen magától értetődött, hiszen ezeket a „számolóeszközöket" mindig magával vitte.
A kezdeti időkben nem számoltak húsznál tovább. Ha valamiből ennél több volt, akkor arra azt mondták, hogy sok. Később, a megtermelt javak gyarapodásával, egyre nagyobb számokat használtak. Így alakultak ki a pozitív egész számok.

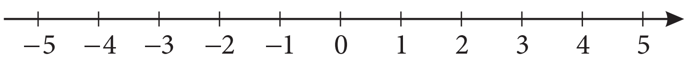
A számok jelölésére használt számjegyeket az arabok vezették be, a X. században pedig Európába is eljutottak. Itt kapták az „arab számok" elnevezést, mivel arab matematikusok és csillagászok munkássága révén váltak ismertté.
A számok kialakulásáról az 5.-es történelemtankönyv 34. oldalán is olvashatsz.

A nulla kialakulása nagyon hosszadalmas folyamat volt. Kezdetben az a gondolat tűnt természetesnek, hogy a *semmit* nem kell jelölni. Valószínű, hogy a kereskedelemben volt szükség először a 0 szám, majd ehhez kapcsolódóan a 0 számjegy használatára, amelyet körülbelül a Kr. u. IX. században vezettek be az indiaiak. Vajon miért éppen ilyen a nulla alakja? Vannak, akik úgy gondolják, hogy azért, mert több ezer évvel ezelőtt, homokba rakott kavicsok segítségével számoltak az indiaiak, és ha elvettek egy kavicsot a homokból, akkor annak nyoma hasonlított a 0 számjegyre. A 0 tehát azt a helyet jelölte, ahol nincsen számot jelentő kavics.

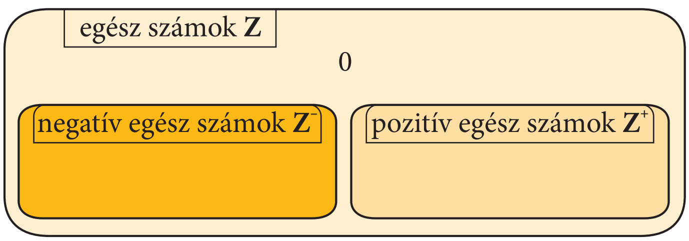
A természetes számok a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12… . Másként fogalmazva: a pozitív egész számok és a 0 együtt alkotja a természetes számok halmazát. A természetes számok halmazát **N**-nel jelöljük. Minden természetes számnál lehet nagyobb természetes számot mondani. Próbáljátok ki ti is a padtársaddal!
Ez azt is jelenti, hogy a természetes számok halmazának végtelen sok eleme van.

1. AZ EGÉSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE

A természetes számok halmazához a negatív egész számokat is hozzávéve az egész számok halmazát kapjuk. Ezt szemléltethetjük számegyenesen,



vagy ábrázolhatjuk is:



Az egész számok jele: **Z**.
A negatív egész számok jele: $\mathbf{Z}^-$,
a pozitív egész számok jele: $\mathbf{Z}^+$.

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogyan ábrázolták a számokat az ókorban! Keress legalább kétféle ábrázolási módot!
Keress az interneten arra vonatkozó információkat, hogy mikor használtak először negatív számokat!

CSOPORTMUNKA

Ismételjétek át a számok leírásáról tanultakat!
Beszéljétek meg, mit jelent a helyi érték, az alaki érték és a valódi érték!

Egy szám 0-tól való távolságát a szám abszolút értékének nevezzük. A 3 abszolút értéke 3, a –5 abszolút értéke 5, mert 5 egység távolságra van a 0-tól.
Az abszolút érték jelölésére $|3|$; $|-5|$ jelölést használjuk. Így $|3| = 3$ és $|-5| = 5$.

PÁROS MUNKA

Mondj példát a padtársadnak az osztás műveletéről írt állításra, majd hallgasd meg az ő példáját is!

Az egész számok körében mindig elvégezhetjük az összeadást, a kivonást és a szorzást. Ez azt jelenti, hogy két egész szám összege, szorzata és különbsége is egész szám lesz. Az osztás műveletére azonban ez már nem igaz.

Az összeadás műveletének megfordítása a kivonás, a kivonást tehát összeadással ellenőrizhetjük. Számolásnál sokszor célszerű ehhez hasonló műveleti tulajdonságokat alkalmazni, mert így könnyebbé válhat a feladatunk.

Összeadás	Kivonás
Az összeadás tagjai felcserélhetők: $3 + 5 = 5 + 3$ $(-2) + 7 = 7 + (-2)$ $a + b = b + a$	A kisebbítendő és a kivonandó általában nem cserélhető fel: $3 - 5 \neq 5 - 3$ $(-2) - 7 \neq 7 - (-2)$ $a - b \neq b - a$
A tagok csoportosíthatók, átzárójelezhetők: $(11 + 9) + (-15) = 11 + (9 + (-15))$ $(a + b) + c = a + (b + c)$	A tagok tetszőlegesen nem csoportosíthatók (a zárójel nem helyezhető át bárhová): $(11 - 9) - 15 \neq 11 - (9 - 15)$ $(a - b) - c \neq a - (b - c)$

II. 1. AZ EGÉSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE

A szorzás műveletének megfordítása az osztás. Az osztás eredménye nem mindig egész szám. A műveletek tulajdonságait itt is vizsgáljuk meg.

Szorzás	Osztás
A szorzótényezők felcserélhetők. $35 \cdot 5 = 5 \cdot 35$ $a \cdot b = b \cdot a$	Az osztandó és az osztó általában nem cserélhető fel. $35 : 5 \neq 5 : 35$ $a : b \neq b : a$
A tényezők csoportosíthatók, átzárójelezhetők. $(2 \cdot 9) \cdot (-10) = 2 \cdot (9 \cdot (-10))$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	A tagok nem csoportosíthatók tetszőlegesen (nem tehető át bárhova a zárójel). $(54 : 9) : 3 \neq 54 : (9 : 3)$ $(a : b) : c \neq a : (b : c)$

Számítsuk ki az alábbi műveletsorok eredményét, és figyeljük meg a fenti tulajdonságokat!

$150 + (55 + 25) = 150 + 80 = 230$

$(150 + 55) + 25 = 205 + 25 = 230$

$600 - (125 - 85) = 600 - 40 = 560$

$(600 - 125) - 85 = 475 - 85 = 390$

Zárójelfelbontások során ügyeljünk a műveleti sorrendre. Ha nincs zárójel a műveletsorban, akkor először a szorzást és az osztást végezzük el a felírt sorrendben, majd az összeadást és a kivonást.

$450 \overset{2.}{-} 15 \overset{1.}{\cdot} 28 = 450 - 420 = 30$

Ha van zárójel, akkor a zárójelben lévő műveletet kell először elvégezni, majd a többit.

$15 \overset{2.}{\cdot} (28 \overset{1.}{-} 13) = 15 \cdot 15 = 225$

$15 \cdot 28 - 13 = 420 - 13 = 407$

Előjeles számok összevonása

Előjeles számok összeadásakor és kivonásakor célszerű a műveleti jelet és az előjelet egy műveleti jellé összevonni a korábban tanult szabályok felhasználásával:

- **összeadáskor a pozitív előjel, kivonáskor a negatív előjel egy összeadássá (+ előjellé) olvad össze;**
- **összeadáskor a negatív előjel, kivonáskor a pozitív előjel egy kivonássá (– előjellé) olvad össze.**

Ha egy műveletsorban szerepel összeadás és kivonás is, akkor ezt együttesen összevonásnak nevezzük.

Az alábbi példák segítségével ismételjük át az előjeles számok összeadásáról, kivonásáról tanult ismereteket!

a) $(+25) + (+19) + (+41) = 25 + 19 + 41 = +85$

b) $(-450) - (-45) - (-200) = -450 + 45 + 200 = -405 + 200 = -205$

c) $(-140) + (-122) + (-78) = -140 - 122 - 78 = -340$

d) $(-415) - (+65) - (+45) = -415 - 65 - 45 = -525$

e) $120 + (-20) + (-190) - (+160) = 120 - 20 - 190 - 160 = -250$

Előjeles számok szorzása:

Két azonos előjelű szám szorzata pozitív. $12 \cdot 18 = 218$; $(-25) \cdot (-14) = +350$

Két különböző előjelű szám szorzata negatív. $(-32) \cdot (+25) = -800$

Osztás esetén a szorzáshoz hasonló szabályok érvényesek a hányados előjelére.

Ha kettőnél több tényezőből áll a szorzat, akkor az előjelének meghatározásakor célszerű kettesével megnézni a szorzatok előjelét.

$$(-2) \cdot (+3) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-10) = (-6) \cdot 4 \cdot (-5) \cdot (-10) = (-24) \cdot (-5) \cdot (-10) = (+120) \cdot (-10) = -1200$$

1. AZ EGÉSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE

A „Ne dobd ki!” program keretében a hetedik osztályosok azt a feladatot kapták, hogy készítsenek játékokat újrahasznosítható hulladékból.

1. PÉLDA

Matyi az üdítőitalos kupakokra egész számokat írt, majd azt a feladatot adta osztálytársainak, hogy vegyenek el összesen négy kupakot úgy, hogy minden sorból és oszlopból pontosan egy kupak hiányozzon, és az elvett kupakokon lévő számok összege a lehető legnagyobb legyen. Oldd meg te is Matyi feladatát!
Melyik kupakokat kell elvenni ahhoz, hogy az összeg a lehető legkisebb legyen?

a)

b)

Megoldás

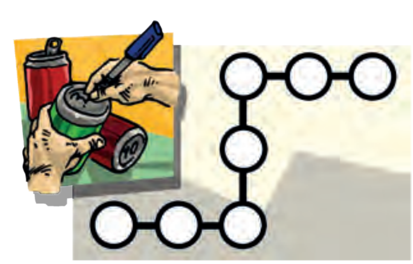
a) Az első oszlopból a hetes, a másodikból a nyolcas, a harmadikból szintén a hetes és az utolsóból a tízes feliratú kupakot elvéve megkapjuk a legnagyobb összeget. Keress más megoldást is!
b) Az első oszlopból a négyes, a másodikból a hetes, a harmadikból a hatos és a negyedikből szintén a hetes feliratú kupakot elvéve megkapjuk a legkisebb összeget. Keress más megoldást is!

CSOPORTMUNKA

Alkossatok párokat! Tegyetek az asztalra 23 kupakot! Felváltva vegyetek el a kupacból 1, 2 vagy 3 kupakot! Minden lépésnél kötelező elvenni valamennyit. Az veszít, akinek az utolsó kupak marad. Van-e nyerő stratégia? Ki az, aki ha ügyesen játszik, mindenképpen nyerni fog?

2. PÉLDA

Julcsi kilenc üdítős dobozt hozott magával, melyek tetejére ráírta a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 számokat, és felrajzolta a földre a mellékelt ábrát. A gyerekeknek úgy kellett a dobozokat a körökre helyezni, hogy a szakaszokkal összekötött körökhöz tartozó három szám szorzata ugyanannyi legyen. Hogyan oldanád meg Julcsi feladatát?



Megoldás

A 10-80-90, 90-20-40 és a 40-30-60 számhármasok megadják a feladat megoldását.

II. 1. AZ EGÉSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAINAK ÁTTEKINTÉSE

FELADATOK

1. Mennyi a kiemelt számok helyi értéke, alaki értéke és valódi értéke?
a) 60**4**15; *b)* **3**45172; *c)* 1**0**3541.

2. Furavilágban egy év 5 hónapból, egy hónap 3 hétből, egy hét 3 napból áll. Hány napig tart Furavilágban a hétéves katonai szolgálat?

3. Végezd el a kijelölt műveleteket!
a) (–25) – (–4); *b)* (+23) + (+14);
c) (–32) + (–78); *d)* (–23) + (+71);
e) (–8) – (+11) – (+666) – 941; *f)* (+548) – (+148) + (+254);
g) 22 + (+21) – (+23) + (+26) – (+60); *h)* –212 + (+117) – (+231) – (+140) – (+415);
i) 1320 – [(+440) – (+620)]; *j)* 315 – [(–43) – (–743)].

4. A műveleti sorrendről tanultak felhasználásával a füzetedben végezd el az alábbi műveleteket! Figyelj a pontos másolásra!
a) (68 + 142) · (–4); *b)* [(–6) · (+14)] – [(+4) · (–32)]; *c)* (–24) · (–6 + 52 + 280).

5. Gerzson úgy döntött, március 1-től sportos életet él és minden nap futni fog. Első nap lefutott 1 kilométert, majd ezt a távot kétnaponta 100 méterrel növelte.
a) Hány métert fut majd április 10-én?
b) Hány kalóriát égetett el március 31-én, ha 1 km lefutása alatt 210 kalóriát éget el?

6. Döntsd el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak és melyek hamisak!
a) Két természetes szám összege természetes szám.
b) Két egész szám összege egész szám.
c) Ha két egész szám összege természetes szám, akkor mindkét szám természetes szám.
d) Ha egy szám kétszerese egész szám, akkor a szám is egész szám.

7. Flóra három legjobb barátnője számára összeállított egy 24 oldalas újságot, amelynek 9 oldalán színes fényképek is vannak. Számold ki, hány forintba kerül négy példány kinyomtatása, ha tudod, hogy egy színes oldalt 185 Ft-ért, egy fekete-fehéret pedig 32 Ft-ért nyomtatnak ki!

8. Határozd meg, hogy melyik műveletsor eredménye pozitív, negatív, illetve nulla!
a) 2547 + 1332 + 1215; *b)* 2547 – 1332 + 1215;
c) 2547 – 1332 – 1215; *d)* 2547 – (1332 + 1215);
e) 2547 – (1332 – 1215); *f)* 2547 + 1332 · 1215;
g) (2547 + 1332) · 1215; *h)* 2547 – 1332 · 1215.

2. A TÖRTEK

Ha az előző órai kutatásod eredményes volt, kideríthetted azt, hogy az ember a negatív számokat csak nagyon későn kezdte el használni.

A negatív számokat sokáig lehetetlen számoknak tartották. A + és – jelet a kereskedők a többlet, illetve a hiány jelölésére használták, de általánosan csak a XVII. században terjedt el.
A részekre bontás (az osztozkodás) azonban már a fejlődés nagyon korai szakaszában megjelent. Az emberek először a fél, a felezés fogalmát használták, illetve a többi egyszerű törtet (harmad, negyed, tized stb.). A törtszámok kialakulása csak jóval később történt, és az egyes népeknél különböző időben és módon jelent meg.
Például a görögöknél a törtszámok általános leírási módja a Kr. u. I–II. században alakult ki, a rómaiaknál viszont csak tizenketted részekkel számoltak.

1. PÉLDA

Panni meghívta néhány barátját a születésnapjára. Összeszámolta, hogy a partin összesen tízen lesznek, így édesanyja egy tízszeletes túrótortát készített. Kiderült azonban, hogy két meghívottnak a kisebb testvére is eljött. Jutna-e mindenkinek egy szelet torta?

Megoldás

Nem, mert a torta $\frac{1}{12}$ része kevesebb, mint egy szelet.

Gyorsan ki kellett találni valami jó megoldást. Szerencsére anya és apa lemondtak a saját részükről, így mindenkinek jutott 1 szelet.

Egy osztás eredménye nem lesz mindig egész szám. Az ilyen esetek jelölésére használjuk a törtszámokat.

2. PÉLDA

Egy narancs négy egyenlő részre történő felosztásakor a narancs $\frac{1}{4}$ részét kapjuk. Nagyon szerencsés helyzetben vagyunk, ha a narancs éppen 8 gerezdre bontható szét, mert akkor mindenki 2 gerezdet kap. Nehezebb a helyzet, ha a narancs 9 kisebb gerezdből áll, mert akkor nem olyan egyszerű igazságosan elosztani. Hány gerezd jut egy-egy embernek ebben az esetben?

Megoldás

Ebben az esetben mindenkinek $\frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} = 2{,}25$ gerezd jut.

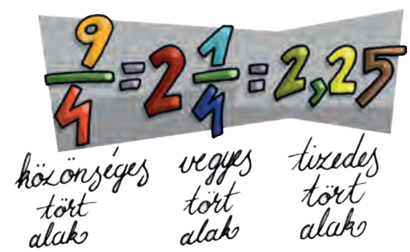
II. 2. A TÖRTEK

ELMÉLET

Tanultad már! Ismételjük át!

A törtek leírása

A 2. példa alapján is látható, hogy az eddig tanult számok többféle alakban írhatóak:



Ez a szám tehát egész szám, amelyet írhatunk tört alakban is.

Ez egy törtszám, amely nem egész szám, de többféle tört alakja is létezhet.

Megmutattuk, hogy az egész számok és a törtszámok is felírhatók két egész szám hányadosaként.

ELMÉLET

Racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként.

A törtek vizsgálatánál, összehasonlításánál, műveletek elvégzésénél sokszor lehet **egyszerűsíteni**, illetve **bővíteni**.

Egyszerűsítéskor a számlálót és a nevezőt is ugyanazzal a 0-tól különböző számmal osztjuk el.

A mindennapi szóhasználatban a következőt mondjuk: $\frac{3}{4}$ óra múlva érkezem. Mókás lenne azt hallanunk, hogy $\frac{45}{60}$ óra múlva érkezem.

Bővítéskor a számlálót és a nevezőt is ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk meg.

Melyik nagyobb:

$$\frac{5}{3} \text{ vagy } \frac{7}{4}?$$

Ha mindkét törtet úgy bővítjük, hogy ugyanakkora legyen a nevezőjük (ez a közös nevezőre hozás), akkor a számokat könnyebben összehasonlíthatjuk:

$$\frac{5}{3} = \frac{20}{12} \qquad \frac{7}{4} = \frac{21}{12}.$$

Így már könnyen eldönthető, melyik a nagyobb:

$$\frac{5}{3} < \frac{7}{4}.$$

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, mit nevezünk egységtörtnek!
Keress az interneten érdekességeket az egységtörtekkel kapcsolatosan!

FELADATOK

1. Válogasd ki az alábbi számhalmazból az egész számokat, a tört alakban írt egész számokat és a törteket!

-11; $\frac{4}{5}$; $-17\frac{1}{2}$; $\frac{-7}{15}$; $\frac{14}{7}$; $\frac{2}{-3}$; $\frac{15}{3}$; $2\frac{5}{6}$; $\frac{13}{26}$; $-\frac{26}{13}$; 147

2. Írj három-három olyan törtet, amelyek értéke megegyezik az alábbi számokkal!

a) $\frac{-11}{8}$; *b)* 3;
c) $3\frac{5}{7}$; *d)* 12;
e) $-5\frac{4}{5}$; *f)* -3;
g) $\frac{2}{9}$; *h)* 0.

3. Kisebb? Nagyobb? Egyenlő? Dönts el, melyik tört nagyobb! Ha szükséges a füzetedben számolj!

a) $\frac{7}{8}$ $\frac{7}{9}$; *b)* $\frac{5}{6}$ $\frac{4}{6}$;
c) $\frac{19}{9}$ $\frac{17}{9}$; *d)* $-\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$;
e) $-\frac{3}{5}$ $-\frac{4}{5}$; *f)* $2\frac{4}{5}$ $\frac{13}{5}$;
g) $-3\frac{1}{6}$ $-\frac{20}{6}$.

4. Keresd meg az egyenlőket! Melyik számnak nincs párja?

$\frac{1}{10}$; $\frac{7}{9}$; $\frac{157}{100}$; $4\frac{1}{8}$; $0{,}1$; $1{,}57$; $3{,}14$; $0{,}\dot{7}$; $4{,}125$

5. Hasonlítsd össze a törtek értékét! Segít a közös nevezőre hozás! A füzetben dolgozz!

a) $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$; *b)* $-\frac{2}{7}$ $-\frac{3}{8}$; *c)* $\frac{16}{21}$ $\frac{24}{35}$;
d) $2\frac{5}{8}$ $\frac{10}{4}$; *e)* $-\frac{17}{6}$ $-2\frac{3}{4}$.

6. Zoli megette a müzlijének az $\frac{5}{8}$ részét, Dani pedig a saját adagjának a $\frac{6}{11}$ részét. Ki evett többet, ha eredetileg ugyanannyit kaptak?

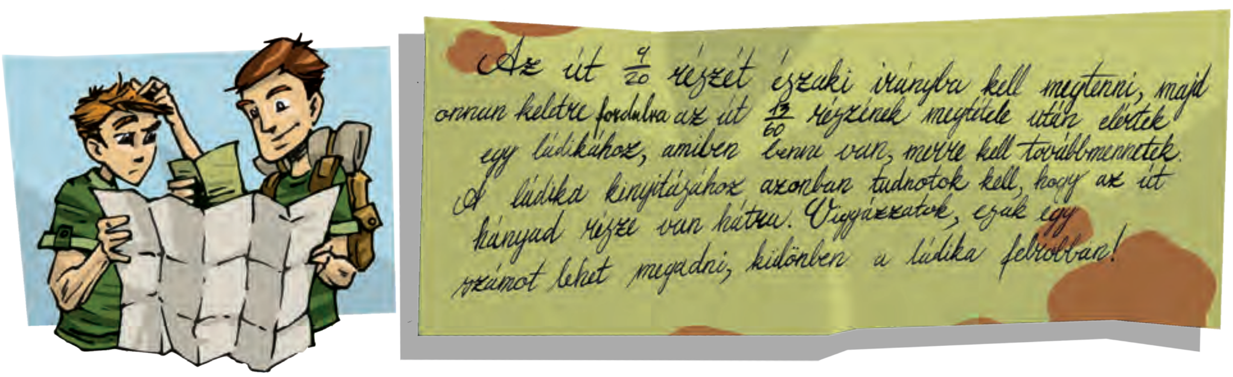
7. Döntsd el, igaz-e vagy hamis?

a) Ha két pozitív tört számlálója és nevezője is megegyezik, akkor a két tört értéke megegyezik.
b) Két pozitív tört közül az a nagyobb, amelyiknek a számlálója és a nevezője is nagyobb.
c) Ha két pozitív tört számlálója megegyezik, akkor az a nagyobb, amelyiknek a nevezője nagyobb.
d) Ha két negatív tört nevezője megegyezik, akkor a kisebb számlálójú a nagyobb.
e) Két negatív tört közül az a nagyobb, amelyik a számegyenesen közelebb van a nullához.

II. 3. TÖRTEK ÖSSZEADÁSA, KIVONÁSA

1. PÉLDA

Attila és Bálint kincset keresett, s a térkép mellett a következő útmutatást találta:



Az út $\frac{9}{20}$ részét északi irányba kell megtenni, majd onnan keletre fordulva, az út $\frac{13}{60}$ részének megtétele után elértek egy ládikához, amiben benne van, merre kell továbbmennetek. A ládika kinyitásához azonban tudnotok kell, hogy az út hányad része van hátra. Vigyázzatok, csak egy számot lehet megadni, különben a ládika felrobban!

Megoldás

A két gyerek úgy döntött, külön-külön számolják ki, hogy az út hányad részét kell megtenni a ládikáig.
A számolások:

Attila:

$$\frac{9}{20}+\frac{13}{60}=\frac{540}{1200}+\frac{260}{1200}=\frac{800}{1200}$$

Bálint:

$$\frac{9}{20}+\frac{13}{60}=\frac{27}{60}+\frac{13}{60}=\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$$

Melyik számolást tartod jobbnak? Miért?
Ha ellenőrizzük a számításokat, láthatjuk, hogy bár mindkét fiú jól számolt, Attilának nagyobb számokkal kellett számolnia.

Törtek összeadásakor a legcélravezetőbb út, ha közös nevezőre hozzuk őket, majd a számlálóikat összeadjuk. A közös nevező megtalálásánál segíthet a legkisebb közös többszörös. A vizsgált törtek nevezőinek szorzata mindig jó lesz, de célszerű minél kisebbet keresni, mert azzal könnyebb számolni.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{7}=\frac{5\cdot 7}{42}+\frac{3\cdot 6}{42}=\frac{35}{42}+\frac{18}{42}=\frac{53}{42}$$

A törtek kivonását elvégezhetjük úgy, hogy a kivonandó ellentettjét adjuk hozzá a megfelelő taghoz.

Az egész számoknál megállapítottuk, hogy az összeadás tagjai felcserélhetők és tetszőlegesen csoportosíthatók. Ezek a műveleti tulajdonságok törtek összeadásánál is érvényesek.

2. PÉLDA

Számoljunk minél egyszerűbben! Használjuk az érvényes műveleti tulajdonságokat!

$$\frac{7}{3}+\frac{5}{6}+\frac{32}{3}+\frac{13}{6}=$$

Megoldás

Mielőtt gondolkodás nélkül közös nevezőre hoznánk, nézzük meg alaposabban a műveletsort! Láthatjuk, hogy az első és harmadik tört nevezője megegyezik, összegük $\frac{39}{3}=13$. A másik két tört is összeadható hasonló módon, összegük $\frac{18}{6}=3$. A műveletsor eredménye: $13+3=16$.

Törtek összeadása vagy kivonása esetén mindig célszerű megvizsgálni, hogy érdemes-e néhány tagot felcserélni vagy csoportosítani.

3. PÉLDA

Számoljunk minél egyszerűbben! Használjuk az érvényes műveleti tulajdonságokat!

$$\frac{63}{15}+3+\left(-\frac{3}{15}\right)-1=$$

Megoldás

Elvégezve a megfelelő csoportosítást a következőt kapjuk:

$$\frac{63}{15}+3+\left(-\frac{3}{15}\right)-1=\left(\frac{63}{15}-\frac{3}{15}\right)+3-1=\frac{60}{15}+2=4+2=6$$

Ha összeadás és kivonás során vegyes törtekkel kell számolnunk, akkor két lehetőségünk van.

1. lehetőség:
Először az egészekkel végezzük el a műveleteket, majd összeadjuk a törteket is.

$$23\frac{4}{5}+12\frac{2}{3}-16\frac{1}{2}=(23+12-16)+\left(\frac{4}{5}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)=19+\left(\frac{24}{30}+\frac{20}{30}-\frac{15}{30}\right)=19+\frac{29}{30}=19\frac{29}{30}$$

Ennek az az előnye, hogy kisebb törtekkel kell számolni, de nagyon körültekintőnek kell lenni az előjelekkel kapcsolatban.

2. lehetőség:
A vegyes törteket közönséges törtekké alakítjuk, majd utána közös nevezőre hozzuk őket.

$$23\frac{4}{5}+12\frac{2}{3}-16\frac{1}{2}=\frac{119}{5}+\frac{38}{3}-\frac{33}{2}=\frac{714}{30}+\frac{380}{30}-\frac{495}{30}=\frac{599}{30}=19\frac{29}{30}$$

Ebben az esetben biztosabb ugyan az előjelek használata, de a nagy számok miatt nagyobb a számolási hiba lehetősége is.

II. 3. TÖRTEK ÖSSZEADÁSA, KIVONÁSA

PÁROS MUNKA

Írjátok fel az 50-et nemnegatív egyjegyű számok felhasználásával, összeadás és kivonás műveletének segítségével! Például: $9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 - 4$.

CSOPORTMUNKA

Egységtörteknek nevezzük azokat a törteket, amelyeknek a számlálója 1, nevezőjük pedig egy pozitív egész szám.
Az egyiptomiak már használták a közönséges törteket, és minden 0 és 1 közötti törtet fel tudtak írni egységtörtek összegeként.
Például:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15};$$

vagy

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}.$$

Írjátok fel az alábbi törteket egységtörtek összegeként!

$$\frac{5}{8}; \qquad \frac{13}{25}; \qquad \frac{19}{33}.$$

Fogalmazzátok meg, milyen lépések során jutottatok el a megoldáshoz!

FELADATOK

1. Végezd el a műveleteket! Ahol tudsz, egyszerűsíts!

a) $\frac{7}{5} + \frac{13}{5}$; *b)* $\frac{5}{7} + \frac{32}{14}$; *c)* $\frac{8}{3} - \frac{10}{6}$; *d)* $\frac{8}{6} - \frac{10}{3}$;

e) $\frac{6}{5} + \frac{2}{3}$; *f)* $\frac{8}{11} - \frac{3}{7}$; *g)* $\frac{63}{8} + 3\frac{11}{20}$; *h)* $4\frac{5}{6} - 6\frac{4}{9}$;

i) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$; *j)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$; *k)* $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$; *l)* $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$;

m) $1\frac{1}{2} + 2\frac{2}{3}$; *n)* $3\frac{3}{4} - 2\frac{3}{8}$; *o)* $3\frac{5}{12} + 5\frac{1}{4}$; *p)* $2\frac{7}{9} - 1\frac{1}{3}$;

q) $17\frac{10}{15} + 22\frac{2}{20}$; *r)* $34\frac{28}{35} - 28\frac{9}{12}$; *s)* $3\frac{3}{4} - \frac{8}{19}$; *t)* $8\frac{3}{4} - 3\frac{8}{4}$;

u) $12\frac{3}{4} + 23\frac{4}{5}$; *v)* $3\frac{7}{12} + 2\frac{1}{24} + 5\frac{5}{12}$; *w)* $7 - 3\frac{6}{13}$; *x)* $2015\frac{2}{10} - 2002\frac{10}{8}$;

y) $24\frac{37}{18} + 25\frac{41}{27}$; *z)* $43\frac{11}{34} - \frac{135}{102}$.

2. Szofi ezen szomorkodik:
Az ismerőseim kétharmada lájkolta a fényképemet, az ötöde csak hozzászólt. Vajon miért nem reagált semmit a maradék 48 ismerősöm? Hány ismerőse van Szofinak?

3. Dávid így morfondírozik:
Van 3600 forintom. Ha a zsebpénzem negyedéből ajándékot veszek nagyinak, a harmadát kölcsönadom a bátyámnak, akkor nem marad 1800 forintom arra a pendrive-ra, amit meg akartam venni.

a) Számold ki, mennyi pénze marad Dávidnak!

b) Minimum hány forintra van szüksége ahhoz, hogy az ajándék, a kölcsön és a pendrive megvásárlása után is maradjon 2000 forintja?

4. Számold ki *A*, *B*, *C*, *D* és *E* értékét! Számításaidat írd a füzetbe!

a)

$2\frac{4}{5}$	$-$	$3\frac{1}{2}$	$=$	*A*
$+$		$-$		
$\frac{12}{10}$	$+$	$\frac{3}{4}$	$=$	*B*
$=$		$=$		
C	$-$	*D*	$=$	*E*

b)

$3\frac{2}{3}$	$-$	$\left(-\frac{17}{6}\right)$	$=$	*A*
$+$		$-$		
$\left(-1\frac{1}{7}\right)$	$+$	$\frac{5}{3}$	$=$	*B*
$=$		$=$		
C	$-$	*D*	$=$	*E*

5. Számolj minél egyszerűbben! Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{14}{17}+\frac{9}{16}+\frac{3}{17}+1\frac{7}{16}$;

b) $41\frac{1}{8}+23\frac{9}{10}+19\frac{3}{8}+15\frac{6}{10}$;

c) $8\frac{16}{24}-\frac{9}{14}-5\frac{4}{24}+1\frac{2}{14}$;

d) $\left(-\frac{9}{18}\right)+2\frac{2}{4}-\frac{11}{22}+7\frac{4}{8}$;

e) $\frac{5}{13}+\frac{21}{19}+\frac{8}{13}-\frac{2}{19}+\frac{1}{7}$;

f) $\frac{7}{2}+\frac{6}{4}-5+\frac{13}{7}$;

g) $4\frac{1}{7}+5\frac{2}{22}-2\frac{1}{7}+3\frac{10}{11}$;

h) $\frac{8}{37}-\frac{7}{14}+\frac{29}{37}+\frac{18}{12}$;

i) $10-3\frac{3}{23}-3\frac{11}{23}-3\frac{9}{23}$;

j) $\frac{7}{8}-\frac{8}{7}-\frac{18}{7}+\frac{2}{16}$.

6. Számítsd ki a következő összeget!

$$\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\ldots+\frac{7}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{8}{9}\right)+\left(\frac{1}{10}+\frac{2}{10}+\ldots+\frac{9}{10}\right)$$

II. 4. TÖRTEK SZORZÁSA, OSZTÁSA

1. PÉLDA

A kézműves szakkörön részt vevő diákok a tökfesztiválra készülve kivágták a megvásárolt 24 kg-os dísztök $\frac{1}{5}$ részét. A kifaragott dísztökbe teamécseseket tettek, majd hangulatvilágításként használták. Mennyi volt a dísztök tömege a kifaragás után?
A dísztök tömegét két hét elteltével megmérték, és azt tapasztalták, hogy tömege $\frac{1}{3}$ részét elveszítette. Hány kg-ot mutatott a mérleg? Hányadrésze ez a dísztök eredeti tömegének?

Megoldás

Az eredeti tömeg $\frac{4}{5}$ része marad meg.

24 kg $\frac{4}{5}$ része egyenlő a 24 kg $\frac{4}{5}$-szörösével. $24\cdot\frac{4}{5}=\frac{96}{5}=19,2$ kg.
A kifaragott tök 19,2 kg tömegű.

Ha elveszítette tömegének $\frac{1}{3}$ részét, akkor a $\frac{2}{3}$ része megmaradt.

$$\frac{96}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{\overset{32}{\cancel{96}}}{5}\cdot\frac{2}{\underset{1}{\cancel{3}}}=\frac{64}{5}=12,8 \text{ kg}.$$

A víz elpárolgása után a tök tömege 12,8 kg lett.
Ez a tömeg az eredeti tömeg $\frac{4}{5}$ részének a $\frac{2}{3}$ része, azaz $\frac{4}{5}$-nek a $\frac{2}{3}$-szorosa.

Tehát a dísztök $\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}$ része maradt meg.

Ebben a példában azt láthattuk, hogyan szorzunk törttel egész számot, illetve törtszámot.

ISMÉTELJÜK ÁT A TANULTAKAT!

Egész számot törttel úgy szorzunk, hogy a tört számlálóját megszorozzuk az egész számmal és a tört nevezője változatlan marad. Ha az egész számnak és a tört nevezőjének van 1-nél nagyobb közös osztója, akkor a könnyebb számolás érdekében célszerű egyszerűsíteni.

2. PÉLDA

$12\cdot\frac{7}{11}=\frac{84}{11}$; $\quad 36\cdot\frac{7}{24}=\overset{3}{\cancel{36}}\cdot\frac{7}{\underset{2}{\cancel{24}}}=\frac{21}{2}$

Törtet törttel úgy szorzunk, hogy előbb összeszorozzuk egymással a számlálókat, majd pedig a nevezőket. Ha lehet, itt is végezzük el az egyszerűsítést!

3. PÉLDA

Számítsuk ki a műveletsor eredményét! Egyszerűsítsünk, ahol csak lehet!

$\frac{3}{25} \cdot \frac{15}{9} \cdot \frac{6}{7} =$

Megoldás

$\frac{3}{25} \cdot \frac{15}{9} \cdot \frac{6}{7} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{25} \cdot \frac{15}{\underset{3}{\cancel{9}}} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{\underset{5}{\cancel{25}}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{15}}}{3} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{5} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{6}{7} = \frac{6}{35}.$

A vegyes törteket mindig alakítsuk közönséges törtekké, s csak utána végezzük el a szorzást!

4. PÉLDA

Anna és Helén különböző módon szorzott össze két vegyes törtet. Döntsük el, kinek van igaza!
Anna összeszorozta az egészeket, majd összeszorozta a törteket, így a következő megoldást kapta:
$1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{3} = 2\frac{1}{6}$.
Helén először közönséges törtekké alakította a törteket, és csak utána szorozta össze őket a tanult módszer alapján: $1\frac{1}{4} \cdot 2\frac{2}{3} = \frac{5}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{3} = \frac{5}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$.

Megoldás

Anna számolásáról gyorsan eldönthető, hogy rossz, mert $2\frac{2}{3}$-ot szorzott egy 1-nél nagyobb számmal, így az eredménye biztosan nagyobb lesz, mint $2\frac{2}{3}$. Helén számolása jó.
Ellenőrizd otthon a számológéped vagy a telefonod segítségével is, hogy jól számolt-e Helén!

CSOPORTMUNKA

Beszéljétek meg, mit értünk egy szám reciprokán! Számoljátok ki fejben a következő számok reciprok értékét!

a) $\frac{3}{4}$; *b)* $-\frac{11}{5}$;

c) $1\frac{2}{7}$; *d)* $-2\frac{4}{3}$;

e) 5; *f)* -3;

g) 0.

5. PÉLDA

Számold ki a következő kifejezések értékét!

a) $3 \cdot \frac{1}{3}$; *b)* $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$; *c)* $2\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7}$.

Megoldás

a) $3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{3}{3} = 1$; *b)* $\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{\cancel{4}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{3}}} = 1$;

c) $2\frac{1}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{2}{\cancel{10}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{1}{\cancel{7}}} = \frac{3}{2}$.

II. 4. TÖRTEK SZORZÁSA, OSZTÁSA

Egész számot vagy törtet törttel úgy osztunk, hogy az osztó reciprokával szorzunk.

Emlékszel? **Egy szám reciproka az a szám, amellyel az eredeti számot megszorozva, 1-et kapunk.**

Például: 2 reciproka $\frac{1}{2}$; -5 reciproka $-\frac{1}{5}$; $\frac{3}{4}$ reciproka $\frac{4}{3}$.

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a 2 és $\frac{1}{2}$ reciprokai egymásnak.

6. PÉLDA

Egy 50 literes tartályban eperjoghurt készült. A tartály tele van. A gyümölcsjoghurtokat általában műanyag dobozokban árusítják. Hány doboz joghurt készíthető ebből a mennyiségből, ha egy dobozba $1\frac{1}{4}$ dl kerül?

Megoldás

Először váltsuk át a mennyiségeket azonos mértékegységre: 50 liter = 500 dl.

Ezután azt kell kiszámítani, hogy 500-ban hányszor van meg az $\frac{5}{4}$.

$500:\frac{5}{4}=500\cdot\frac{4}{5}=\cancel{500}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}=100\cdot\frac{4}{1}=400$. Tehát 400 doboz joghurt készíthető.

Az osztás műveletét törtvonal felhasználásával is felírhatjuk.

$\frac{4}{5}:\frac{3}{2}=\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{2}}$. Ezt az alakot emeletes törtnek nevezzük.

A törtvonalak hossza, esetleg vastagsága mutatja, melyik a fő törtvonal. Az itt látható két emeletes törtben ugyanazok a számok szerepelnek, de mégis más lesz a tört értéke.

$$\dfrac{3}{\frac{4}{5}}$$

Az első tört esetében egész számot osztottunk törttel.

$$\dfrac{3}{\frac{4}{5}}=3:\frac{4}{5}=3\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{4}.$$

$$\dfrac{\frac{3}{4}}{5}$$

A második törtnél egy törtet osztottunk egésszel.

$$\dfrac{\frac{3}{4}}{5}=\frac{3}{4}:5=\frac{3}{20}.$$

Emeletes tört alakban írt műveletek elvégzésekor írjuk át a törteket az osztás műveletjel segítségével, s ha szükséges, használjunk zárójeleket is!

7. PÉLDA

Melyik nagyobb: $A=\dfrac{\frac{10}{2}}{5}$ vagy $B=\dfrac{10}{\frac{2}{5}}$?

Megoldás

$A=\dfrac{\frac{10}{2}}{5}=\frac{10}{2}:5=1$; $B=\dfrac{10}{\frac{2}{5}}=10:\frac{2}{5}=10\cdot\frac{5}{2}=25$

Tehát: $B>A$.

4. TÖRTEK SZORZÁSA, OSZTÁSA II.

FELADATOK

1. Válaszolj a kérdésekre!

a) Melyik számnak nincs reciproka?

b) Melyik az a szám, amelyik megegyezik a reciprokával?

c) Melyek azok a pozitív számok, amelyek reciproka kisebb 1-nél?

2. Számítsd ki

a) 12-nek a $\frac{3}{4}$ részét;

b) $\frac{5}{6}$-nak az $\frac{1}{3}$ részét;

c) $4\frac{2}{7}$-nek az $\frac{5}{3}$ részét;

d) $\frac{3}{2}$-nek a $\frac{6}{7}$ részét;

e) $\frac{8}{3}$ $\frac{15}{4}$ részének a $\frac{3}{2}$-szeresét;

f) $\frac{15}{14}$ hatodrészének a $\frac{2}{3}$-szorosát;

g) $\frac{8}{7}$ háromnyolcadának a $\frac{3}{8}$-szorosát!

3. Melyik nagyobb?

a) 20 km $\frac{3}{5}$ része vagy 9000 m $\frac{6}{5}$ része?

b) 2 óra $\frac{3}{8}$ része vagy 144 perc $\frac{5}{12}$ része?

c) $\frac{8}{5}$ liter $\frac{7}{8}$ része vagy 42 dl $\frac{3}{7}$ része?

d) 350 kg $\frac{5}{7}$ része vagy $\frac{4}{5}$ tonna $\frac{1}{5}$ része?

4. Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi törteket!

a) $\dfrac{4}{\frac{2}{7}}$; *b)* $\dfrac{1\frac{5}{6}}{3}$; *c)* $\dfrac{\frac{15}{8}}{5}$; *d)* $\dfrac{12}{\frac{3}{8}}$;

e) $-\dfrac{-\frac{35}{11}}{5}$; *f)* $\dfrac{2\frac{11}{12}}{\frac{7}{8}}$; *g)* $\dfrac{\frac{-24}{19}}{\frac{54}{-57}}$; *h)* $\dfrac{63}{9\frac{1}{3}}$.

5. Válaszd ki, melyik műveleteknél lehet egyszerűsíteni a művelet elvégzése előtt! A műveleteket írd le a füzetedbe és végezd el! Ahol lehet, mindenhol egyszerűsíts!

a) $\frac{3}{16}+\frac{2}{15}$; *b)* $\frac{3}{25}\cdot\left(-\frac{4}{21}\right)$;

c) $11\cdot\frac{2}{77}$; *d)* $5-\frac{2}{25}$;

e) $\frac{14}{15}-\left(-\frac{3}{7}\right)$; *f)* $\frac{3}{7}\cdot\frac{21}{4}+\frac{6}{5}$;

g) $\left(-\frac{4}{5}\right):\left(-\frac{5}{2}\right)$; *h)* $3\frac{3}{7}:\frac{2}{9}$.

6. Egy almáskertben délelőtt eladták egy nagy láda alma $\frac{1}{3}$ részét. Délután a ládában maradt mennyiség $\frac{3}{5}$ részét értékesítették. A délután eladott mennyiség 60 kg volt.

a) A teljes láda hányadrészét adták el a délutáni időszakban?

b) Mennyi alma volt eredetileg a ládában?

7. A harmincfős osztály $\frac{3}{5}$-e Bertára szavazott, amikor meg kellett szervezni a korcsolyázást. Hányan nem szavaztak Bertára?

8. Szofi a 45 perces óra elején nagyon figyelt, de aztán kicsit elfáradt, és az óra $\frac{2}{9}$-ed részén rajzolgatott. Utána az óra végéig újra figyelt. Hány percig figyelt Szofi az órán?

II. 5. TÖRTEK TIZEDES TÖRT ALAKJA

Az előző leckékben már láttuk, hogy egy számnak többféle alakja is lehet. Ebben a leckében a tanult számok tizedes tört alakjával foglalkozunk.
A tizedes törtek használata hétköznapjainkban nagyon elterjedt, mivel a helyi értékes írásmód használatával az összeadás és a kivonás sokkal gyorsabban elvégezhető.
Példa egy tizedes tört alakú szám helyi értékes felbontására:
$6540{,}103 = 6 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}01 + 3 \cdot 0{,}001$

1. PÉLDA

Helyezzük el az alábbi számokat egy helyiérték-táblázatban!
a) 2,1; *b)* 43,75; *c)* 0,625; *d)* 1234,56; *e)* 103,05

Megoldás

Szám	Tízezresek	Ezresek	Százasok	Tízesek	Egyesek	Tizedek	Századok	Ezredek
2,1					2	1		
43,75				4	3	7	5	
0,625					0	6	2	5
1234,56		1	2	3	4	5	6	
103,05			1	0	3	0	5	

Milyen kapcsolat van az eddig tanult számok és a tizedes tört alakú számok között?
Egy tizedes tört alakú számot könnyű átírni közönséges tört alakba.

2. PÉLDA

Írjuk fel a 1. példában megadott számokat közönséges tört alakban!

Megoldás

a) $2{,}1 = 2 + \frac{1}{10} = \frac{21}{10}$;

b) $43{,}75 = 43 + \frac{7}{10} + \frac{5}{100} = 43 + \frac{70}{100} + \frac{5}{100} = \frac{4375}{100} = \frac{175}{4}$;

c) $0{,}625 = 0 + \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000} = 0 + \frac{600}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000} = \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$;

d) $1234{,}56 = 1234 + \frac{5}{10} + \frac{6}{100} = \frac{123\,456}{100} = \frac{30\,864}{25}$;

e) $103{,}05 = 103 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100} = \frac{10\,305}{100} = \frac{2061}{20}$.

Igaz-e az állítás fordítva? Felírható-e tizedes tört alakban minden közönséges tört vagy vegyes tört alakban megadott szám?

3. PÉLDA

Írjuk fel tizedes tört alakban a következő számokat!

a) $\frac{3}{2}$; *b)* $\frac{7}{25}$; *c)* $2\frac{5}{8}$; *d)* $\frac{3}{7}$; *e)* $\frac{5}{6}$.

Megoldás

Az első három törttel könnyebb dolgunk van. Mindhárom törtet tudjuk úgy bővíteni, hogy a nevezőben 10, 100 vagy 1000 szerepeljen.

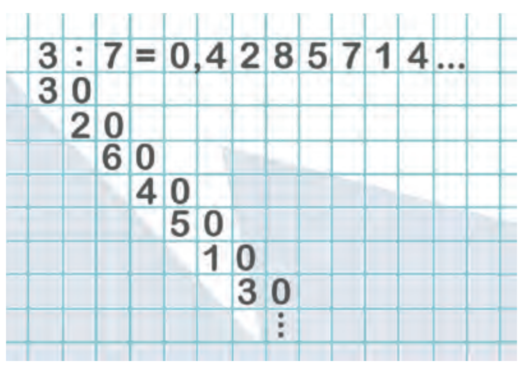
a) $\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1{,}5$;

b) $\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0{,}28$;

c) $2\frac{5}{8} = \frac{21}{8} = \frac{2625}{1000} = 2{,}625$ vagy $2\frac{5}{8} = 2 + \frac{5}{8} = 2 + \frac{625}{1000} = 2{,}625$;

d) A $\frac{3}{7}$ azonban nem bővíthető hasonló módon.

Végezzük el az osztást!



Innen ugyanúgy folytatódik, mint a tizedesvessző utáni számjegy, és újra ugyanolyan maradékokat kapunk. Tehát a hányadosban a tizedesvessző utáni számok ismétlődnek.

e) Az $\frac{5}{6}$ átírásakor is az osztás elvégzése vezet célra:

$$\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots$$

Ha két egész számot osztunk el egymással, és a hányados végtelen tizedes tört, akkor a maradékok között biztosan megjelenik egy olyan maradék, amelyik már szerepelt. Ezért ettől kezdve a hányados jegyei ugyanabban a sorrendben ismétlődnek. Ezt az ismétlődő részt szakasznak nevezzük. Jelölésekor a szakasz első és utolsó száma fölé pontot teszünk. Ekkor a tört tizedes tört alakja végtelen szakaszos tizedes tört. Az előző példa *d)* része esetén a szakasz hossza 6, jelölése: $0{,}\dot{4}2857\dot{1}$.

Az *e)* rész esetében a szakasz hossza 1. $\frac{5}{6} = 0{,}8333\ldots = 0{,}8\dot{3}$. A 8 nem tartozik a szakaszhoz.

II. 5. TÖRTEK TIZEDES TÖRT ALAKJA

Egész szám egész számmal történő osztását mindig el tudjuk végezni, ha az osztó nem 0. Előfordul, hogy a maradék 0 lesz, ekkor véges tizedes törtet kapunk. Ha nem lesz véges a tizedes tört, akkor mindig végtelen szakaszos tizedes törtet kapunk.

Összefoglalva:

Tudjuk, hogy racionális számoknak nevezzük azokat a számokat, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként. Ebben a leckében láttuk, hogy két egész szám hányadosa minden esetben felírható tizedes tört alakban.

A racionális számok tizedes tört alakja lehet:

- **egész:** pl. $\frac{8}{2} = 4$; $\frac{21}{3} = 7$; $\frac{45}{9} = 5$;
- **véges tizedes tört:** $\frac{12}{5} = 2{,}4$; $\frac{7}{4} = 1{,}75$; $\frac{8}{25} = 0{,}32$;
- **végtelen szakaszos tizedes tört:** $\frac{5}{11} = 0{,}\dot{4}\dot{5}$; $\frac{4}{9} = 0{,}\dot{4}$.

CSOPORTMUNKA

Vizsgáljátok meg, milyen nevező esetén lesz a tört alakja véges tizedes tört! Indokoljátok meg a válaszotokat!

PÁROS MUNKA

Írjátok fel az alábbi tizedes törteket tört alakban!

$0{,}3$; $0{,}405$; $2{,}16$; $0{,}\dot{3}$; $1{,}\dot{2}$; $4{,}\dot{6}$; $0{,}\dot{1}$; $8{,}\dot{8}$

Megjegyzések:

A végtelen szakaszos tizedes törtek összes számjegyét nem tudjuk leírni, ezért használjuk a szakasz két végpontja fölé írt pontot.

Gyakran a tört pontos értéke helyett annak megközelítő értékét írjuk le, és ezzel dolgozunk. Ezt minden esetben a $\approx$ jel használatával jelezzük.

A végtelen szakaszos tizedes törtet úgy olvassuk ki, hogy az egész részét kimondjuk, a tizedesvessző utáni részt a szakasz végéig felsoroljuk, és megmondjuk, hol van a szakasz.

FELADATOK

1. Melyik szám a nagyobb:
a) $2{,}79$ vagy $2{,}\dot{8}$; *b)* $2{,}5$ vagy $2{,}\dot{5}$;
c) $2{,}38$ vagy $2{,}38\dot{9}$; *d)* $2{,}18$ vagy $2{,}\dot{1}\dot{8}$?

2. Írd fel az alábbi törtek tizedes tört alakját!
a) $\frac{15}{4}$; *b)* $\frac{10}{8}$; *c)* $\frac{5}{6}$; *d)* $\frac{4}{15}$;
e) $\frac{3}{25}$; *f)* $\frac{11}{35}$; *g)* $\frac{7}{9}$; *h)* $\frac{13}{16}$.

3. Szofi és Helén a lecke megírása közben talált két „egymáshoz közeli” racionális számot. Szofi szerint mindig tud olyan racionális számot mondani, ami a kettő között van, Helén viszont úgy gondolja, hogy ez nem lehetséges. Írj két „egymáshoz közeli” racionális számot, és próbáld ellenőrizni Szofi és Helén állítását! Melyik lánynak van igaza? Válaszodat indokold!

4. Határozd meg számológép segítségével a $\frac{13}{9}$ és $\frac{16}{9}$ tizedes tört alakját! Milyen érdekességet vettél észre? Mi a magyarázata?

5. Vizsgáld meg a 99 nevezőjű törtek tizedes tört alakját. A számításhoz a *tanárod utasítása szerint* használd a számológépedet vagy a mobiltelefonodat! Írj a füzetedbe legalább öt példát! Fogalmazd meg tapasztalataidat!

6. Az előző feladat alapján próbáld felírni a
a) $0{,}\dot{4}6\dot{8}$; *b)* $2{,}\dot{5}1\dot{5}$; *c)* $616{,}\dot{1}6\dot{1}$
törteket közönséges tört vagy vegyes tört alakban!

6. MŰVELETEK VÉGES TIZEDES TÖRTEKKEL

A tizedes törtekkel végzett műveletek során azt használjuk ki, hogy a számokat helyiértékes alakban írjuk fel.

Az összeadás és kivonás műveletének elvégzésekor a számokat úgy írjuk egymás alá, hogy az azonos helyi értékek egymás alá kerüljenek. Összeadás során egyszerre több tagot is leírhatunk, kivonásnál viszont ezt nem tehetjük meg.

1. PÉLDA

A lakásunk három szobáját újraparkettáztatjuk. A nappali 23,7 négyzetméter, a hálószoba 16,6 négyzetméter, a gyerekszoba 18,8 négyzetméter alapterületű. Hány négyzetméter padlót kell parkettázni?

Megoldás

$$\begin{array}{r} 23{,}7 \\ 16{,}6 \\ +\ 18{,}8 \\ \hline 59{,}1 \end{array}$$

Tehát összesen 59,1 négyzetmétert kell parkettázni.

2. PÉLDA

A nappali amerikai konyhás, azaz a konyha és a nappali egy térben kapott helyet. Anya azt javasolta, hogy a konyhaszekrény alatt és előtt inkább járólappal burkoltassunk. Lemérte a szükséges részt, s kiderült, hogy ez a terület 6,7 négyzetméter. Hogyan módosult a parkettázandó terület?

Megoldás

$$\begin{array}{r} 59{,}1 \\ -\ \ 6{,}7 \\ \hline 52{,}4 \end{array}$$

Tehát ebben az esetben 52,4 négyzetméter területet kell parkettázni.

A tizedes törtek írásbeli szorzásakor ugyanúgy járunk el, mint az egész számok írásbeli szorzásánál: a szorzatban annyi tizedesjegyet jelölünk ki, amennyi a szorzótényezőkben együttesen volt. Tizedes törtek osztása során annyival szorozzuk meg az osztót és az osztandót, hogy az osztó egész szám legyen, így egész számmal történő osztást végezhetünk el.

3. PÉLDA

A burkoló szakember tájékoztatása szerint parkettázásnál 10, járólapozásnál 15%-ot kell rászámolni a szükséges mennyiségre. Mennyi parkettát és mennyi járólapot kell vásárolni?

Megoldás

A szükséges parketta kiszámítása:

Számoljuk ki 52,4 négyzetméter 10%-át, majd adjuk hozzá az 52,4-hez!

$$\begin{array}{r} 52{,}4 \cdot 0{,}1 \\ \hline 5{,}24 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 52{,}4 \\ +\ \ 5{,}24 \\ \hline 57{,}64 \end{array}$$

Tehát 57,64 négyzetméter parkettára van szükségünk, de mivel parkettából csak egész négyzetmétert vásárolhatunk, ezért 58 négyzetmétert kell megvennünk.

II. 6. MŰVELETEK VÉGES TIZEDES TÖRTEKKEL

A járólap kiszámítása:

$$\begin{array}{r} 6{,}7 \cdot 0{,}15 \\ 67 \\ 335 \\ \hline 1{,}005 \end{array}$$

Körülbelül $6{,}7 + 1{,}005 \approx 6{,}7 + 1 = 7{,}7$ négyzetméter járólapra van szükség.

A boltban kiderült, hogy a család által kiválasztott járólap csak 1,4 m^2-es kiszerelésben kapható. Hány doboz szükséges a kívánt felület burkolásához?

Számítsuk ki, hányszor van meg a 7,7-ben az 1,4!

$$7{,}7 : 1{,}4 = 77 : 14 = 5{,}5$$
$$70$$

Mivel fél doboz nem vásárolható, ezért $5{,}5 \approx 6$ doboz járólapot kell vásárolnunk.

JÁTÉK

Az alábbi társasjátékot kis csoportokban játszhatjátok.

A játék célja és menete:

Oldjátok meg a feladatokat és szerezzetek minél több pontot! Válasszatok saját stratégiát, és alakítsátok úgy a pályátokat, ahogy a legjobbnak gondoljátok!

Játékszabályok:

A játékot legfeljebb négyen játszhatjátok. Minden csapathoz kell egy játékmester, aki a játékot felügyeli és a feladatokat javítja.

Válasszatok ki egy kerek startmezőt, és tegyétek rá a bábutokat! Mindenki dobjon egyet a dobókockával, és lépjen annyit, amennyit dobott! A lépés iránya tetszőleges: jobbra, balra, lefele vagy felfele is mehettek. (Átlósan nem léphettek.) A kiinduló mezőkre többször nem léphettek.

Minden mezőhöz egy feladat tartozik, aminek megoldásáért pontokat kaphattok. A zöld mezőn 1, a narancssárgán 2, a citromsárgán 3 pontot szerezhettek.

Egy-egy feladatot maximum két perc alatt kell megoldanotok. Aki hibás választ adott, nem kap pontot. A játék hét körből áll, így mindenki hét feladatot kap.

Zöld:

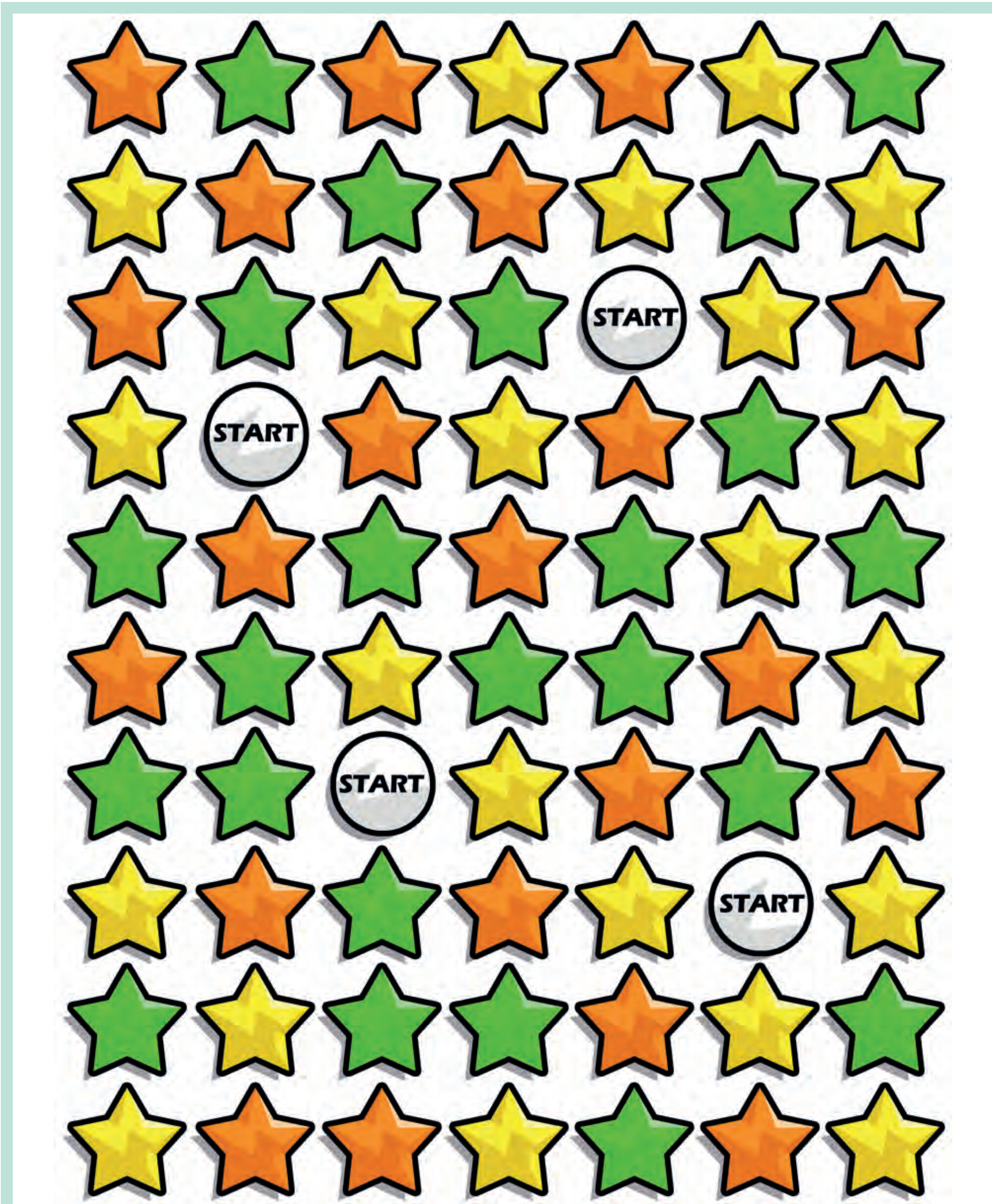
1. $8{,}367 + 13{,}69 + 254{,}28 =$
2. $23{,}58 \cdot 1{,}25 =$
3. $183{,}4 - 5{,}136 =$
4. $56{,}556 : 1{,}27 =$
5. $19{,}05 + 3{,}605 + 176{,}8 =$
6. $143{,}39 - 17{,}658 =$
7. $256{,}142 - 187{,}18 =$
8. $106{,}12 \cdot 3{,}8 =$
9. $93{,}71 + 104{,}235 + 0{,}08 =$
10. $128{,}604 : 2{,}1 =$
11. $583{,}27 - 49{,}528 =$
12. $372{,}28 \cdot 5{,}6 =$

Narancssárga:

1. $942{,}017 - 35{,}63 + 142{,}005 =$
2. $93{,}87 \cdot (-37{,}4) =$
3. $75{,}84 - 93{,}128 + 19{,}077 =$
4. $(-821{,}106) : 1{,}8 =$
5. $28{,}104 - 241{,}17 + 133{,}26 =$
6. $-0{,}682 - 34{,}56 - 92{,}259 =$
7. $(-318{,}06) \cdot (-24{,}79) =$
8. $63{,}87 - 92{,}506 + 143{,}2 =$
9. $(-424{,}32) : (3{,}2) =$
10. $3{,}7 \cdot 2{,}9 \cdot 4{,}34 =$
11. $-296{,}07 + 63{,}58 + 24{,}096 =$
12. $164{,}0604 : 2{,}1 =$

Sárga:

1. $3{,}57 \cdot (-13{,}8) + 6{,}7 =$
2. $9{,}48 : 1{,}2 - 104{,}17 =$
3. $34{,}8 - 9{,}03 \cdot 3{,}6 =$
4. $-23{,}71 + 9{,}06 : 2{,}4 =$
5. $(3{,}46 + 9{,}127) : 0{,}2 =$
6. $(-37{,}83) \cdot 5{,}4 + 93{,}07 =$
7. $2{,}27 + 7{,}824 : 2{,}4 =$
8. $19{,}045 + 3{,}59 \cdot (-8{,}1) =$
9. $(-4{,}7) \cdot (-6{,}35) - 23{,}18 =$
10. $305{,}66 : (-3{,}1) + 8{,}37 =$
11. $(-9{,}26) + 4{,}38 \cdot (-2{,}9) =$
12. $86{,}03 : 1{,}4 - 253{,}194 =$


START
START
START
START

II. 6. MŰVELETEK VÉGES TIZEDES TÖRTEKKEL

Segítségek:

Ha egy feladattal nem boldogultok egyedül, kétféle segítség közül választhattok:

Jelentkeztek és segítséget kértek a tanárotoktól.

Számológépet használtok.

Segítség igénybevétele esetén a helyes megoldásért csak 1 pont jár. Ha egyetlen segítséget sem használtok a játék során, végül 2 jutalompontot kaptok.

FELADATOK

1. Végezd el az összeadásokat és kivonásokat!

a) $3{,}14 + 3{,}14 + 3{,}14 - 8{,}42$;
b) $3{,}14 + 2{,}72 + 1{,}41$;
c) $2{,}236 - 1{,}732$;
d) $10{,}02 - 3{,}98 + 1{,}74$.

2. Végezd el a szorzásokat!

a) $23{,}2 \cdot 13{,}4$ *b)* $10{,}01 \cdot (-3{,}14)$;
c) $1{,}9 \cdot 2{,}1$; *d)* $2{,}9 \cdot 3{,}1$;
e) $3{,}9 \cdot 4{,}1$; *f)* $8{,}9 \cdot 9{,}1$.

3. Végezd el az osztásokat! Legfeljebb két tizedes jegyig számolj!

a) $10 : 3{,}14$; *b)* $12{,}25 : 3{,}5$;
c) $2{,}25 : 1{,}5$; *d)* $124{,}23 : 11{,}8$.

4. Végezd el a műveleteket!

a) $2{,}72 \cdot 2{,}72 - 0{,}3984$; *b)* $3{,}14 \cdot 12{,}25 : 3{,}5$;
c) $3 - 1{,}732 \cdot 1{,}732$; *d)* $3{,}14 \cdot 3{,}14 : 10 - 1$.

5. Egy amerikai autó fogyasztási adatáról azt írja az interneten egy felhasználó, hogy 22 MPG, ahol az MPG a mérföld per gallon rövidítése. Ez azt jelenti, hogy 1 gallon üzemanyaggal 22 mérföldet tud megtenni.

1 gallon ≈ 3,785 liter,
1 mérföld ≈ 1609,3 m.
Az eredményeket kerekítsd két tizedesjegyre!

a) 22 mérföldet hány liter üzemanyaggal tud megtenni?
b) Hány kilométert tud megtenni 1 gallon üzemanyaggal?
c) 100 km-en hány liter üzemanyagot fogyaszt az autó?
d) Hogyan kaphatnád meg a *c)* feladatban kiszámolt fogyasztási adatot a 22-ből egyetlen művelet segítségével?

6. Ha a benzin ára 2016-ban 1,98 USD/gallon volt és 1 USD 292,9 Ft, akkor

a) hány forint egy liter benzin az USA-ban?
b) az előző feladatban szereplő autóval menynyibe kerül 100 km-t autózni?

FELADATOK

Levente éppen elvégezte az egyetemet, amikor meghallotta a hírt, hogy hatalmas farmot örökölt kocsándi nagybátyjától. Ismerte a terepet, rengeteg szép nyarat töltött ott.
Szeme előtt megjelent a kis tó, a kecskék és a frissen fejt tej, a hat ló, melyeken annyira szeretett lovagolni a környékbeli gyerekekkel, s a távoli méhkaptárak a sokat dolgozó méhekkel.
Levente három napig gondolkodott, mitévő legyen. Adja el az egész farmot, vagy hagyjon itt csapot papot, költözzön Kocsándra, és folytassa, amit a nagybátyja elkezdett? Megbeszélte a feleségével, Jankával, és úgy döntöttek, elutaznak Kocsándra.
Mikor megérkeztek, egyenesen a szomszédokhoz – Bálint bácsihoz és Anna nénihez – mentek, akik mindeddig gondját viselték az állatoknak. Leventéék számtalan kérdést tettek fel nekik, hogy lássák, fenn tudnák-e tartani a gazdaságot.
Számold ki, a szomszédoktól szerzett információk alapján mennyi bevételre és kiadásra számíthatnak harminc nap alatt!

1. Bálint bácsi büszkén mesélte, hogy az összes anyakecske együtt napi 56 liter tejet ad, amit könnyedén el tudnak adni a piacon. Azt is hozzátette, hogy az összes kecskének csak a $\frac{8}{11}$ része ad tejet.

a) Hány kecske él a farmon, ha tudjuk, hogy egy kecske napi $3\frac{1}{2}$ liter tejet ad?

b) Hány forintot kereshetnek Leventéék a tej eladásából naponta, ha 1 liter kecsketej ára 480 Ft, de a bevétel $\frac{1}{12}$ részét ki kell fizetniük a piacon helypénzre?

c) Egy kecske napi takarmányozása 90 Ft. Számold ki, hányad része a kecskék napi takarmányozása a kecsketejből származó napi bevételnek!

2. A hat ló békésen legelészett a karámban. A lovász már készítette a nyergeket a délutáni lovagláshoz. A futószáras oktatás 2000 Ft, az osztályban lovaglás 3000 Ft, a tereplovaglás pedig 6000 Ft minden felnőttnek. A gyerekek ennek csak a $\frac{4}{5}$ részét fizetik.

a) Mennyi heti bevételre számíthat Levente és Janka, ha tizenkét gyerek jár hozzájuk

lovagolni, hetente kétszer? A gyerekek harmada futószáron, a többiek már osztályban lovagolnak.

b) Tereplovaglásra minden szombat délelőtt 4 felnőtt jár. Mennyi lesz az ebből származó havi bevétel?

c) Egy ló napi takarmányozásához 8 kg széna és feleennyi abrak kell. A 400 kg-os szénabála 6000 Ft, egy mázsa abrak pedig ennek a $\frac{11}{12}$ részébe kerül. Számold ki, hány forintot kell költeniük a lovak takarmányozására havonta!

3. „Hálás állatok a méhek” – dicsérte őket Bálint bácsi. Egy kaptár átlagosan évi 70 kg mézet termel. A méz ötöde hársméz, $\frac{3}{35}$ része repceméz, $\frac{5}{14}$ része akácméz és a maradék virágméz.

a) Mennyi mézet gyűjthetnek az egyes fajtákból egy év alatt, ha a farmon három kaptár van?

b) Hány forint bevételük van a mézből évente, ha a piacon 1 kg repcemézért 1600 Ft-ot, a virágmézért ennek a $\frac{9}{8}$-szorosát, a hársmézért az $\frac{5}{4}$-szeresét és az akácmézért a $\frac{3}{2}$-szeresét kapják?

4. Anna néni büszkén mutatta meg nekik a baromfiudvart. Közben összeszedte a tojásokat is, aminek darabját 35 Ft-ért lehet eladni a piacon. Arra is figyelmeztette őket, hogy minden este zárják be a tyúkokat, nehogy a környéken garázdálkodó róka elvigyen közülük párat.

a) A baromfiudvar lakóinak $\frac{4}{6}$ része tojó tyúk, $\frac{2}{7}$ része jérce és 2 kakas is van. Hányan laknak a baromfiudvarban?

b) Egy tyúk heti hat tojást tojik. Mennyi bevétel származhat a tojások eladásából, ha a bevétel $\frac{1}{12}$ részét ki kell fizetni a piacon helypénzre?

5. Egy baromfi napi takarmányszükséglete 12 dkg, de a jérce ennek csak a $\frac{2}{3}$ részét fogyasztja. A vegyes takarmány $\frac{2}{25}$ része kukorica, $\frac{27}{100}$ része búza, $\frac{3}{10}$ része árpa, $\frac{1}{10}$ része zab, $\frac{3}{20}$ része napraforgó és a maradék korpa.

a) Számold ki, melyik összetevőből hány dkg-ot tartalmaz 1 kg vegyes takarmány!

b) Hány forintot kell havonta a baromfik etetésére költeniük, ha 1 kg vegyes takarmány 65 forintba kerül?

6. A farmra kéthavonta kijár az állatorvos, aki a család régi ismerőse, így a vizitdíj $\frac{1}{6}$-át nem számolja fel. Hány forintot kell erre havonta átlagosan félretenni, ha egy látogatásért hivatalosan 14 700 forintot kér el?

7. Készíts összesítő táblázatot a bevételekből és a kiadásokból!

a) Mennyi a havi bevétel?

b) Mennyi a havi kiadás, ha a víz-, áram-, és gázszámlára, illetve az egyéb kiadásokra havi 90 000 forintot számolhatnak átlagosan?

c) A számításaid alapján fenntartható-e ez a gazdaság? (Van-e annyi bevétel, amely a működtetéshez, megélhetéshez szükséges?)

8. ZÁRÓJELFELBONTÁSOK, ÖSSZETETT MŰVELETEK

A műveletek elvégzése során különös figyelmet kell fektetnünk a műveletvégzés sorrendjére.

- **Ha egy műveletsort kell elvégezni, akkor egyenrangú műveletek esetében balról jobbra haladunk.**

1. PÉLDA

$$1,3 + (+2,5) - (+1,25) + (+2,4) - (-5,05) = +3,8 - 1,25 + 2,4 + 5,05 =$$
$$= +2,55 + 2,4 + 5,05 = +4,95 + 5,05 = 10$$

- **A szorzás és osztás úgynevezett magasabbrendű művelet, ezért egy műveletsorban először ezt vagy ezeket végezzük el.**

2. PÉLDA

$$45 + 7 \cdot (-5) - 18 + 135 : 9 = 45 + (-35) - 18 + 15 = 7$$

- **A zárójel módosíthatja a műveletek sorrendjét! Először a zárójelben lévő műveletet kell elvégezni. A törtvonal zárójelet helyettesíthet, ezért körültekintőnek kell lennünk abban az esetben is, ha nincs feltüntetve a zárójel.**

3. PÉLDA

$$6 \cdot (5,2 + 7,8) - 48 : (13,6 - 4,4 + 2,8) = 6 \cdot 13 - 48 : 12 = 78 - 4 = 74$$

FELADATOK

1. Melyik az a szám, amelyik

a) $\frac{1}{4}$ és $\frac{3}{7}$ összegénél $\frac{9}{14}$-del több?

b) $\frac{5}{6}$-dal több, mint $\frac{4}{5}$ és $\frac{3}{4}$ különbsége?

c) $1\frac{1}{7}$-szerese a $\frac{7}{8}$ és az $\frac{5}{6}$ összegének?

d) a $2\frac{1}{4}$ és a $\frac{3}{10}$ hányadosánál $\frac{7}{6}$-dal kisebb?

e) $\frac{2}{7}$ és $\frac{12}{7}$ összegének a fele?

f) $\frac{10}{3}$ és $2\frac{2}{6}$ különbségének a $\frac{19}{20}$ szorosa?

2. Hasonlítsd össze a két kifejezést, és tedd ki a megfelelő relációs jelet a füzetedben (<; >; =)!

a) $\frac{2}{3} - \left(1,3 - \frac{5}{7}\right)$ $\quad \frac{2}{3} - 1,3 + \frac{5}{7}$;

b) $\frac{2}{3} - 1,3 - \frac{5}{7}$ $\quad \frac{2}{3} - \left(1,3 - \frac{5}{7}\right)$;

c) $\frac{2}{3} + \left(1,3 - \frac{5}{7}\right)$ $\quad \frac{2}{3} + 1,3 + \frac{5}{7}$;

d) $\frac{2}{3} + 1,3 - \frac{5}{7}$ $\quad \frac{2}{3} + \left(1,3 - \frac{5}{7}\right)$.

3. Válaszd ki a helyes zárójelfelbontást, majd végezd el a műveleteket!

a) $3{,}4-\left(\frac{2}{7}+\frac{6}{5}\right)$ $\quad 3{,}4-\frac{2}{7}+\frac{6}{5}$ vagy $3{,}4-\frac{2}{7}-\frac{6}{5}$;

b) $15{,}95-\left(\frac{6}{15}-4{,}02\right)$ $\quad 15{,}95-\frac{6}{15}+4{,}02$ vagy $15{,}95-\frac{6}{15}-4{,}02$;

c) $2\cdot\left(7{,}08-\frac{34}{10}\right)-5{,}6$ $\quad 2\cdot 7{,}08-\frac{34}{10}-5{,}6$ vagy $2\cdot 7{,}08-\frac{68}{10}-5{,}6$;

d) $5-4\cdot\left(\frac{7}{8}-5{,}25\right)$ $\quad 5-4\cdot\frac{7}{8}-4\cdot 5{,}25$ vagy $5-4\cdot\frac{7}{8}+4\cdot 5{,}25$;

e) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(7-\frac{6}{5}\right)-\left(-\frac{3}{10}\right)$ $\quad -\frac{2}{3}\cdot 7-\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}-\frac{3}{10}$ vagy $-\frac{2}{3}\cdot 7+\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}+\frac{3}{10}$.

4. Hozd egyszerűbb alakra a következő emeletes törteket!

a) $\dfrac{\frac{7}{12}}{3\frac{1}{4}}$; *b)* $1+\dfrac{\frac{7}{3}}{\frac{5}{6}}$; *c)* $\dfrac{\frac{3}{4}-\frac{1}{5}}{8}$; *d)* $\dfrac{\frac{5}{6}-1{,}2}{-1{,}2+\frac{5}{6}}$;

e) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}}$; *f)* $\left(2-\frac{3}{5}\right)\cdot(-2{,}6)$; *g)* $\dfrac{\frac{1}{5}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}}$; *h)* $\dfrac{\frac{8}{3}-0{,}4}{\frac{1}{5}-\frac{4}{3}}$.

5. Hogyan szeretnéd inkább kiszámolni? Válassz az *A* és a *B* lehetőség között! Végezd is el a számolást!

a) A: $5\frac{2}{3}\cdot 11-3\frac{2}{3}\cdot 11$, B: $\left(5\frac{2}{3}-3\frac{2}{3}\right)\cdot 11$; *b)* A: $\left(\frac{25}{8}-\frac{9}{8}\right)\cdot 7$, B: $\frac{25}{8}\cdot 7-\frac{9}{8}\cdot 7$;

c) A: $(2045+985+(-30)):9$, B: $2045:9+985:9+(-30):9$;

d) A: $\frac{12}{21}\cdot 7-\frac{36}{42}\cdot 7$, B: $\left(\frac{12}{21}-\frac{36}{42}\right)\cdot 7$.

6. Mit szeretnél kapni inkább?
A: Heti 300 Ft 4 héten keresztül, és aztán az összegyűlt pénz duplája?
B: Az első héten 300 Ft és aztán minden héten az előző duplája?

7. Számítsd ki az eredményt!

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\frac{1}{128}+\frac{1}{256}+\frac{1}{512}$;

b) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\frac{1}{256}-\frac{1}{512}$;

c) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$;

d) $\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)$.

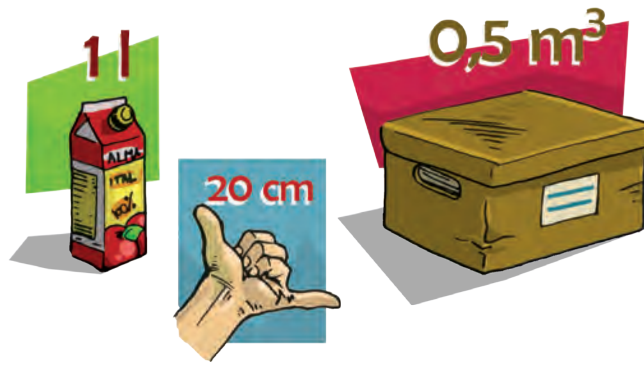
9. NAGY SZÁMOK ÉS A HATVÁNYALAK

A hétköznapjainkban többnyire olyan számokkal találkozunk, amelyeknek nagyságáról van elképzelésünk.

CSOPORTMUNKA

Keressetek olyan példákat (tárgyakat, élőlényeket, jelenségeket), amelyekre körülbelül jellemzőek ezek a mennyiségek!

a) 1 liter; *b)* 50 kg;
c) 20 cm; *d)* 150 km;
e) 10 080 perc; *f)* 130 km/h;
g) 0,5 m^3.



Vannak olyan mennyiségek, amelyek jellemzéséhez nagyon nagy számokat kell használnunk. Például az informatikában, a csillagászatban a távolságok megadásánál vagy az atomok számának meghatározásánál gyakran használunk ilyeneket.

Szám	Név
$10 = 10^1$	tíz
$100 = 10^2$	száz
$1000 = 10^3$	ezer
$10\,000 = 10^4$	tízezer
$100\,000 = 10^5$	százezer
$1\,000\,000 = 10^6$	millió
$10\,000\,000 = 10^7$	tízmillió
$100\,000\,000 = 10^8$	százmillió
$1\,000\,000\,000 = 10^9$	ezermillió = milliárd
$10\,000\,000\,000 = 10^{10}$	tízmilliárd
$100\,000\,000\,000 = 10^{11}$	százmilliárd
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	1000 milliárd = billió

Próbáljuk rendszerezni az eddigieket!
Írjunk egymás alá olyan számokat, amelyek 1-gyel kezdődnek és mindig eggyel több 0-val folytatódnak!
Bár a sort tetszőlegesen sokáig folytathatnánk, sőt nevet is tudnánk adni ezeknek a nagy számoknak, egy idő után egyre nagyobb lenne az esélye annak, hogy eltévesztjük a 0-k számát. Keressünk egyszerűbb leírási módot!
Használjuk fel azt, hogy az egymás alatt lévő számok úgy keletkeztek, hogy az előző számot megszoroztuk 10-zel, azaz a 10 többszöri összeszorzásával kapjuk meg a fenti számokat! Most azt is látjuk, hogy hány darab tízest kell összeszorozni ahhoz, hogy megkapjuk a kívánt számot. Ez a forma azonban még mindig nagyon hosszú, ezért bevezetünk egy új jelölést, amivel leírhatjuk ezeket a szorzásokat:

$$100 = 10 \cdot 10 = 10^2 \text{ (tíz a másodikon vagy tíz a négyzeten);}$$
$$1000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^3 \text{ (tíz a harmadikon vagy tíz a köbön).}$$

Ha tovább folytatnánk a sort, akkor a százmilliárdot a következőképpen írnánk fel:

$$100\,000\,000\,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^{11} \text{ (tíz a tizenegyediken).}$$

Eddig tíz szorzataival dolgoztunk, nincs akadálya annak sem, hogy más számokat szorozzunk össze. Például:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 \text{ (kettő az ötödiken).}$$

II. 9. NAGY SZÁMOK ÉS A HATVÁNYALAK

Ha egy számot többször szorzunk önmagával, akkor azt rövidebb alakban, úgynevezett hatványalakban adjuk meg.

A hatványalakban több szám is szerepel. Alul található az alap, vagyis az a szám, amelyet önmagával szorzunk. Az alap jobb felső sarkában, kicsit kisebb betűvel szerepel a kitevő, ami azt mutatja, hogy hányszor szorozzuk össze az alapot.
A hatvány alapja bármilyen eddig tanult szám lehet, a kitevő pedig természetes szám.

Például:

hatvány vagy hatványalak

Ennek a hatványnak az értéke:

$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

1. PÉLDA

Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!

a) 2^4; *b)* $(-3)^5$; *c)* $\left(\frac{2}{5}\right)^6$; *d)* $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$.

Megoldás

a) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;

b) $(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-243)$;

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{64}{15\,625}$;

d) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$.

2. PÉLDA

Számítsuk ki az alábbi hatványok értékét!
Figyeljük meg a hatványok értékeinek változását a zárójelek áthelyezése során!

a) $(-2)^5$; *b)* -2^5; *c)* $(-2)^4$; *d)* -2^4.

Megoldás

a) $(-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$;

b) $-2^5 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -32$;

c) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$;

d) $-2^4 = -(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = -16$.

9. NAGY SZÁMOK ÉS A HATVÁNYALAK II.

3. PÉLDA

A téli betegségek nagy többségét az influenzavírus egyik fajtája okozza. A nagyvárosokban gyorsan terjed a vírus, hisz sok ember él kis helyen.
Egy nagyvárosban egy januári hétfőn 300 influenzás beteget regisztráltak. A vírus naponta megkétszerezi a betegek számát.
Hányan lettek betegek a 10. napon?

Megoldás

A megbetegedések száma:

Az első napon	300
A második napon	$300 \cdot 2 = 600$
A harmadik napon	$300 \cdot 2 \cdot 2 = 300 \cdot 2^2 = 1200$
A negyedik napon	$300 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 300 \cdot 2^3 = 2400$
Az ötödik napon	$300 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 300 \cdot 2^4 = 4800$

Ezek alapján a 10. napon megbetegedettek száma:

$$300 \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2)}_{\text{9 db 2-es szorzó}} = 300 \cdot 2^9 = 300 \cdot 512 = 153\,600$$

Meglepő lehet ez a nagy szám, de az 1-nél nagyobb számok hatványai gyorsan nőnek. (Körülbelül ennyi ember lakik Miskolcon.)

Van néhány speciális hatványalak, amelyek értékét érdemes külön megadni.

1. Minden szám első hatványa egyenlő a számmal.
   Például: $5^1 = 5$; $0^1 = 0$.
2. Minden 0-tól különböző szám nulladik hatványa = 1.
   Például: $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$.

Az egyetlen hatványalakban írt szám, amely gondot okoz, az a 0^0.

$0^0 = 0$ lenne, ha a hatványozás alapjához igazodnánk, hiszen 0-nak minden hatványa 0.

$0^0 = 1$ lenne, ha a hatványozás kitevőjéhez igazodnánk, hiszen minden más szám 0-dik hatványa 1.

A 0^0 értékét nem értelmezzük.

II. 9. NAGY SZÁMOK ÉS A HATVÁNYALAK

Érdekességek

Tudod, honnan származik a Google keresőszoftver neve?
Az alkotók valamilyen módon utalni szerettek volna arra, hogy a program segítségével rendkívül nagyszámú információhoz lehet hozzájutni. Azt találták ki, hogy a 10^{100} alkalmas lehet e nagyságrend érzékeltetésére. Mivel az említett szám elnevezése a googol – ahhoz hasonlóan, ahogy a 10^6-t milliónak nevezzük –, ezért az általuk létrehozott rendszert is Googolnak szerették volna elnevezni. Végül azonban valaki belejavított a névadásba, így lett a szoftver és később a cég neve Google.

CSOPORTMUNKA

Keresd meg, hogyan lehet hatványokat írni a számológépeddel!

KUTATÓMUNKA

Számolj a mobiloddal! Nézd meg, hogyan írható be a számok hatványalakja!

FELADATOK

1. Írd fel szorzat alakban a hatványokat, és számítsd ki a hatványértékét!

a) 3^4 2^8 11^3 $(-5)^4$ -5^4 $(-6)^3$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ $\left(\frac{5}{3}\right)^4$ $\frac{7^3}{4}$ $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$ $-\left(\frac{11}{8}\right)^2$.

2. Írd rövidebb alakba a következő szorzatokat!

a) $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$; *b)* $2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$;

c) $2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;

d) $(-3) \cdot 3 \cdot 3 \cdot (-3) \cdot 3 \cdot 3$.

3. Melyik hatványok egyenlők egymással?

a) 1^9; *b)* -1^3; *c)* $(-1)^6$; *d)* $(-1)^5$; *e)* 1^{10}.

4. Írd fel az alábbi hatványokat szorzatalakban, majd csoportosítsd őket aszerint, hogy pozitívak vagy negatívak!

a) 3^4; *b)* -5^3; *c)* $(-2)^5$; *d)* $(-3)^6$; *e)* -7^4.

5. Ha egy vírus egy olyan számítógépet fertőz meg, amelyiknek internet-összeköttetése is van, akkor fél óra alatt három további számítógépre küldi át a vírust. A vírusos gépek fél óra múlva ismét három-három gépet fertőznek meg.

a) Hány gép fertőződik meg egyetlen délelőtt folyamán (8.00-tól 12.00-ig)?

b) Hány gép fertőződik meg reggel 8-tól este 8-ig? Próbáld meg kiszámolni a számológépeddel! Olvasd ki a kapott számot!

c) Hány jegyű ez a szám? A Föld összlakosságánál kisebb vagy nagyobb számot kaptál?

6. A kisballagi tavon megtelepedett a zöld alga. Megfigyelték, hogy az algával borított terület nagysága minden nap megkétszereződik. Október 25-ére éppen teljesen beborította az zöld alga a teljes tavat.

a) Hányadikán borította be a kisballagi tó felszínének felét a zöld alga?

b) Hányadikán borította be a kisballagi tó felszínének negyedét a zöld alga?

c) Hányadikán borította be a kisballagi tó felszínének kevesebb mint ezredrészét a zöld alga?

7. A kettő hatványai fontos szerepet játszanak az informatikában. Nézz utána, hogy 1 byte hány bit, és hogy 1 kilobyte hány byte!

10. A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI I.

Milyen szabályok érvényesek hatványokkal történő műveletvégzés során?

1. PÉLDA

Írjuk rövidebb alakban a következő szorzást!

$$2^5 \cdot 2^4$$

Megoldás

A hatvány az azonos tényezőjű szorzótényezők rövidebb leírási módja, ezért írjuk fel a hatványokat szorzatként!

$$2^5 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2^9$$

Látható, hogy a tényezők száma a kitevők összege, s mivel az alapok megegyeznek, ezért egyetlen hatványként is felírhatjuk.

Az egyszerűbb alakban történő felírásnál azt használtuk ki, hogy a hatványalapok megegyeznek.

Első szabály: Azonos alapú hatványokat úgy is szorozhatunk, hogy a közös alapot a kitevők összegére emeljük.

Például: $7^3 \cdot 7^2 = 7^{(3+2)} = 7^5$.

2. PÉLDA

Fel tudjuk-e írni egyszerűbb alakban a következő osztást?

$$3^7 : 3^5$$

Megoldás

Ha ezt az osztást átírjuk tört alakba, akkor azt egyszerűsíthetjük.

$$3^7 : 3^5 = \frac{3^7}{3^5} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}} = 3 \cdot 3 = 3^2$$

Azt látjuk, hogy a számláló kitevőjéből ki kell vonni a nevező kitevőjét és az azonos alapot erre emeljük.

Ez így néha problémás lehet, mert például az alábbi osztásnál a számlálóban kevesebb tényező van, így csak négy darab tényezővel tudunk egyszerűsíteni.

$$3^4 : 3^6 = \frac{3^4}{3^6} = \frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3^2}$$

Hatványok osztásánál nagyon figyelni kell arra, hogy az osztandó és az osztó (vagy a számláló, illetve a nevező) kitevője közül melyik a nagyobb. Egyelőre a következőket jegyezzük meg!

Második szabály: Az azonos alapú hatványok osztásánál,

- **ha a számláló kitevője nagyobb, mint a nevező kitevője, akkor az osztást úgy is elvégezhetjük, hogy a számláló kitevőjéből kivonjuk a nevező kitevőjét, és a közös alapot erre a kitevőre emeljük.**

$$5^7 : 5^4 = \frac{5^7}{5^4} = 5^{7-4} = 5^3$$

- **ha a számláló kitevője kisebb, mint a nevező kitevője, akkor annyi tényezővel tudunk egyszerűsíteni, amennyi a számlálóban van.**

$$2^8 : 2^{10} = \frac{2^8}{2^{10}} = \frac{1}{2^2}$$

- **ha a számláló és a nevező kitevője egyenlő, akkor a tört értéke 1.**

$$3^7 : 3^7 = \frac{3^7}{3^7} = 1$$

II. 10. A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI I.

Ha ugyanolyan hatványokat szorzunk össze, akkor azt rövidebben hatvány hatványozásaként tudjuk felírni.

Azt láthatjuk, hogy hatvány hatványozásakor a kitevők összeszorzódnak.

Harmadik szabály: Hatványt úgy hatványozhatunk, hogy az alapot a hatványkitevők szorzatára emeljük.

3. PÉLDA

Írjuk fel egyetlen szám hatványaként: $(3^8)^4$!

Megoldás

$(3^8)^4 = 3^8 \cdot 3^8 \cdot 3^8 \cdot 3^8 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 3}_{32\text{ db}} = 3^{32} = 3^{8\cdot 4}$

Rövidebben:

$(3^8)^4 = 3^{8\cdot 4} = 3^{32}$

FELADATOK

1. Számítsd ki az alábbi műveletek eredményét!

a) $2^3 \cdot 2^2$; *b)* $5^2 \cdot 5 \cdot 5$; *c)* $10^2 \cdot 10^4$; *d)* $0{,}1^2 \cdot 0{,}1^3 \cdot 10^6$; *e)* $(-2)^3 \cdot (-2)^2$;

f) $3^4 : 3^2$; *g)* $(7^2 \cdot 7^3) : 7$; *h)* $\dfrac{11^4}{11^3}$; *i)* $\dfrac{5^5 \cdot 5^4}{5^3}$; *j)* $(3^7 : 3^5) \cdot 3^8$.

2. Írd egyszerűbb alakba a következő szorzatokat!

a) $3^8 \cdot 3^3$; *b)* $11^4 \cdot 11^5 \cdot 11^6$; *c)* $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$.

3. Írd növekvő sorrendbe!

a) $(-1)^5 \cdot (-1)^4$; *b)* $(-2)^2 \cdot (-2^4)$; *c)* $2^2 \cdot (-2)$; *d)* $\left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^3$; *e)* $\dfrac{4^4}{4^3}$; *f)* $\dfrac{3^5 \cdot 3^4}{3^7}$

4. Írd le az alábbi műveleteket, és pótold a hiányzó részeket!

a) $3^5 \cdot 3^4 = 3^{\square} \cdot 3^6$; *b)* $11^2 \cdot 11^4 \cdot 11^6 = 11 \cdot 11^{\square} \cdot 11^3$;

c) $(-2)^5 \cdot 2^4 = (-2)^{\square} \cdot 2^6$; *d)* $\dfrac{3^4 \cdot 3^8}{3^5} = 3^{\square} \cdot 3^2$;

e) $2^5 \cdot 2^6 = \dfrac{2^8 \cdot 2^9}{2^{\square}}$.

5. Melyik nagyobb:

a) $7^8 \cdot (7^4 \cdot 7)^3$ vagy $49^4 \cdot 7^6$; *b)* $-5^3 \cdot (-5)^4$ vagy $(-5)^{10} \cdot 5^3$?

6. Végezd el a lehetséges szorzásokat, osztásokat! A végeredményt hatványalakban add meg!

a) $\dfrac{2^{24} \cdot 2^8 \cdot 2^{45}}{2^{49} \cdot 2^{27}}$; *b)* $3^5 \cdot 3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{16} \cdot 2^6$;

c) $7^{14} \cdot 5^{24} \cdot 5^4 \cdot 7^{23} \cdot 5^8$; *d)* $\dfrac{3^8 \cdot 5^4 \cdot 5^8 \cdot 3^{10} \cdot 5^3}{5^5 \cdot 5^7 \cdot 3^4 \cdot 3^5}$.

11. A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI II.

1. PÉLDA

Számoljuk ki az alábbi szorzat értékét!

$2^4 \cdot 5^4$

Megoldás

1. lehetőség:

Számítsuk ki külön-külön a hatványok értékét, majd szorozzuk össze őket!

$2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625 = 10\,000$

2. lehetőség:

Felhasználva, hogy $2 \cdot 5 = 10$:

$2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = 10^4 = 10\,000$

Az első esetben az lehet a nehézség, hogy nagy számokat kell összeszorozni.
A második esetben azt használtuk fel, hogy $2 \cdot 5 = 10$, vagyis, hogy a szorzatban ugyanannyi 2-es és ugyanannyi 5-ös szorzótényező szerepel. A 10 egy 2-es és egy 5-ös szorzataként írható fel. Ebből adódóan az eredményt fel tudjuk írni 10 hatványaként.
Az utóbbi számolásnál megfigyelt összefüggést felhasználva megfogalmazhatunk egy újabb szabályt:

Azonos kitevőjű hatványokat úgy is összeszorozhatunk, hogy az alapok szorzatát a közös kitevőre emeljük.

A megfigyelt összefüggést megfogalmazhatjuk más módon is:

Szorzatot úgy is hatványozhatunk, hogy az egyes tényezőket hatványozzuk, és a hatványokat összeszorozzuk.

$(3 \cdot 5)^4 = 3^4 \cdot 5^4$

A felírt azonosságnál felhasználtuk, hogy a kitevők azonosak, és így átalakíthattuk a szorzást.

Vizsgáljuk meg, létezik-e hasonló összefüggés, ha azonos kitevőjű hatványokat osztunk el egymással!

2. PÉLDA

Írjuk egyszerűbben!

$\frac{15^6}{5^6}$

Megoldás

$$\frac{15^6}{5^6} = \frac{15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 15}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{15}{5} \cdot \frac{15}{5} \cdot \frac{15}{5} \cdot \frac{15}{5} \cdot \frac{15}{5} \cdot \frac{15}{5} = \left(\frac{15}{5}\right)^6 = 3^6$$

Az itt megoldott példa alapján általánosan is megfogalmazhatunk összefüggéseket:

Azonos kitevőjű hatványokat úgy is oszthatunk, hogy az alapokat elosztjuk, és a kapott hányadost a közös kitevőre emeljük.

II. 11. A HATVÁNYOZÁS AZONOSSÁGAI II.

Ha az egyenlőség másik irányát nézzük, akkor a következőt látjuk:

Hányados hatványozásakor a számláló és a nevező megfelelő hatványát oszthatjuk el egymással.

Például: $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4}$.

CSOPORTMUNKA

Készítsetek egy tablót, amelyen bemutathatjátok a hatványozás tanult szabályait! Írjatok példát is a szabályokhoz!

FELADATOK

1. Számítsd ki az alábbi hatványok értékét!

a) $2^2 \cdot 6^2$; *b)* $3^3 \cdot 2^3$;
c) $\frac{10^4}{2^4}$; *d)* $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot 5^5$.

2. Írd fel egyetlen szám hatványaként!

a) $2^4 \cdot 3^4$; *b)* $7^5 \cdot 3^5$;
c) $11^8 \cdot 2^8$; *d)* $5^{12} \cdot 2^{12}$;
e) $12^6 \cdot 3^6$; *f)* $(-3)^5 \cdot (-2)^5$.

3. Írd fel egy tört (vagy egy egész szám) hatványaként az alábbi hányadosokat!

a) $\frac{2^4}{5^4}$; *b)* $\frac{11^6}{5^6}$;
c) $\frac{17^{10}}{4^{10}}$; *d)* $\frac{35^3}{5^3}$.

4. Döntsd el, melyik egyenlőség igaz!

a) $2^{10} \cdot 3^{10} = 5^{10}$; *b)* $3 \cdot 5^{10} = 15^{10}$;
c) $6^4 \cdot 4^4 = 24^4$; *d)* $4^5 \cdot 4^5 = 16^{10}$.

5. Írd fel prímszámok hatványainak szorzataként!

a) $72^3 \cdot 54^4$; *b)* $22^5 \cdot 28^4$;
c) $\frac{3^6 \cdot 6^{10}}{12^4 \cdot 2^5}$; *d)* $\frac{6^5 \cdot 100}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 8^3}$.

6. Írd fel a számokat növekvő sorrendben!

$\frac{20^2}{5^2}$; $\left(\frac{3}{2}\right)^3$; $\left(\frac{4}{5}\right)^4$; $\left(\frac{12}{4}\right)^3$; $\frac{3^3}{2}$; $4^2 \cdot 3^2$.

7. A tanult azonosságok alkalmazásával írd egyszerűbb alakba!
Segítség: Először írd le a számokat prímszámok hatványának szorzataként, majd utána alkalmazd a hatványozás tanult azonosságait!

a) $\left(\frac{6^{24} \cdot 5^8 \cdot 2^{30}}{15^{28} \cdot 4^{27}}\right)^3$; *b)* $\frac{9^8 \cdot 250^8 \cdot 4^{10}}{\left(5^5\right)^4 \cdot 25^2 \cdot 12^{16}}$;

c) $\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{\left(\frac{4}{5}\right)^4 \cdot \frac{5^5}{8^3}}$; *d)* $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^6}{\frac{1}{5^5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2}$.

8. Számolj fejben!

a) Meddig tudod felsorolni a 2 hatványait?
1; 2; 4; …

b) Meddig tudod felsorolni a 3 hatványait?
1; 3; 9; …

c) Meddig tudod felsorolni az 4 hatványait?
1; 4; 16; …

d) Meddig tudod felsorolni az 5 hatványait?
1; 5; 25; …

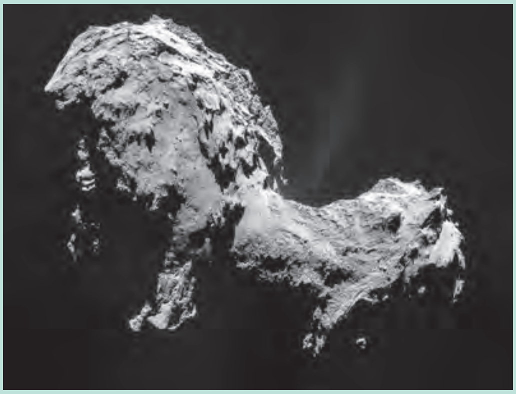
e) Meddig tudod felsorolni az 6 hatványait?
1; 6; 36; …

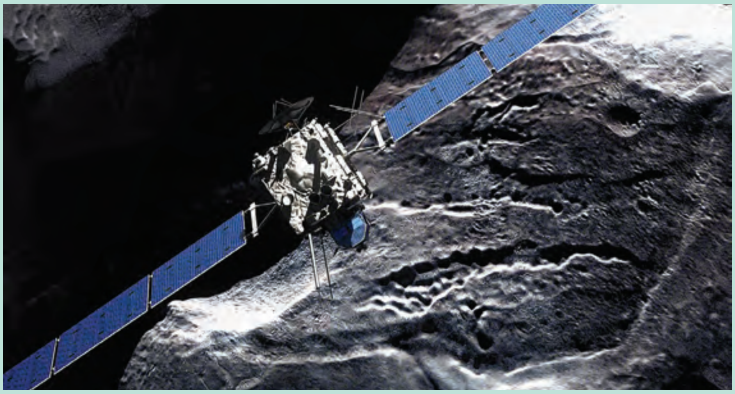
f) Meddig tudod felsorolni a négyzetszámokat?
1; 4; 9; …

g) Meddig tudod felsorolni a köbszámokat?
1; 8; 27; …

Egy kis tudománytörténet

2014. november 12-e mérföldkőnek számít az űrkutatás, illetve a Naprendszer kutatásának történetében. A Rosetta európai űrszonda Philae leszállóegysége sikeres leszállást hajtott végre a 67P/Churyumov–Gerasimenko (röviden 67P) üstökösmag felszínére. A helyszíni mérések segítségével információkat kaphatunk az üstökösről, s közvetve a Naprendszer keletkezéséről. A sikerben magyar mérnököknek és kutatóknak is jelentős része van.





A leszállóhely, Agilkia a Philae fedélzeti kamerájával, mindössze 3 km-es magasságból

A nagy számokkal végzett műveletek során nagyon sok nullát kell leírnunk, ami lassítja és nehezíti is a számolást. A hatvány bevezetése azt is lehetővé teszi, hogy a számokat más módon is leírjuk, ami gyakran rövidebb leírást jelent. Most a nagy számok leírásával foglalkozunk.

CSOPORTMUNKA

Számítsátok ki, milyen távol van ez az üstökös a Földtől, ha tudjuk, hogy a rádióhullámok 1 másodperc alatt 300 000 000 métert tesznek meg, és az üstökös–Föld távolságot a rádiójelek kb. 28 perc alatt teszik meg!

1. PÉLDA

Írjuk fel a 425 milliót kéttényezős szorzat alakban úgy, hogy az egyik tényező 10 pozitív egész kitevőjű hatványa legyen.

Megoldás

Több lehetőség is van, néhányat felsorolunk:

$$425\,000\,000 = 425\,000 \cdot 10^3;$$
$$425\,000\,000 = 425 \cdot 10^6;$$
$$425\,000\,000 = 425\,000\,00 \cdot 10;$$
$$\mathbf{425\,000\,000 = 4{,}25 \cdot 10^8.}$$

Az utolsóként leírt alak kitüntetett szerepet kapott a számok leírásában. A $4{,}25 \cdot 10^8$ alakot a 425 millió *normálalakjának* nevezzük.

Egynél nagyobb szám normálalakja olyan két tényezőből álló szorzat, amelynek egyik tényezője egy és tíz közé esik – 1 lehet, 10 nem –, másik tényezője 10 egész kitevőjű hatványa.

II. 12. NORMÁLALAK

2. PÉLDA

Írjuk fel normálalak használatával a csoportmunkában megoldandó feladat számításait!

Megoldás

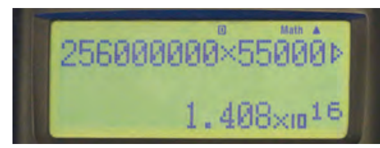
A rádióhullám 1 másodperc alatt 300 000 000 m $= 3 \cdot 10^8$ m-t tesz meg.
28 perc = 1680 másodperc, normálalakban $1{,}68 \cdot 10^3$ másodperc.
A 67P üstökös és a Föld távolsága: $3 \cdot 10^8 \cdot 1{,}68 \cdot 10^3 = 5{,}04 \cdot 10^{11}$ (m), ami $5{,}04 \cdot 10^8$ km.

3. PÉLDA

Számológép segítségével határozzuk meg a műveletsor eredményét!
$256\,000\,000 \cdot 55\,000\,000$

Megoldás

Sok olyan számológép van, ahol nincs annyi karakter a kijelzőn, hogy ezt be tudjuk írni. Ezért most „kicselezzük” a számológépet. Használjunk normálalakot!
$256\,000\,000 \cdot 55\,000\,000 = 2{,}56 \cdot 10^8 \cdot 5{,}5 \cdot 10^7 =$
$= 2{,}56 \cdot 5{,}5 \cdot 10^8 \cdot 10^7 = 14{,}08 \cdot 10^{15} = 1{,}408 \cdot 10^{16}$



A számológépek kijelzője általában 8-12 számjegyet képes megjeleníteni, a normálalak ismerete és alkalmazása viszont lehetővé teszi a számológéppel történő számolást nagyobb számokkal is.

FELADATOK

1. Írd át normálalakba a számokat!
a) 100 000; *b)* 1500 milliárd;
c) 28 000; *d)* 1340;
e) 256 000; *f)* hatszázhuszonötezer;
g) 687 000; *h)* 43 millió 25 ezer;
i) 457,23; *j)* 975 312,45;
k) 10 010; *l)* 100 100 100.

2. Írd át a normálalakban megadott számokat helyiértékes alakba!
a) $4{,}25 \cdot 10^6$; *b)* $1{,}432 \cdot 10^4$;
c) $9{,}206 \cdot 10^2$; *d)* $7{,}0507 \cdot 10^8$;
e) $1 \cdot 10^3$; *f)* $7{,}74 \cdot 10^6$.

3. Írd fel az alábbi számokat normálalakban!
a) $327 \cdot 10^7$; *b)* $1256 \cdot 10^4$;
c) $82\,005 \cdot 10^6$; *d)* $0{,}0657 \cdot 10^4$;
e) $0{,}01 \cdot 10^6$; *f)* $0{,}74 \cdot 10\,000\,000$;
g) $10 \cdot 10^3$; *h)* $0{,}0001 \cdot 10\,000$;
i) $1{,}956 \cdot 10^3$; *j)* $0{,}1222 \cdot 10^4$;
k) $0{,}01492 \cdot 10^5$; *l)* $0{,}00101 \cdot 10^{10}$.

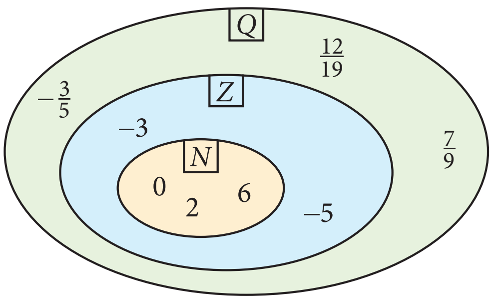
4. Vizsgáld meg, hogyan tudsz nagy számokat tartalmazó műveleteket elvégezni a számológépeden!

5. Add meg a végeredményt normálalakban! Az ellenőrzéséhez használj számológépet!
a) $(3{,}5 \cdot 10^4) \cdot 4000$;
b) $(1{,}6 \cdot 10^8) \cdot (25 \cdot 10^5)$;
c) $(2{,}4 \cdot 10^{10}) \cdot (1{,}5 \cdot 10^2)$;
d) $(7{,}2 \cdot 10^8) : (1{,}8 \cdot 10^5)$;
e) $(1{,}08 \cdot 10^{10}) : 90\,000$;
f) $(8{,}4 \cdot 10^6) \cdot (1{,}5 \cdot 10^6)$.

6. A Nap–Föld távolságának hányszorosa a 67P üstökös–Föld távolsága?

13. ÖSSZEFOGLALÁS II.

A racionális számok azok a számok, amelyek felírhatók két egész szám hányadosaként. A racionális számok halmazába tartoznak a pozitív egész számok, a negatív egész számok, a 0 és a törtek.



Minden racionális számnak többféle alakja van. Minden tört alakú szám átírható tizedes tört alakba. Megmutattuk, hogy a racionális számok tizedes tört alakja egész szám, véges tizedes tört vagy végtelen szakaszos tizedes tört.
Ha az eddig tanult műveletek bármelyikét racionális számokkal végezzük el, eredményül racionális számot kapunk.
A négy alapművelet közül az összeadás és a szorzás esetében az alábbi műveleti tulajdonságok érvényesek:

- az összeg tagjai, illetve a szorzat tényezői felcserélhetők;
- az összeg tagjai, illetve a szorzat tényezői tetszőlegesen csoportosíthatók.

A kivonás és osztás esetében ezek a műveleti tulajdonságok nem igazak.
A kivonás felírható negatív szám hozzáadásaként. Ekkor az előjeles számokra már alkalmazható az összeadásra érvényes felcserélhetőség, illetve csoportosíthatóság.
Az osztás felírható az osztó reciprokával történő szorzásként is.

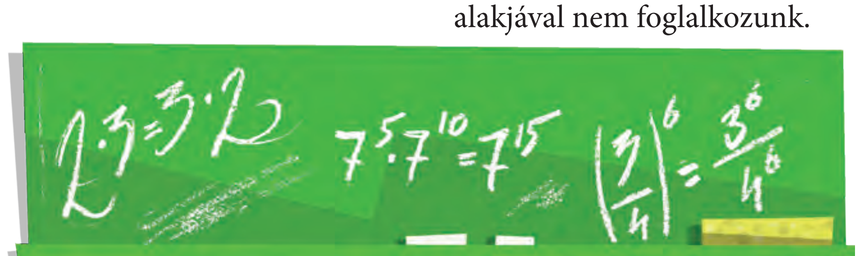
Vigyázz! 0-val nem végezhető el az osztás!
Gondoljátok át, miért!

A tanult műveletek sorrendjéről:
Ha egy műveletsort kell elvégezni, akkor egyenrangú műveletek esetében balról jobbra haladunk.
A szorzást és osztást magasabbrendű műveletnek tekintjük, ezért egy műveletsorban először ezeket végezzük el.
A zárójel módosítja a műveleti sorrendet. Először a zárójelben lévő műveletet kell elvégezni.
A törtvonal zárójelet helyettesíthet, ezért abban az esetben is nagyon körültekintőnek kell lenni, ha nincs feltüntetve a zárójel.

Hatványozás
Ha egy számot többször önmagával szorzunk, akkor azt rövidebb alakban, úgynevezett hatványalakban is megadhatjuk.
Az itt tanult elnevezések: hatványalap, kitevő és hatványérték. A hatványalap – vagy röviden alap – az, amit összeszorzunk, a kitevő pedig az, ahányszor megszorozzuk önmagával az adott számot.
A hatványokkal végzett szorzás és osztás során jól használható szabályokat fogalmaztunk meg. Használhatjuk a tanult szabályokat:

- azonos alapú hatványok szorzásakor, osztásakor;
- azonos kitevőjű hatványok szorzásakor, osztásakor;
- szorzat vagy tört hatványozásánál;
- hatvány hatványozásánál.

A normálalak bevezetése és a számológép használata a nagy számokkal való műveletek elvégzését segíti. Egyelőre a 0 és 1 közötti számok normálalakjával nem foglalkozunk.



FELADATOK

1. Mennyi a kiemelt számok helyi értéke, alaki értéke és valódi értéke?
a) 5**0**784**3**; *b)* **8**0,**3**15; *c)* **4**4526,0**2**.

2. Helyezd át a zárójeleket úgy, hogy könnyebb legyen a számolás, majd végezd el az összeadásokat!
a) 2135 + (2865 + 1972) + 2028;
b) (2543 + 457 + 1049) + (2951 + 1544 + 4456);
c) 384 + (1616 + 4848) + (2152 + 2152) + 1848;
d) (2014 + 986 + 840) + (1160 + 727) + 273.

3. Melyik eredmény melyik műveletsorhoz tartozik? Először becsülj, aztán tippelj, végül számold ki az eredményeket!
a) 3543 + 1879 + 282;
b) 3543 + (1879 + 282);
c) 3543 − 1879 + 282;
d) 3543 − (1879 + 282);
e) 3543 − 1879 − 282;
f) (3543 + 1879) − 282;
g) 3543 − (1879 − 282).

A) 1382
B) 1946
C) 5140
D) 5704

4. Döntsd el, melyik szám nagyobb! Válaszodat indokold!
a) $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$; *b)* $\frac{15}{17}$ $\frac{15}{19}$;
c) $-\frac{1}{5}$ $-\frac{1}{6}$; *d)* $-\frac{5}{9}$ $-\frac{5}{8}$;
e) $1+\frac{1}{6}+1\frac{3}{6}$ $4-1{,}5$.

5. Végezd el az alábbi műveleteket!
a) (–17 – 13) : (–5);
b) (11 + 31) : (–5);
c) (–11 + 8) · (–3);
d) –7 + 20 · (–4);
e) 5 · (–7) + (–6) · (–5);
f) (–9) · 8 – (–32) : (–2);
g) –13 – 16 : (–4) + 8 · 5.

6. Melyik műveletsor eredményének abszolút értéke kisebb, mint 20?
a) (–9) – (–7) + (–2) : 2 + 18;
b) 14 – (–49) : 7 + (–4) · (+6);
c) 24 – (–7) · (+3) + (–11) – (–24) : (+4);
d) 18 : (–6) + (–5) – (–44) : (+11) – 3;
e) 49 – (–49) : (–7) + (–16) · 2 – (–19) · (–1).

7. Végezd el a műveleteket! Vannak-e közöttük olyanok, amelyeknek egyenlő az eredménye?
a) $8\frac{4}{5}-\left(\frac{9}{15}-\frac{10}{3}\right)$; *b)* $8\frac{4}{5}-\frac{9}{15}+\frac{10}{3}$;
c) $8\frac{4}{5}-\frac{9}{15}-\frac{10}{3}$; *d)* $8\frac{4}{5}-\left(-\frac{9}{15}-\frac{10}{3}\right)$;
e) $8\frac{4}{5}-\left(\frac{9}{15}+\frac{10}{3}\right)$; *f)* $8\frac{4}{5}+\frac{9}{15}+\frac{10}{3}$;
g) $8\frac{4}{5}+\frac{9}{15}-\frac{10}{3}$; *h)* $8\frac{4}{5}+\left(\frac{9}{15}-\frac{10}{3}\right)$.

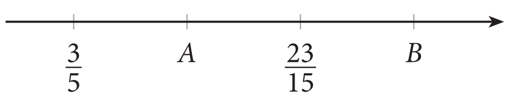
8. Állítsd növekvő sorrendbe az alábbi műveletek eredményeit!
a) $\frac{7}{8}-\frac{7}{12}$; *b)* $3\frac{1}{2}-\left(-2\frac{7}{10}\right)$;
c) $\frac{49}{20}+\left(-1\frac{7}{8}\right)$; *d)* $\left(-\frac{53}{10}\right)-\frac{3}{15}$;
e) $\left(-5\frac{1}{4}\right)+\frac{23}{16}$.

9. Töröljünk az 1353102420 számból öt számjegyet úgy, hogy a megmaradó ötjegyű szám a lehető legkisebb legyen! Mennyi a letörölt számjegyek összege?

10. A feladatban szereplő minden nagybetű értéke egy-egy szám. A *PIZZA* szó értéke az őt alkotó betűk értékeinek összege. Mennyit érnek az alábbi betűk, és mennyi a *PIZZA* szó értéke?
a) $A=-\frac{7}{11}\cdot 13+\frac{29}{11}\cdot 13$;
b) $I=3\cdot\frac{4}{9}+\frac{11}{3}$;
c) Z = 121-nek a $\frac{2}{11}$ része;
d) $P=123+(-54)-(-35)-4$.

13. ÖSSZEFOGLALÁS

11. Négy számot adunk meg, ezek a $\frac{3}{5}$; A; $\frac{23}{15}$; és a B. Tudjuk, hogy az A felezi a $\frac{3}{5}$; $\frac{23}{15}$ végpontú szakaszt, a $\frac{23}{15}$ pedig felezi az AB szakaszt.



a) Mekkora A? *b)* Mekkora B?
c) Milyen hosszú az AB szakasz?
d) Melyik szakasz hossza egyezik meg az AB szakasz hosszával? Miért?

12. Egy osztály 30 tanulójának 30%-a kék szemű és $\frac{2}{5}$ része szőke. Tudjuk, hogy a kék szemű tanulók $\frac{2}{3}$ része szőke.
a) Hány kék szemű tanulója van az osztálynak?
b) Mennyi a szőkék száma?
c) Hány szőke és kék szemű jár az osztályba?
d) Hány olyan tanulója van az osztálynak, aki se nem szőke, se nem kék szemű?

13. A gimnáziumba járó Hanna tagja a kerület énekkari facebook csoportjának. Az itteni ismerőseinek 75%-a egykori vagy jelenlegi iskolatársa, akiknek felével egy időben járt általános iskolába, 60%-ával pedig gimnáziumba. 72 olyan ismerőse van, akivel egy időben járt általános iskolába, de középiskolába már nem.
a) Összesen hány ismerőse van Hannának a facebook csoportban?
b) Hány olyan ismerőse van, akivel az általános iskolába is egy időben járt, és jelenleg is iskolatársa?

14. Írd fel az alábbi szorzatokat hatványalakban!
a) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$;
b) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$;
c) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$.
d) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
e) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$;
f) $(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;
g) $\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$.

15. Az $\frac{1}{3}$ tizedes tört alakja $0{,}333\ldots = 0{,}\dot{3}$. Mely közönséges tört tizedes tört alakját írtuk fel?
a) $0{,}0333\ldots = 0{,}0\dot{3}$; *b)* $0{,}666\ldots = 0{,}\dot{6}$;
c) $0{,}1666\ldots = 0{,}1\dot{6}$; *d)* $2{,}1666\ldots = 2{,}1\dot{6}$;
e) $0{,}111\ldots = 0{,}\dot{1}$; *f)* $2{,}222\ldots = 2{,}\dot{2}$.

16.
a) Tudjuk, hogy $3^a = 1$. Mi lehet a?
b) Tudjuk, hogy $a^3 = 1$. Mi lehet a?
c) Tudjuk, hogy $b^3 = 0$. Mi lehet b?
d) Tudjuk, hogy $0^b = 0$. Mi lehet b?

17. Számítsd ki az alábbi műveletek eredményét!
a) $3^3 \cdot 2^4$; *b)* $2^5 \cdot 19^0 \cdot 5^5$;
c) $8^2 \cdot 3^5 \cdot 0^{15}$; *d)* $11^3 \cdot 3^2$.

18.
a) $3^a = 9$. Mennyi a értéke?
b) $3^b = 27$. Mennyi b értéke?
c) $5^c = \frac{1}{5}$. Mennyi c értéke?
d) $5^d = \frac{1}{125}$. Mennyi d értéke?

19. Másold le az alábbi számokat a füzetedbe, és írd át normálalakba!
a) 121 000;
b) 196;
c) 24,78;
d) 100,11;
e) 345 000 000.

20. Végezd el a normálalakban megadott számokkal kijelölt műveleteket! Az eredményt add meg normálalakban!

a) $2{,}4 \cdot 10^4 \cdot 3 \cdot 10^2$; *b)* $6{,}5 \cdot 10^2 \cdot 9{,}4 \cdot 10^5$;
c) $9 \cdot 10^6 : (1{,}5 \cdot 10^2)$; *d)* $8{,}4 \cdot 10^8 : (7 \cdot 10^5)$.

21. Melyik nagyobb:

a) $3^5 \cdot 3^4$ vagy 3^{10};

b) $\dfrac{2^4 \cdot 2^8}{\left(2^5\right)^2}$ vagy 5^2?

22. Végezd el az alábbi műveleteket, és az eredményeket add meg normálalakban!

a) $\left(45\,000 \cdot 5000\right)^4$;

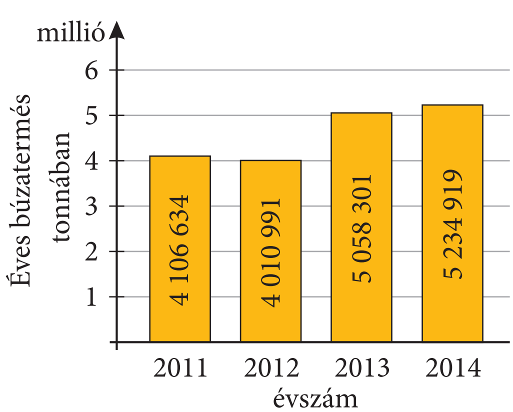
b) $\left(80\,000^2 \cdot 320\,000\right)^3$;

c) $\left(600 \cdot 5000 : 400^2\right)^4$;

d) $\left(\left(2{,}2 \cdot 10^5\right)^2 : \left(1{,}21 \cdot 10^6\right)\right)^4$;

e) $\left(450 \cdot 500\,000\right)^4$.

23. Az alábbi ábra Magyarország búzatermését szemlélteti 2011 és 2014 között (tonnában mérve).



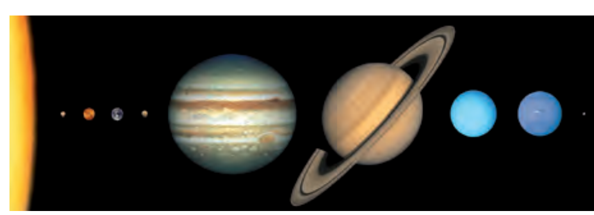
2011	2012	2013	2014
4 106 634	4 010 991	5 058 301	5 234 919

Forrás: KSH

Olvasd le, hogy mennyi búza termett az egyes években Magyarországon! Írd át az adatokat normálalakba, és kerekítsd őket 2 tizedesjegy pontosságúra!

24. A Nap tömege körülbelül $1{,}989 \cdot 10^{30}$ kg. Sokszorosan meghaladja a Naprendszer bolygóinak tömegét, amelyeket az alábbi táblázat tartalmaz (kg).

Merkúr	Vénusz	Föld	Mars
$3{,}28 \cdot 10^{23}$	$4{,}90 \cdot 10^{24}$	$5{,}97 \cdot 10^{24}$	$6{,}57 \cdot 10^{23}$
Jupiter	**Szaturnusz**	**Uránusz**	**Neptunusz**
$1{,}90 \cdot 10^{27}$	$5{,}68 \cdot 10^{26}$	$8{,}66 \cdot 10^{25}$	$1{,}02 \cdot 10^{26}$



a) Melyik bolygónak a legkisebb a tömege?
b) Melyik bolygónak a legnagyobb a tömege?
c) Hányszor nagyobb a legnagyobb bolygó tömege a legkisebbnél?
d) Hányszor nagyobb a Jupiter tömege a Föld tömegénél?
e) Az összes bolygó együttes tömege hány százaléka a Nap tömegének?
f) Keresd meg az interneten, hogy más csillagok tömege hányszorosa a Nap tömegének!

III. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

A Kr. e. 290-be induló útra Judit néni örömére mindenki jelentkezett. A szerencse két lánynak kedvezett, így a téridőtrafóval felszerelt szerkezet Bertát és Pannit repítette Alexandriába. Az első, amit megláttak és meghallottak, az a kardok csattogása volt. Néhány izmos fiatal testőr küzdött a gyakorlótéren. A szomszédos épület lépcsőjén két tógás alak diskurált. A beszédfelismerő rájuk fókuszált, és a lányok már hallhatták is a fordítógép hangját.

– Euklidész, nem zavarnak a fiatalok? – kérdezte a társát az idős férfi.

– Épp ellenkezőleg, Démétriosz! Csengő zajuk az erdei madarak énekére emlékeztet, amely mindig megnyugtat.

– Remélem, ez azt jelenti, hogy jól haladsz a könyveddel. Milyen címet adtál neki?

– Sztoikheia – a fordító protokollrobot csak rövid késéssel tudta tolmácsolni – Elemek. Összefoglaltam benne azt, amit nyilvánvalóan tudunk, és azt, amire ezekből következtetni lehet. Tartalmazza például a milétoszi Thalész körre vonatkozó következtetéseit, és más munkákat is.

– Mikor olvashatjuk végre? Sokan kíváncsiak új írásod logikájára.

– Nemsokára. Most még választ keresek egy-két problémára, bár lehet, hogy anélkül fejezem be ezt a könyvet, hogy megtalálnám a megoldást. Legyetek egy kicsit türelemmel!

Berta feldobódva fordult barátnőjéhez.

– Ha visszaértünk, megkeresem ezt a könyvet a neten!

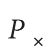
– Ha visszaértünk, beiratkozom vívni – válaszolta Panni, le sem véve szemét a testőrökről.

III. 1. FONTOS GEOMETRIAI FOGALMAK

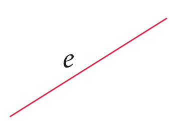
CSOPORTMUNKA

Adott idő alatt párosával írjatok egy-egy rövid (maximum 8 mondatos) történetet, amelyben az eddig tanult geometriai fogalmak is szerepelnek! A történet ne kapcsolódjon a matematikaórához! Amíg az egyikőtök felolvassa a szöveget, addig a másik fél írja a táblára a szövegetek matematikai fogalmait! Ha egy fogalom korábban már más párnál is előfordult, akkor azt húzzátok alá! A feladat végeztével vizsgáljátok meg, hogy szerepelnek-e olyan fogalmak a táblán, amelyek nincsenek aláhúzva! Ekkor láthatjátok, kik tudtak olyan fogalmat szerepeltetni, ami csak náluk fordult elő. A gyűjtőmunka győztesei lehetnek azok, akiknél a legtöbb fogalom szerepelt, de azok is, akiknél a nem aláhúzottak szerepeltek.

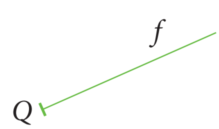
A csoportmunkában felelevenítettük az eddig tanult geometriai fogalmakat. Mindegyiket nehéz lenne felidézni, ezért most csak a leggyakrabban előfordulókat, a továbbhaladás szempontjából a legfontosabbakat soroljuk fel.
Alapfogalmak: **pont, egyenes, sík, tér.**
További fogalmak: **félegyenes, szakasz, félsík, féltér, síkidom, szög, sokszög.**



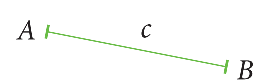
P pont



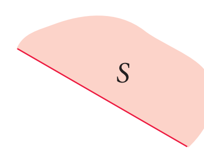
e egyenes



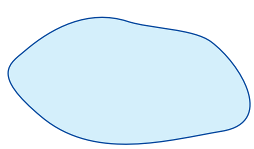
Q kezdőpontú *f* félegyenes



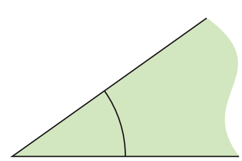
AB vagy *c* szakasz



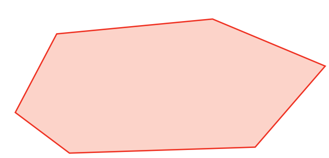
S félsík



síkidom



szög



sokszög

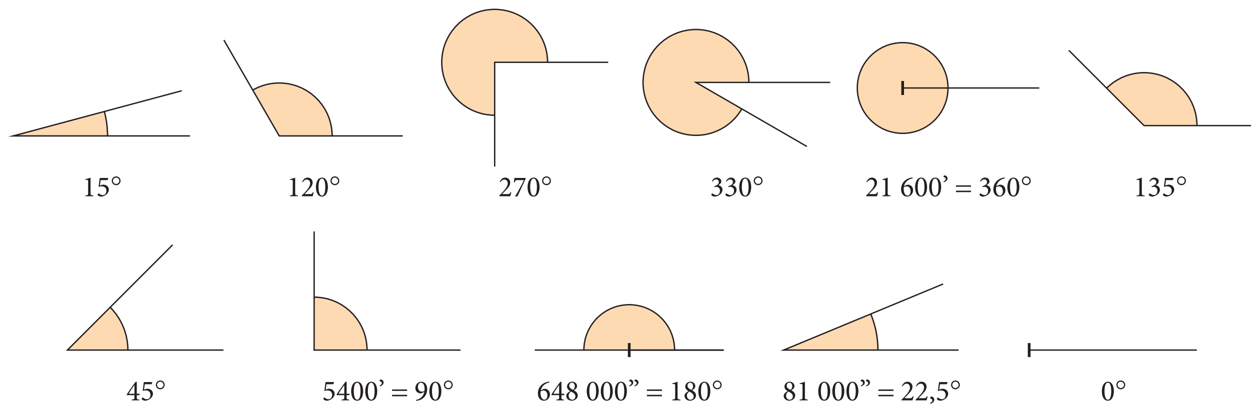
A megismert fogalmakkal új fogalmakat határozhatunk meg (definiálhatunk), illetve újabb és újabb fogalmakat kapcsolhatunk hozzájuk.
Például: A félegyenesek segítségével definiáltuk a szög fogalmát. A szöggel kapcsolatban pedig beszéltünk a **szög szár**áról, a **szög csúcs**áról, a **szögtartomány**ról, a **szög mérésé**ről és a **szögfajták**ról is.

1. PÉLDA

Rajzoljuk le, majd csoportosítsuk nagyságuk szerint a következő szögeket:
a) 15°, *b)* 120°, *c)* 270°, *d)* 330°, *e)* 21 600′, *f)* 135°, *g)* 45°, *h)* 5400′, *i)* 648 000″, *j)* 81 000″, *k)* 0°!
Szögmérő segítségével rajzoljuk le a füzetbe is ezeket a szögeket! Adjuk meg a csoportokhoz tartozó intervallumokat!

Megoldás

A szög mérésére használt fok, perc és másodperc között a tanult összefüggéseket használjuk: $1° = 60'$, $1' = 60''$.



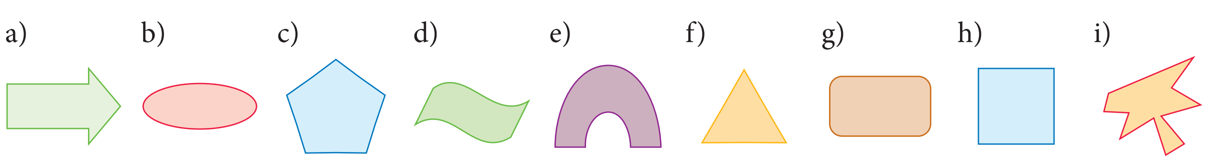
Az α hegyesszög, ha $0° < \alpha < 90°$.
Az α tompaszög, ha $90° < \alpha < 180°$.
Az α homorú szög, ha $180° < \alpha < 360°$.
Az α nullszög, ha $\alpha = 0°$.
Az α derékszög, ha $\alpha = 90°$.
Az α egyenesszög, ha $\alpha = 180°$.
Az α teljesszög, ha $\alpha = 360°$.

Hegyesszögek: 15°, 45°, $81\,000'' = 22{,}5°$.
Tompaszögek: 120°, 135°.
Homorú szögek: 270°, 330°.
Nullszög: 0°.
Derékszög: $5400' = 90°$.
Egyenesszög: $648\,000'' = 180°$.
Teljesszög: $21\,600' = 360°$.

Beszélhetünk 360°-nál nagyobb **forgásszög**ről is.

2. PÉLDA

Válogassuk ki a sokszögeket az ábrán látható síkidomok közül! Alakítsunk ki két csoportot: **konvex** és **konkáv** sokszögek!



Megoldás

A sokszögek határvonala csak szakaszokból áll. Ezért az ábrán látható síkidomok közül a következők a sokszögek: *a)*; *c)*; *f)*; *h)*; *i)*.

Konvex sokszögek: *c)*; *f)*; *h)*.

Konkáv sokszögek: *a)*; *i)*.

A sokszögekhez kapcsolódó fogalmak: **oldal, oldalegyenes, átló, belső szög, külső szög, szabályos sokszög.**

III. 1. FONTOS GEOMETRIAI FOGALMAK

FELADATOK

1. Válogasd ki a hegyesszögeket! Melyik csoportokba tartoznak a többiek?

a) $1020'$; *b)* $92°$; *c)* $310°$; *d)* $6600'$;
e) $44°\ 22'\ 11''$; *f)* $7200''$; *g)* $170°$; *h)* $274°\ 59'$.

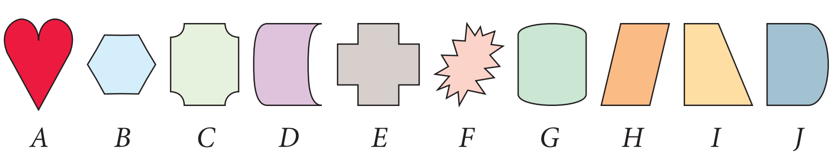
2. A felsorolásban a másodiktól kezdve minden szög 34°-kal nagyobb, mint az előtte lévő: 34°, 68°, …, 340°. Add meg a felsorolás hegyesszögeit, tompaszögeit és homorú szögeit!

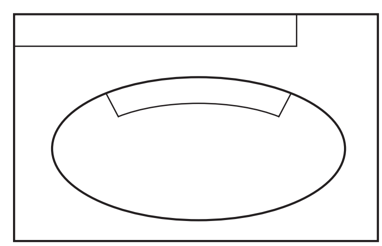
3. Legyen $\alpha = 24°\ 33'$, $\beta = 88°\ 27'$, $\gamma = 112°\ 45'$! Rakd növekvő sorrendbe a következő szögeket:

a) $\alpha + \beta$; *b)* γ; *c)* $\beta - \alpha$; *d)* $\dfrac{\beta}{2} + \dfrac{\gamma}{3}$!

4. Mekkora szöget zár be az óra két mutatója
a) 2 órakor; *b)* 5 órakor; *c)* fél 12-kor; *d)* fél 3-kor?

5. Az ábrán néhány síkidomot látsz. Másold le a füzetedbe a mellékelt halmazábrát, feliratozd, majd írd be a síkidomok betűjelét a megfelelő helyre!





6. *a)* Rajzolj két egyenest a füzetedben! Hány részre oszthatják a síkot?
b) Rajzolj három egyenest a füzetedben! Hány részre oszthatják a síkot?
c) Rajzolj két kört a füzetedben! Hány részre oszthatják a síkot?

7. Egy sokszögnek két homorú szöge van. Minimum hány oldala lehet? Rajzolj ilyen sokszöget!

8. Melyik igaz, melyik hamis?
a) Minden sokszög síkidom.
b) Van olyan síkidom, amelyik sokszög.
c) Van olyan sokszög, amelyik nem síkidom.
d) Nincs olyan sokszög, amelyik síkidom.
e) Minden síkidom sokszög.
f) Minden négyzet síkidom.

9. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyet néhány átlójával
a) két háromszögre és egy négyszögre;
b) egy háromszögre és két négyszögre;
c) egy háromszögre, egy négyszögre és egy ötszögre;
d) két négyszögre és egy ötszögre vágtunk?

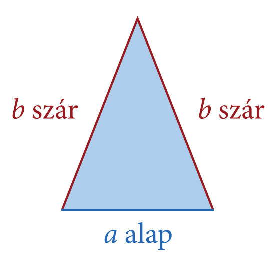
CSOPORTMUNKA

Ha egy háromszögnek mindhárom szöge hegyesszög, akkor hegyesszögű háromszögről beszélünk. Ha azonban a háromszög egy szöge tompaszögű (két szöge pedig hegyesszögű), akkor a tompaszög adja a háromszög elnevezését, ezért az ilyen háromszögeket tompaszögű háromszögeknek nevezzük. Ugyanez a helyzet a derékszöggel is.
Vitassátok meg két-háromfős csoportokban, hogy ezt az „igazságtalan” helyzetet hogyan lehetne feloldani! Tegyetek javaslatot egy igazságosabb meghatározásra! Mikor nevezzünk egy háromszöget hegyesszögűnek, derékszögűnek, tompaszögűnek?

A háromszögeket szögeik alapján három csoportba soroljuk:

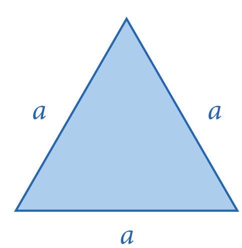
hegyesszögű **derékszögű** **tompaszögű**

Oldalaik alapján beszélünk egyenlő szárú és szabályos háromszögekről:



egyenlő szárú

Az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők.



szabályos

A szabályos (egyenlő oldalú) háromszög minden szöge 60°-os.

1. PÉLDA

Egy egyenlő szárú háromszög egyik szöge 42°. Mekkora a másik két szög?

Megoldás

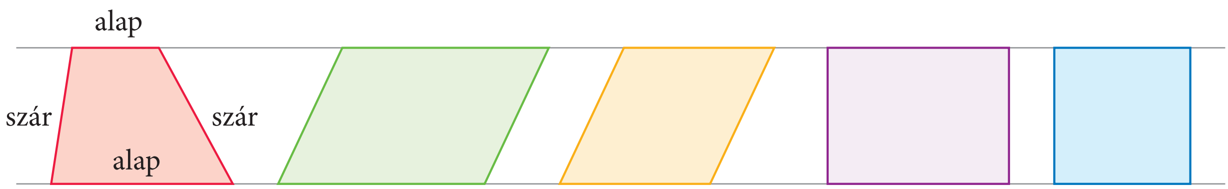
Nem tudjuk, hogy a megadott szög melyik, ezért két eset lehetséges.

I. eset: A megadott szög az alapon fekszik.
Ekkor az alapon fekvő másik szög is 42°. A hiányzó harmadik szög: $180° - 2 \cdot 42° = 96°$.

II. eset: A megadott szög a szárszög (a két szár által bezárt szög).
Ekkor az alapon fekvő szögek összege: $180° - 42° = 138°$. Mivel ez két egyenlő szög összege, így a nagyságuk külön-külön 69°.

III. 2. SÍKIDOMOK, TESTEK

Két párhuzamos egyenes közötti síkrészből **nevezetes négyszögek**et vághatunk ki.

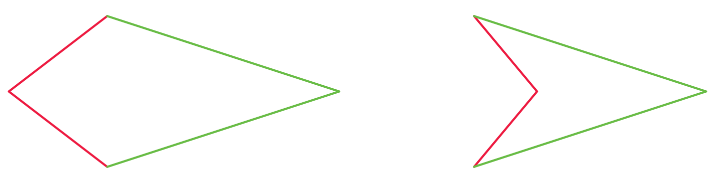


trapéz paralelogramma rombusz téglalap négyzet

Az ábrán látható négyszögek **trapéz**ok, mert van párhuzamos oldalpárjuk.
A további tulajdonságok új elnevezést adnak.

A **paralelogramma** olyan trapéz, amelynek a szárai is párhuzamosak egymással.
A **rombusz** olyan paralelogramma, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú.
A **téglalap** olyan paralelogramma, amelynek a szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.
A **négyzet** olyan téglalap, amelynek a szomszédos oldalai egyenlő hosszúságúak.

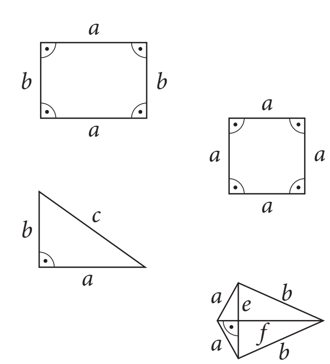
A **deltoid** olyan nevezetes négyszög, amelyben van két-két egyenlő hosszúságú, szomszédos oldal.
Nem kötelező, hogy egy deltoidnak legyen párhuzamos oldalpárja.



konvex deltoid konkáv deltoid

Néhány nevezetes sokszög kerület- és területképletét már ismerjük:

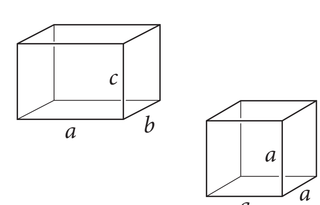
Téglalap	$K = 2 \cdot (a + b)$	$T = a \cdot b$
Négyzet	$K = 4 \cdot a$	$T = a^2$
Derékszögű háromszög	$K = a + b + c$	$T = \frac{a \cdot b}{2}$
Konvex deltoid	$K = 2 \cdot (a + b)$	$T = \frac{e \cdot f}{2}$



A **test**eket síklapok vagy görbe felületek határolják.
A testekkel kapcsolatos elnevezések: **csúcs, él, lap, lapátló, testátló**.

Az eddig tanult felszín- és térfogatképletek:

Téglatest	$A = 2 \cdot (ab + ac + bc)$	$V = a \cdot b \cdot c$
Kocka	$A = 6 \cdot a^2$	$V = a^3$



2. PÉLDA

Egy téglatest alakú doboz éleinek hossza: 7 cm, 14 cm, 28 cm. Van egy ezzel azonos térfogatú, kocka alakú dobozunk is. Melyikhez és mennyivel kell több csomagolópapír, ha az átfedésekre mindkét esetben 25%-ot számolunk?

Megoldás

A téglatest alakú doboz felszíne: $A_1 = 2 \cdot (7 \cdot 14 + 7 \cdot 28 + 14 \cdot 28) = 1372$ (cm^2).
A csomagoláshoz 25%-kal több papír kell: $1372 \cdot 1{,}25 = 1715$ (cm^2).
A téglatest alakú doboz térfogata: $V = 7 \cdot 14 \cdot 28 = 2744$ (cm^3).
Mivel a kocka alakú doboz térfogata is ennyi, ezért olyan számot kell keresnünk, amelyre $a \cdot a \cdot a = 2744$ (cm^3).
Néhány szám kipróbálása után megtaláljuk, hogy $a = 14$ cm.
A kocka alakú doboz felszíne: $A_2 = 6 \cdot 14^2 = 1176$ (cm^2).
A csomagoláshoz most is 25%-kal több papír kell: $1176 \cdot 1{,}25 = 1470$ (cm^2).
Vagyis a téglatest alakú doboz becsomagolásához 245 cm^2-rel több papír kell.

FELADATOK

1. Melyik állítás igaz, melyik hamis?
a) Ha egy háromszög legnagyobb szöge hegyesszög, akkor a háromszög hegyesszögű.
b) Ha egy háromszög legnagyobb szöge derékszög, akkor a háromszög derékszögű.
c) Ha egy háromszög legnagyobb szöge tompaszög, akkor a háromszög tompaszögű.
d) Ha egy háromszögnek két hegyesszöge van, akkor a háromszög biztosan hegyesszögű.
e) Ha egy háromszögben két szög egymás pótszöge, akkor a háromszög derékszögű.
f) Nincs olyan háromszög, amelyben két szög egymás kiegészítő szöge.

2. Egy 360 cm kerületű téglalap egyik oldala 12 cm-rel rövidebb, mint a másik. Mekkorák az oldalai? Mekkora a területe?

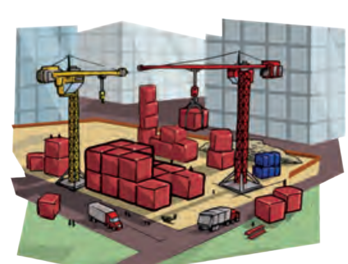
3. Egy téglalap minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám. Mekkora lehet a kerülete, ha a területe 91 cm^2?

4. Egy háromszög két szögének különbsége 14°. A harmadik szöge 82° nagyságú. Mekkorák a háromszög hiányzó szögei?

5. Egy derékszögű háromszög egyik szöge fele egy másiknak. Hány fokosak a háromszög szögei?

6. Egy derékszögű háromszögben a 60°-os szög csúcsába befutó befogó hossza 4,2 cm. Milyen hosszú az átfogó?

7. Készíts tömör téglatestet 42 darab egyforma kocka felhasználásával! Hány különbözőt tervezhetsz?



8. Egy kocka éleinek hossza: 5 cm. Van egy ezzel azonos térfogatú téglatestünk is, amelynek az élei centiméterben mérve egész számok. Mekkora lehet a téglatest felszíne?

III. 3. GEOMETRIAI TRANSZFORMÁCIÓK

A következő szabályok a sík minden pontjához hozzárendelnek egy pontot. Az ilyen hozzárendeléseket **geometriai transzformációk**nak nevezzük. A **transzformáció** átalakítást, átváltoztatást jelent. Ez a fogalom nem csak geometriaórán fordul elő.
A síkon a pontok helyét egy utasítással megváltoztatjuk, vagyis átalakítást hajtunk végre.

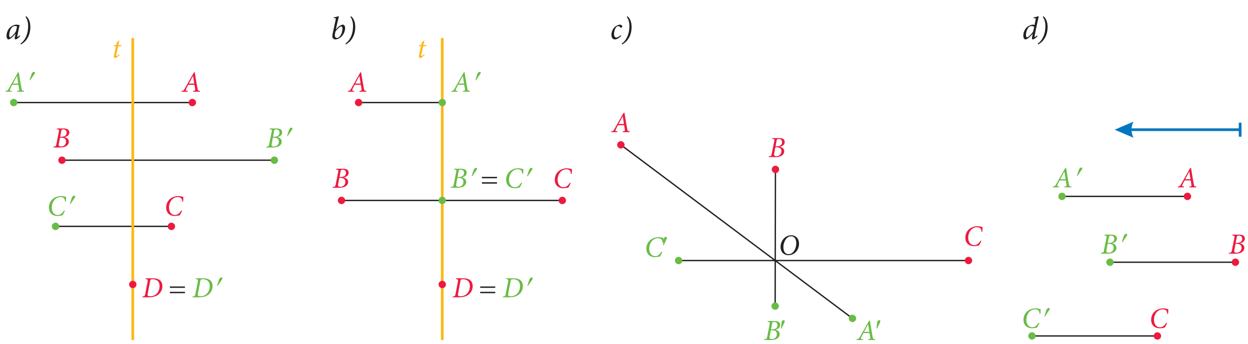
Transzformer

A tavaly tanult **tengelyes tükrözés** is egy geometriai transzformáció.
A sík egy tetszőleges P pontjához a transzformáció által rendelt pontot P'-vel jelöljük, és azt mondjuk, hogy a P pont képe a P'.

Az albertirsai transzformátorállomás elosztó berendezése

1. PÉLDA

Egy ismeretlen transzformáció hatására csak néhány pont képét láthatjuk az ábrán. Fogalmazzuk meg, hogyan szerkesztenénk meg egy-egy további pont képét!



Megoldás

a) A pontból állítsunk merőleges egyenest a t egyenesre! Ezen a merőlegesen a pont és a t egyenes közötti távolságot mérjük fel kétszer a t egyenes másik oldalára! Ekkor kapjuk a képpontot. A t-re illeszkedő pontok helyben maradnak.

b) Az adott pontból állítsunk merőleges egyenest a t egyenesre! A metszéspont lesz a képpont.

c) A pontot kössük össze a sík rögzített O pontjával! A rögzített O ponton túl mérjük fel a távolságuk felét! Ekkor kapjuk a képpontot. A rögzített O pont képe önmaga lesz.

d) A pontra a megadott iránnyal párhuzamosan egy egyenest illesztünk. A pontból kiindulva mérjük fel a megadott irány hosszát erre az egyenesre a megadott iránynak megfelelően! Így kapjuk a képpontot.

Ha a pontokat a koordinátáikkal adjuk meg, akkor másféleképpen is tudunk szabályokat megadni.

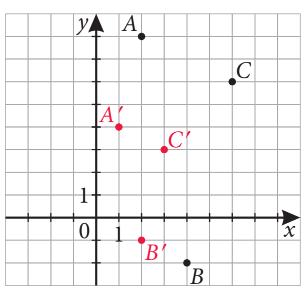
2. PÉLDA

Transzformáljunk néhány pontot a következő szabályok szerint! Minden pont képét úgy kapjuk,
a) hogy mindkét koordinátáját felezzük;
b) hogy a két koordinátáját felcseréljük.

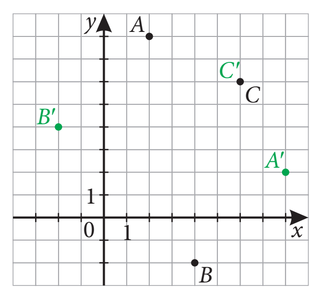
Megoldás

Legyenek a választott pontjaink: $A(2; 8)$, $B(4; -2)$, $C(6; 6)$!

a) A képpontok:
$A'(1; 4)$, $B'(2; -1)$, $C'(3; 3)$.



b) A képpontok:
$A'(8; 2)$, $B'(-2; 4)$, $C'(6; 6)$.



Megfordítható transzformációról beszélünk, ha minden képponthoz egyetlen eredeti pont tartozik. Ilyenkor azt is mondhatjuk, hogy minden képpontnak egy őse van.
Az 1. példa *a)*, *c)* és *d)* részében látható transzformációk megfordíthatók, a *b)* nem. A 2. példa mindhárom transzformációja megfordítható.
Például: ha az 1. példa *a)* részében egy pont ismeretében az eredeti pontot kell megkeresni, akkor ebből a pontból állítsunk merőleges egyenest a *t* egyenesre! Ezen a merőlegesen a pont és a *t* egyenes közötti távolság felét mérjük fel a *t* egyenes másik oldalára! Ekkor kapjuk az eredeti pontot.

FELADATOK

1. Tükrözd az *ABCD* tetszőleges négyszöget az
a) *AB* oldalegyenesére;
b) *AC* átlóegyenesére!

2. Rajzolj egy téglalapot! Tükrözd az egyik átlójának egyenesére! Mi lesz az eredeti és a képként kapott téglalap közös része?

3. Egy négyzetet tükröztünk egy egyenesre. Az eredeti és a képként kapott négyzet közös része az eredetinél kisebb négyzet lett. Rajzolj egy ilyen ábrát!

4. Rajzold le, hogyan néznének ki a következő jelek, ha egy függőleges egyenesre tükröznéd őket! Egy tükör segíthet a kivitelezésben!

{ < \ % @ § &

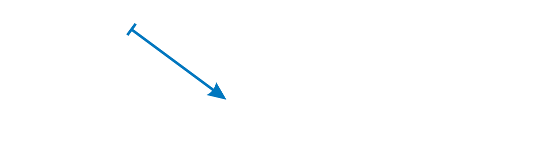
5. Legyen adott három pont a koordinátarendszerben: $A(2; 8)$, $B(4; -2)$, $C(6; 6)$. Készíts rajzot és add meg a transzformált pontok koordinátáit, ha a két koordinátát fel kell cserélned, majd a csere után kapott első koordinátának az ellentettjét kell venned!

6. Adva van egy egyenes a síkon. Bármely síkbeli pont képét megkapjuk úgy, hogy a pontból merőlegest állítunk az adott egyenesre. Erre az egyenesre a talppontból kiindulva felmérjük a pont és a talppont távolságának a felét a másik oldalra. Az adott egyenesre illeszkedő pont képe önmaga lesz.

a) Vegyél fel három tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont képét!

b) Vegyél fel három további tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont ősét!

7. A síkban adott egy egyenes és egy irány a hosszával (az irány nem párhuzamos és nem is merőleges az adott egyenesre).



Bármely pont képét megkapjuk, ha a pontból a megadott iránnyal párhuzamos egyenest húzunk, és bejelöljük a két egyenes metszéspontja és a pont közötti szakasz felezőpontját. Az adott egyenesre illeszkedő pont képe önmaga lesz.

a) Vegyél fel három tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont képét!

b) Vegyél fel három további tetszőleges pontot! Szerkeszd meg mindhárom pont ősét!

8. Transzformáljuk az $A(2; 8)$, $B(4; -2)$, $C(6; 6)$ pontokat a következő szabályok szerint! Minden pont képét úgy kapjuk, hogy

a) mindkét koordinátáját duplázzuk;

b) az első koordinátájának az ellentettjét vesszük;

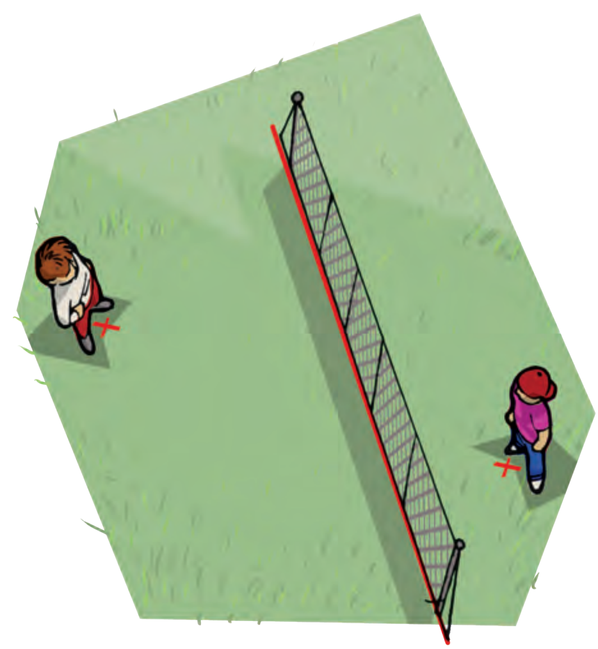
c) a második koordinátájának az ellentettjét vesszük;

d) mindkét koordinátájának az ellentettjét vesszük;

e) a két koordinátáját felcseréljük, majd a csere után kapott második koordinátának az ellentettjét vesszük;

f) mindkét koordinátát csökkentjük 5-tel.

9. Az iskolaudvaron áll két gyerek. Szeretnének a kerítésnél találkozni.



a) Hol legyen a találkozási hely, ha azt szeretnék, hogy mindketten azonos hosszúságú utat tegyenek meg?

b) Hol legyen a találkozási hely, ha azt szeretnék, hogy a kettőjük által megtett út hossza a lehető legrövidebb legyen?

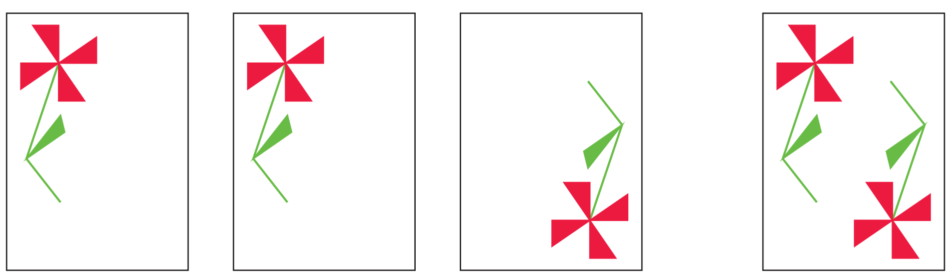
4. KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

CSOPORTMUNKA

Padtársaddal rajzoljatok egy 10-szer 15-ös méretű téglalapot egy-egy „kockás” papírra! Tervezzetek egy olyan képet a négyzetháló segítségével, amely a téglalap átlója által meghatározott egyik részben van! A négyzetháló segít abban, hogy a képet mindketten tökéletes másolatként rajzoljátok le. Tegyétek egymásra a két téglalapot úgy, hogy az ábrák felfelé legyenek fordítva és a két téglalap fedje egymást, de a két ábra ne! Másoljátok le az így kapott ábrát a füzetetekbe! (Fény felé fordítva könnyebb a másolás.)
Figyeljétek meg az így kapott képet! Fogalmazzátok meg észrevételeiteket!

Ezek az ábrák a leírtaknak megfelelően készültek:

Az ábra:	A másolat:	A másolat az összeillesztés előtt:	Egymásra illesztve:



Az egymásra illesztés után megfigyelhető, hogy a kép megfelelő részei a téglalap közepétől ugyanolyan távolságra vannak. A virág megfelelő pontjait összekötő szakasznak a téglalap középpontja pontosan a felezőpontja. A virág megfelelő szakaszai nem csak egyenlők, hanem párhuzamosak is.
A látottak alapján megadunk egy geometriai transzformációt a következő utasítással:

Rögzítünk a síkon egy *K* pontot. Egy tetszőleges síkbeli *A* pontnak akkor kapjuk meg az *A′* képét, ha az *A* pontot összekötjük a *K* ponttal, és ennek az egyenesnek az *A* pontot nem tartalmazó felére felmérjük a *K* ponttól a *KA* távolságot. (A *K* pont képe önmaga.)

Az így meghatározott transzformációt **középpontos tükrözés**nek nevezzük.

Középpontos tükrözésnél megfigyelhető, hogy egy pontot a *K* középpont körül át tudunk fordítani a képpontba. Vagyis minden távolság és minden szög nagysága változatlan marad a transzformáció elvégzése után. Minden alakzat egybevágó lesz a középpontos tükörképével, vagyis a középpontos tükrözés is egybevágóság.

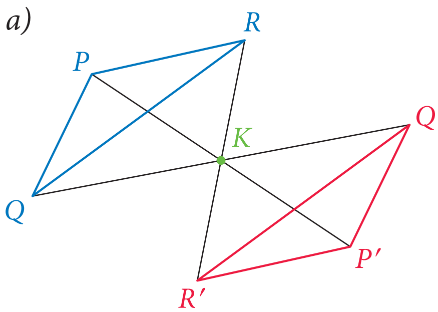
III. 4. KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS

1. PÉLDA

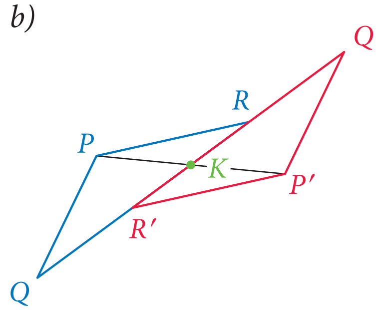
Tükrözzünk középpontosan egy *PQR* háromszöget egy olyan *K* középpontra, amely a
a) háromszögön kívül;
b) háromszög határvonalán;
c) háromszögön belül található!

Megoldás

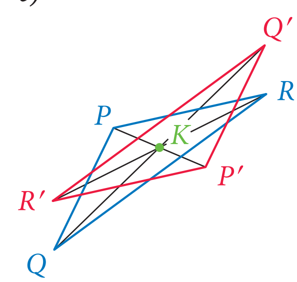
a)



b)



c)



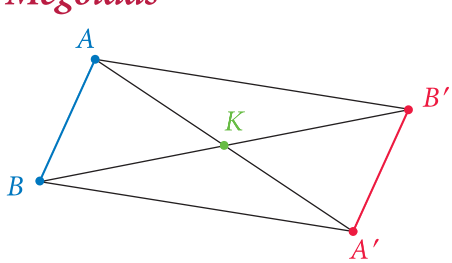
A látottak alapján összegyűjtjük a középpontos tükrözés tulajdonságait:

– Távolságtartó, szögtartó, egyenestartó.
– A középpontra illeszkedő egyenes képe önmaga.
– Nem változtatja meg a körüljárási irányt.
– A középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással.
– A félegyenes és képe fordított állású.
– Szakasz képe párhuzamos az eredeti szakasszal, de a végpontjaik sorrendje felcserélődik.
– Ha egy középpontos tükrözés esetén az *A* pont képe az *A*′, akkor az *A*′ képe ugyanebben a középpontos tükrözésben *A* lesz. Vagyis a középpontos tükrözés megfordítható transzformáció.

2. PÉLDA

Tükrözzük az *AB* szakaszt egy az *AB* egyenesre nem illeszkedő *K* középpontra! Milyen négyszöget határoz meg ez a négy pont?

Megoldás



Mivel az *AB* szakasz képe az *A*′*B*′ szakasz, ezért ezek hossza egyenlő.
Mivel az *AB*′ szakasz képe az *A*′*B* szakasz, ezért ezek hossza is egyenlő.
Vagyis az így kapott négyszög paralelogramma.

FELADATOK

1. Egy kártyalapnak elég csak az egyik felét megmutatnunk, mert a másik felét megkaphatjuk a lap középpontjára tükrözve. Melyik a lap hiányzó része?

a)

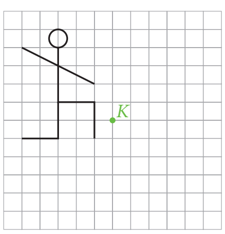
b)

c)

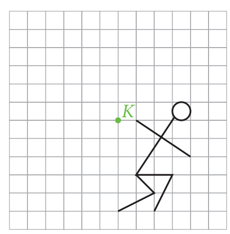
d)

2. Rajzold le a füzetedbe a pálcikaemberkéket, és tükrözd őket a megadott *K* pontra!

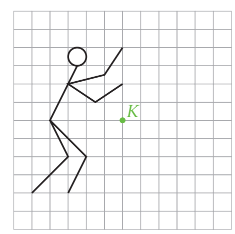
a)



b)



c)



3. Rajzolj egy szabályos háromszöget! Tükrözd
a) az egyik csúcsára; *b)* az egyik oldal felezőpontjára;
c) egy olyan pontra, amely a háromszög egyik oldalegyenesén a háromszögön kívül van!

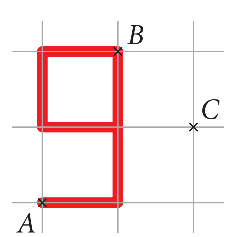
4. Rajzolj két egyenlő hosszúságú szakaszt! Szerkeszd meg azt a pontot, amelyre az egyik szakaszt tükrözve pontosan a másik szakaszt kapjuk! Mikor kapsz ilyen pontot?

5. Rajzolj egy nyomtatott *A* betűt! Tükrözd
a) a csúcsára; *b)* egy olyan pontra, mely a szárán van;
c) egy tetszőleges pontra!

6. Rajzolj egy négyszöget! Tükrözd
a) az egyik csúcsára; *b)* az egyik oldalának a felezőpontjára;
c) egy olyan pontra, amely a négyszögön kívül van!

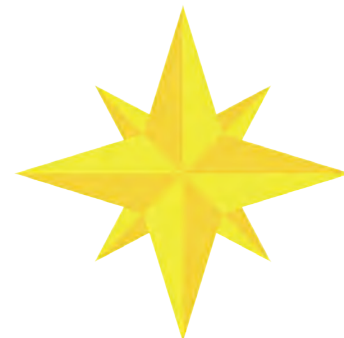
7. Rajzolj egy *ABC* háromszöget és a háromszögön kívül egy F' pontot! Tudjuk, hogy F' a *BC* oldal *F* felezőpontjának a középpontos tükörképe. Szerkeszd meg a háromszög tükörképét!

8. Másold az ábrát a füzetedbe, és tükrözd az ábrán látható számot
a) az *A* pontra!
b) a *B* pontra!
c) a *C* pontra!



III. 5. A KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS ALKALMAZÁSA

Megismerkedtünk a középpontos tükrözéssel, s összegyűjtöttük a legfontosabb tulajdonságait:



- Minden szakaszt önmagával azonos hosszúságú szakaszba transzformál (távolságtartó).
- Minden szöget önmagával azonos nagyságú szögbe transzformál (szögtartó).
- Minden egyenes képe is egyenes (egyenestartó).

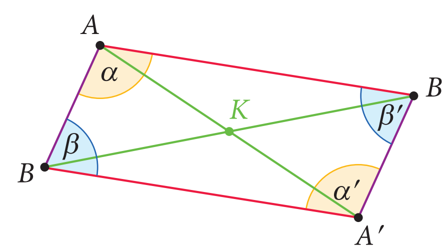
A középpontos tükrözés **egybevágósági transzformáció.**

1. PÉLDA

Tudjuk, hogy ha az AB szakaszt egy az AB egyenesre nem illeszkedő K középpontra tükrözzük, akkor paralelogrammát kapunk. Gyűjtsük össze ezek alapján a paralelogramma tulajdonságait!

Megoldás

Ha egy négyszög paralelogramma, akkor
– két-két szemközti oldala egyenlő hosszúságú;
– két-két szemközti oldala (oldalegyenese) párhuzamos;
– két szemközti oldala egyenlő hosszúságú és párhuzamos;
– az átlói felezik egymást;
– a két-két szemközti szöge egyenlő egymással;
– bármely két szomszédos szöge egymásnak kiegészítő szöge.



A megfogalmazott állítások megfordítása is igaz. Például az első mondat megfordítása így hangzik:

Ha egy négyszögben két-két szemközti oldal egyenlő hosszúságú, akkor az paralelogramma.

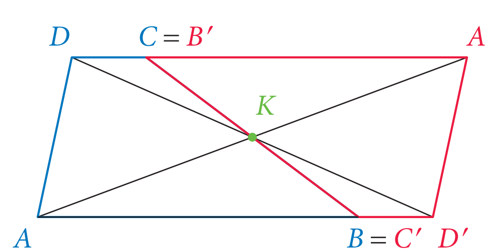
A „*ha* ■, *akkor* ◆” típusú mondat megfordításának nevezzük a „*ha* ◆, *akkor* ■” mondatot.

2. PÉLDA

Tükrözzük az $ABCD$ trapézt a BC szár K felezőpontjára! Mutassuk meg, hogy az eredeti trapéz és az $A'B'C'D'$ kép együtt egy paralelogrammát alkot!

Megoldás

A BA félegyenes középpontos tükörképe $B'A'$, ezért párhuzamosak egymással. A C és a B' pontok egybeesnek. Az $ABCD$ trapézban BA szakasszal párhuzamos a CD szakasz (azaz $B'D$). Vagyis $B'A'$ és $B'D$ úgy párhuzamos egymással, hogy B' a közös pontjuk. Tehát a D, B', A' pontok egy egyenesre illeszkednek.



5. A KÖZÉPPONTOS TÜKRÖZÉS ALKALMAZÁSA

Hasonlóan tudjuk megmutatni, hogy A, B és D' pontok is egy egyenesre illeszkednek.
Vagyis a két trapéz együtt az $AD'A'D$ négyszöget adja, amelynek AD' és $A'D$ oldalairól már tudjuk, hogy párhuzamosak. Az AD középpontos tükörképe $A'D'$, ezért ezek is párhuzamosak. Mivel az $AD'A'D$ négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos, így valóban paralelogrammát kaptunk.

FELADATOK

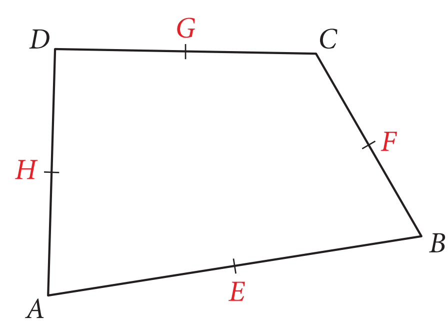
1. Fogalmazd meg és írd le a füzetedbe az 1. példa állításainak megfordításait!

2. Tükrözd az ABC háromszöget a BC oldal F felezőpontjára! Igazold, hogy az eredeti háromszög és az $A'B'C'$ kép együtt egy paralelogrammát alkot!

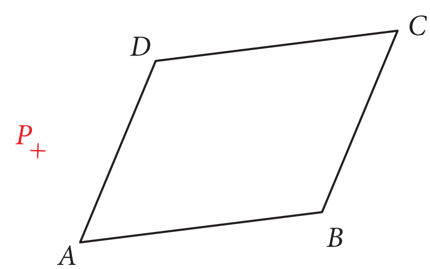
3. Tükrözz egy szabályos háromszöget az egyik oldal felezőpontjára! Milyen síkidomot határoz meg az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítése?

4. Vegyél fel két metsző egyenest és egy rájuk nem illeszkedő pontot! Szerkessz egy-egy olyan pontot az egyenesekre, amelyek az eredeti pontra tükrösek!

5. Legyen az $ABCD$ négyszög négy oldalának felezőpontja E, F, G és H. Tükrözd az A csúcsot E-re, majd a kapott tükörképet sorban az F, aztán G, majd a H oldalfelező pontra! Mi lesz az A pont képe a négy tükrözés után?



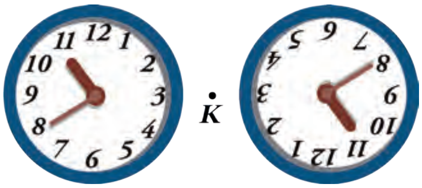
6. Az $ABCD$ paralalogrammát és a tetszőleges P pontot rajzold meg a füzetedben! Tükrözd a P pontot az A csúcsra, az így kapott tükörképet a B-re, majd a C-re és D-re! Mit tapasztalsz?



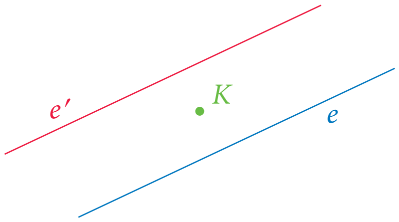
7. Tükrözd az $ABCD$ trapézt az AB hosszabb alapjának F felezőpontjára! Hogyan neveznéd el az eredeti trapéz és az $A'B'C'D'$ kép egyesítésével kapott sokszöget?

SZÖGPÁROK

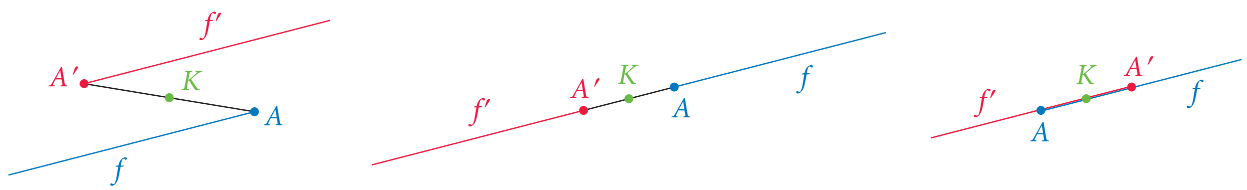
Megállapítottuk, hogy a középpontos tükrözés nem változtatja meg a körüljárási irányt. Ez természetesen abból is következik, hogy egy alakzat tükörképét megkaphatjuk úgy is, hogy a síkot a rögzített K pont körül 180°-kal elforgatjuk.



A tükörközéppontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással.



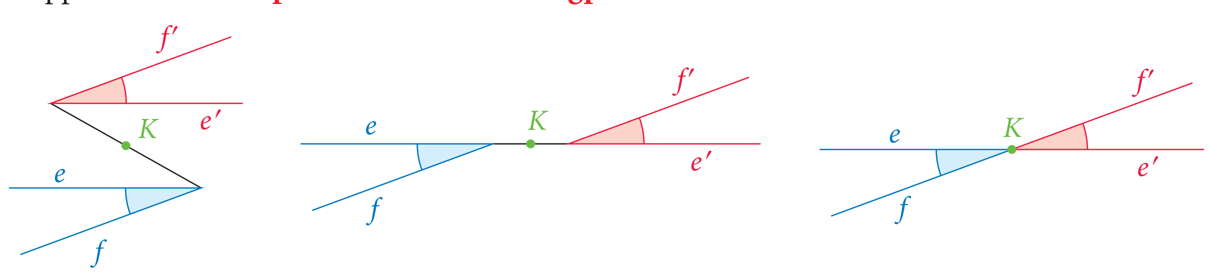
Figyeljük meg, mi lesz egy félegyenesnek és középpontos tükörképének a helyzete!



A félegyenes egy önmagával párhuzamos, ellentétes irányú félegyenesbe transzformálódik. Az is lehet, hogy a két félegyenes ugyanarra az egyenesre kerül, de ezt is mondhatjuk speciális helyzetű párhuzamosságnak. Figyeld meg ezek alapján, hogy milyen helyzetű lesz egy szög képe a középpontos tükrözés során!

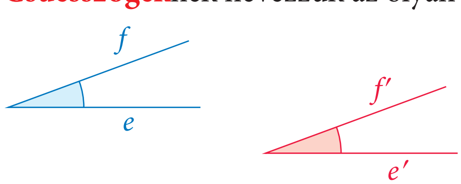
A középpontos tükrözés hatására a szög szárait alkotó félegyenesek önmagukkal párhuzamos, ellentétes irányú félegyenesek lesznek. A két szög nagysága természetesen egyenlő, hiszen egybevágósági transzformációról van szó.

A középpontos tükrözés **párhuzamos szárú szögpárok**at hoz létre.



A képként kapott szög szárai páronként ellentétes irányúak az eredeti szög száraihoz képest. Ezek a **fordított állású szögek** vagy **váltószögek**.

Csúcsszögeknek nevezzük az olyan fordított állású szögeket, amelyeknek közös a csúcspontja.

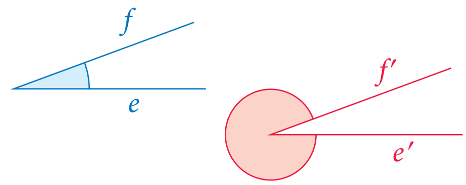


Ha egy szöget eltolsz a síkon, az eredeti és az eltolt szög megfelelő szárai akkor is párhuzamosak lesznek. Vagyis ezek is párhuzamos szárú szögpárt alkotnak, de itt a félegyenesek páronként egyező irányúak. Ezeket **egyállású szögek**nek nevezzük.

6. SZÖGPÁROK

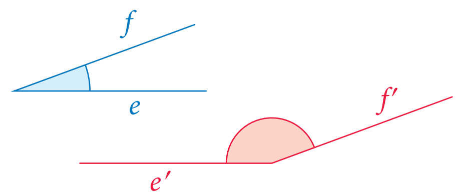
A konvex egyállású és a konvex fordított állású szögpárok egyenlők egymással.

Az egyenlőséghez fontos, hogy mindkét szög konvex legyen.

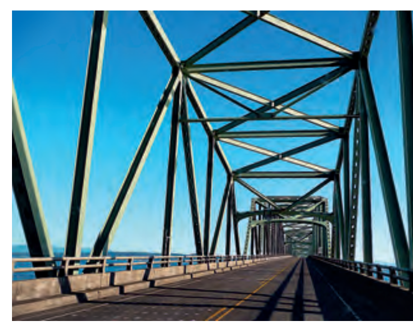


Figyeld meg a párhuzamos szárú szögek harmadik csoportját! Ezek nem egyenlők, hanem 180°-ra egészítik ki egymást.

Általában **kiegészítő szögek**nek nevezzük azokat a szögpárokat, amelyek egymást 180°-ra egészítik ki.

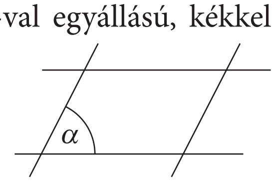


Az előző években már találkozhattál az egymást 90°-ra kipótoló **pótszögek**kel is. Nevezetes szögpárokat a környezetben is láthatsz.

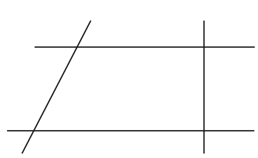


FELADATOK

1. Rajzold le az ábrát a füzetedbe! A rajzodon jelöld pirossal az α-val egyállású, kékkel az α-val fordított állású, szögeket zölddel az α kiegészítő szögeit!



2. Rajzold le az ábrát a füzetedbe! A rajzodon jelöld azonos színekkel a csúcsszögeket!



3. Döntsd el, hogy melyik állítás igaz, melyik hamis!

a) Nincs olyan párhuzamos szárú szögpár, ahol a két szög különböző.

b) Minden fordított állású tompa szögpárban a két szög egyenlő.

c) Egy 120°-os és egy 60°-os szög nem alkothat párhuzamos szárú szögpárt.

d) Ha két szög egyenlő, akkor egyállásúak.

e) Ha két szög szárai páronként párhuzamosak, akkor a két szög egyenlő.

4. Keresd meg a kiegészítő és a pótszög párokat!

a) 44° 28′; *b)* 14° 33′;
c) 76° 27′; *d)* 72° 44′;
e) 103° 33′; *f)* 17° 56′;
g) 72° 4′; *h)* 45° 32′.

5. Add meg a kiegészítő szögét!

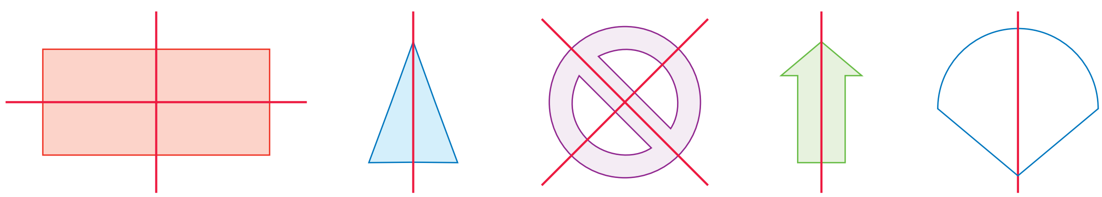
a) 23° 45′ 19″; *b)* 143° 42′ 27″;
c) 90° 32′ 48″; *d)* 3° 15′ 26″.

III. 7. KÖZÉPPONTOS ÉS TENGELYES SZIMMETRIA

JÁTÉK

Rajzoljatok írólapra körzővel egy kb. 4-5 cm sugarú kört! A kör belsejében egyforma pénzérméket (vagy korongokat) kell felváltva elhelyezni. Az nyer, aki az utolsó pénzérmét el tudja helyezni. A lerakott pénzérméket már nem szabad megmozdítani, és a pénzérméknek nem lehet átfedése egymással.
Elemezzétek a játékot! Hogyan lehetne biztosan nyerni a játékban?

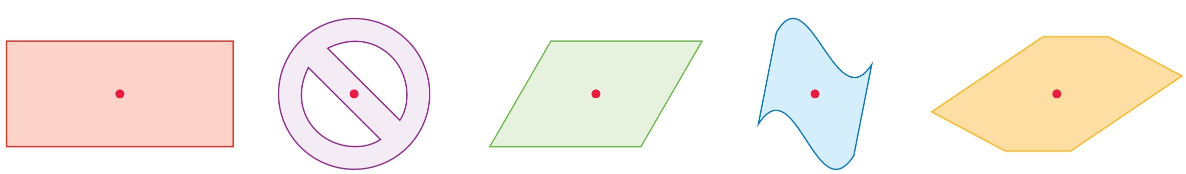
Tavaly megismerkedtünk a **tengelyes tükrözés**sel, és bevezettük a **tengelyes szimmetria** fogalmát is. Azt a síkbeli alakzatot nevezzük tengelyesen szimmetrikusnak, amelyhez van olyan tengelyes tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.
A következő ábrákon tengelyesen szimmetrikus síkidomokat figyelhetsz meg:



A középpontos tükrözés bevezetése után természetesen **középpontos szimmetriá**ról is tudunk beszélni.

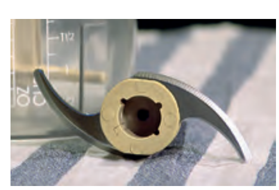
Azt a síkbeli alakzatot nevezzük középpontosan szimmetrikusnak, amelyhez van olyan középpontos tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.

Az ábrán középpontosan szimmetrikus síkidomokat látsz:

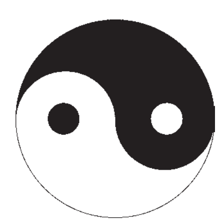


A középpontos szimmetria a környezetünkben is megtalálható. Az előző évben a tengelyes szimmetria arányosságát és kiegyensúlyozottságát figyelhettük meg. Hasonlóan szépek a középpontosan szimmetrikus alakzatok is.







7. KÖZÉPPONTOS ÉS TENGELYES SZIMMETRIA

1. PÉLDA

Adva van három pont a következő koordinátáikkal: $A(-3; -2)$, $B(3; 0)$, $C(1; 4)$. Adjuk meg a D pont koordinátáit úgy, hogy a négy pont egy középpontosan szimmetrikus négyszög csúcsait adja!

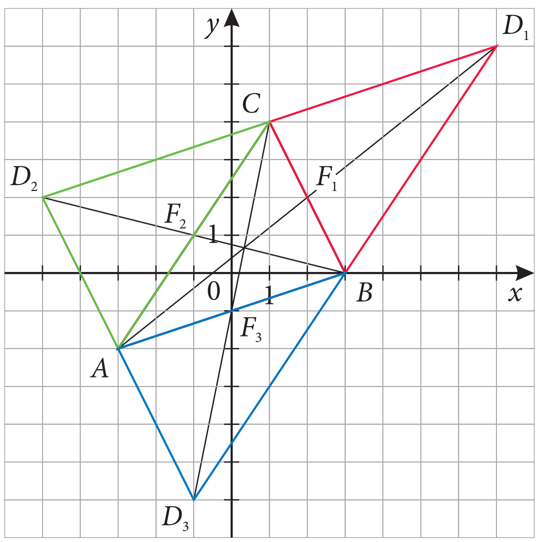
Megoldás

Három eset lehetséges.

I. Ha a B és a C egymás középpontos tükörképei, akkor a középpont a BC szakasz F_1 felezőpontja lesz.

II. Ha az A és a C egymás középpontos tükörképei, akkor a középpont az AC szakasz F_2 felezőpontja lesz.

III. Ha az A és a B egymás középpontos tükörképei, akkor a középpont az AB szakasz F_3 felezőpontja lesz.



Készítsünk ábrát!

Az ábráról leolvashatók a fontos pontok koordinátái.

A felezőpontok: $F_1(2; 2)$, $F_2(-1; 1)$, illetve $F_3(0; -1)$.

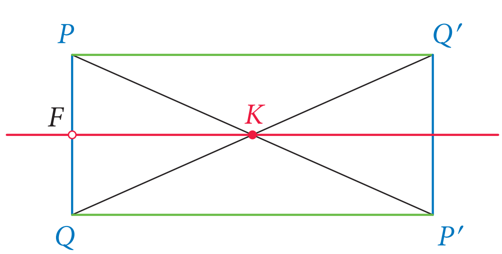
A hiányzó negyedik csúcs:
$D_1(7; 6)$, $D_2(-5; 2)$, illetve $D_3(-1; -6)$.

Három paralelogrammát kaptunk megoldásként: ABD_1C, BCD_2A, CAD_3B.

2. PÉLDA

Milyen K pontra kell tükröznünk a PQ szakaszt, ha azt szeretnénk, hogy a $PQP'Q'$ négyszög téglalap legyen?

Megoldás



Ha K nem illeszkedik a PQ egyenesre, akkor $PQP'Q'$ négyszög paralelogramma. Ez a paralelogramma akkor lesz téglalap, ha az átlói (illetve az átlóinak a fele) egyenlő hosszúságú. Vagyis olyan K pontot keresünk, amelyre $PK = QK$. Ezek a K pontok a PQ szakasz f felezőmerőlegesén találhatók.

Megmutatjuk, hogy a PQ szakasz F felezőpontja kivételével a felezőmerőleges minden pontja megfelelő lesz.

Legyen egy ilyen tetszőleges pont a K! Ekkor $PK = QK$, vagyis $PP' = QQ'$ is teljesül a tükrözés miatt. Olyan $PQP'Q'$ négyszöget kaptunk, amelyben az átlók egyenlő hosszúságúak, és felezik is egymást. Tehát a $PQP'Q'$ valóban téglalap.

III. 7. KÖZÉPPONTOS ÉS TENGELYES SZIMMETRIA

FELADATOK

1. Keresd meg azokat a számjegyeket, amelyek lerajzolhatók középpontosan szimmetrikusan!

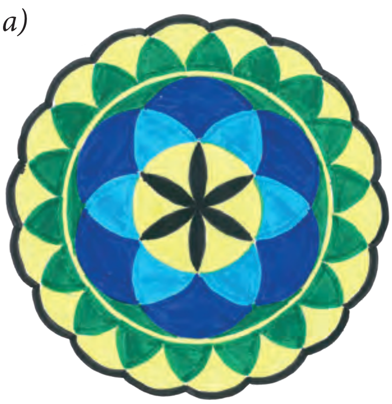
2. Melyek azok a nyomtatott nagybetűk, amelyek középpontosan szimmetrikusan is lerajzolhatók?

3. Készíts nyomtatott nagybetűkből olyan betűsorokat, amelyek középpontosan szimmetrikusak!

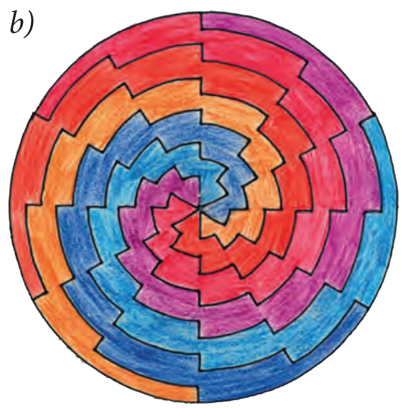
4. Rajzolj a füzetedbe olyan középpontosan szimmetrikus nyolcszöget, amelyik nem tengelyesen szimmetrikus! Sorold fel néhány tulajdonságát!

5. A következő ábrákat körző és vonalzó segítségével hetedikesek készítették. Csoportosítsd a képeket az eddig tanult szimmetriák szerint!

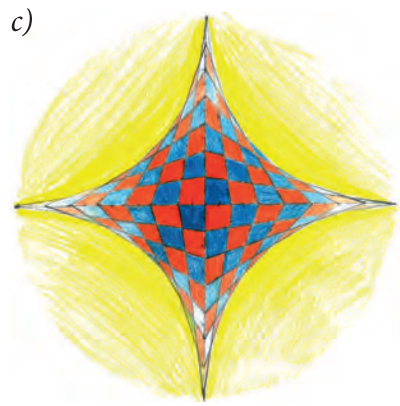
a)



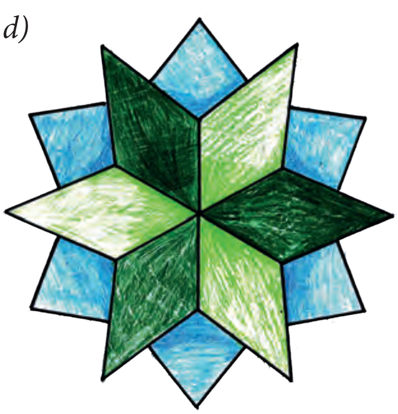
b)



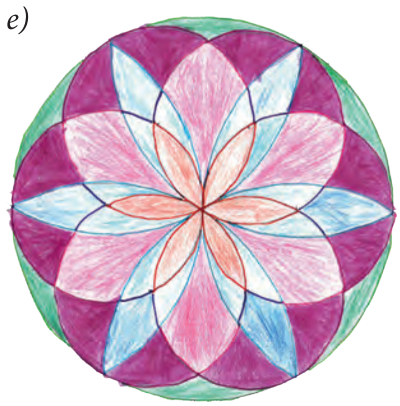
c)



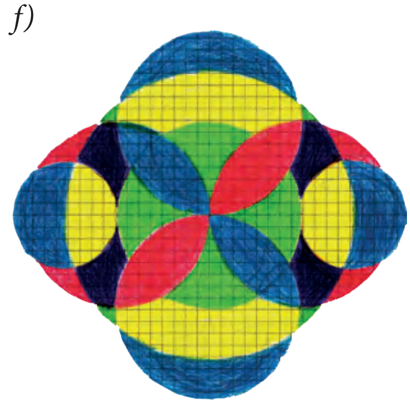
d)



e)



f)



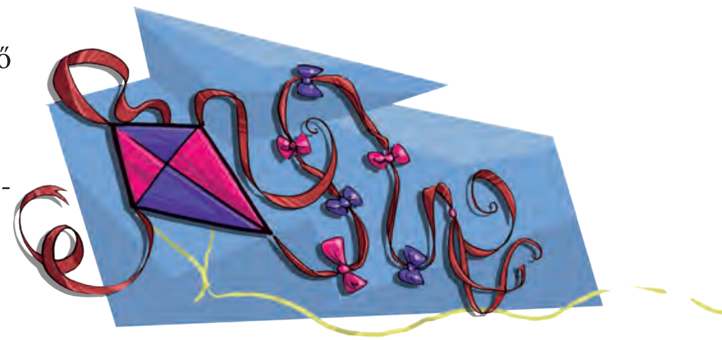
6. Válaszd ki a megadott pontok közül azt a négyet, amelyik középpontosan szimmetrikus négyszöget határoz meg! Ha tudsz, akkor válassz többféleképpen is!

$A(-5; 2)$; $B(-1; 1)$; $C(2; 0)$; $D(0; 4)$; $E(3; 2)$; $F(5; 2)$; $G(3; 3)$; $H(4; 5)$.

8. PARALELOGRAMMA ÉS DELTOID

Mi lehet a magyarázata annak, hogy a címben szereplő két négyszöget együtt említjük?

A legegyszerűbb sokszög a háromszög.
Milyen négyszöget kaphatunk, ha a háromszöget tükrözéssel megduplázzuk?

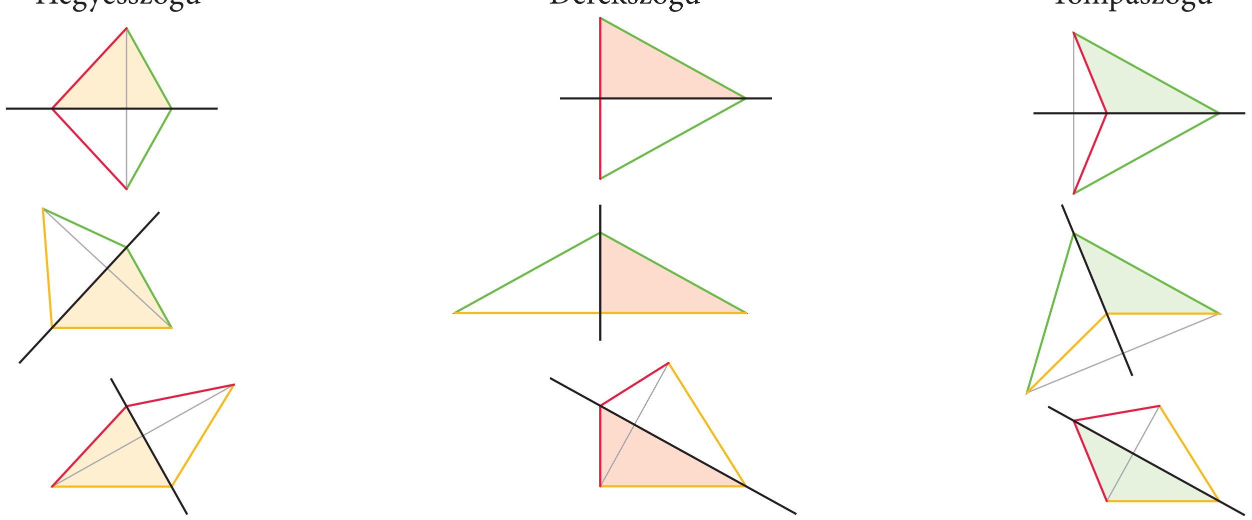


1. PÉLDA

Tükrözzük tengelyesen a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszöget mindhárom oldalegyenesére! Milyen sokszöget kapunk az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítésével?

Megoldás

Hegyesszögű — Derékszögű — Tompaszögű



Ezzel az egyesítéssel általában deltoidot kapunk. Kivételnek számít, ha a derékszögű háromszög befogóira tükrözünk, mivel ekkor egyenlő szárú háromszög lesz az egyesítés eredménye.
Amikor a tompaszögű háromszögnek nem a leghosszabb oldalára tükrözünk, konkáv deltoidot kapunk.

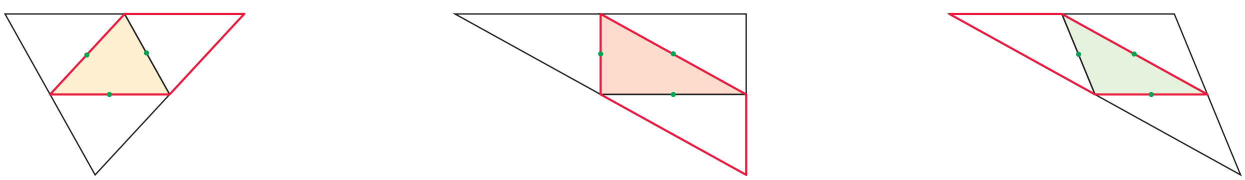
PARALELOGRAMMA ÉS DELTOID

2. PÉLDA

Tükrözzük középpontosan a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszöget mindhárom oldalfelező pontjára! Milyen sokszöget kapunk az eredeti és a képként kapott háromszög egyesítésével?

Megoldás

Hegyesszögű　　Derékszögű　　Tompaszögű



Ha az eredeti és a képként kapott háromszöget egyesítjük, minden esetben paralelogrammát kapunk.

Megfogalmazunk néhány fontos észrevételt:

Ha egy négyszög középpontosan szimmetrikus, akkor az paralelogramma.
Ha egy négyszög tengelyesen szimmetrikus valamelyik átlójára, akkor az deltoid.
Ha egy deltoid középpontosan szimmetrikus, akkor az rombusz.
Ha egy paralelogramma tengelyesen szimmetrikus az átlójára, akkor az rombusz.

FELADATOK

1. Miért nem lehet egy háromszög középpontosan tükrös?

2. *a)* Rajzolj öt olyan pontot, amelyek középpontosan szimmetrikus helyzetűek!
b) Lehet-e egy ötszög középpontosan szimmetrikus?

3. Rajzolj páros oldalszámú középpontosan szimmetrikus sokszögeket! Konkáv és konvex sokszögek is legyenek a rajzaid között!

4. Fogalmazzatok meg olyan tulajdonságokat, amelyek a paralelogrammára és a deltoidra is érvényesek!

5. Igazak-e a következő állítások?
a) Ha egy sokszög páros oldalszámú, akkor középpontosan tükrös.
b) Ha egy sokszög középpontosan tükrös, akkor páros oldalszámú.
c) Ha egy sokszög szabályos, akkor középpontosan szimmetrikus.
d) Ha egy sokszög szabályos, akkor tengelyesen tükrös.
e) Ha egy sokszög minden oldalának van párhuzamos párja, akkor az középpontosan tükrös.
f) Ha egy sokszög minden oldalának van vele egyenlő hosszúságú párja, akkor az középpontosan tükrös.

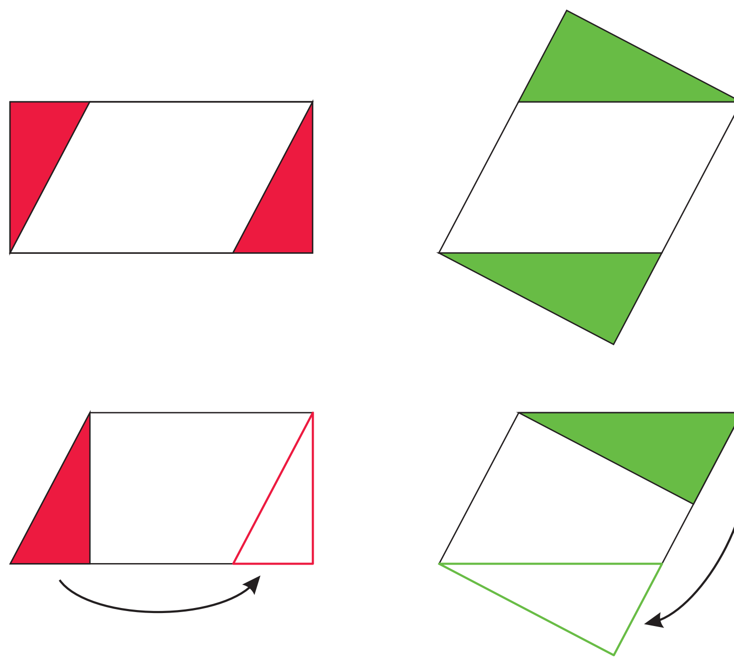
9. A PARALELOGRAMMA TERÜLETE

CSOPORTMUNKA

Az ábra egy vasúti kocsi 120 cm széles ablakát szemlélteti. Vannak olyan személykocsik, amelyek ablakai lehúzhatók, ha az utasok szellőztetni szeretnének. Az ábrán látható ablaküveg 24 cm-re van lehúzva.

Vitassátok meg a rendelkezésetekre álló adatok alapján, hogy szerintetek mekkora területű a rés! Ha nem tudjátok pontosan megmondani, akkor próbáljatok becslést adni!

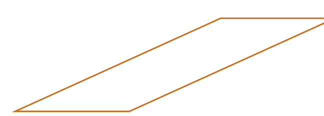
Ha egy paralelogramma területét akarjuk meghatározni, akkor téglalapba foglalhatjuk. Ezt kétféleképpen tehetjük meg, ahogy az ábra is mutatja.



Az így kapott téglalap területéből kivonjuk a két piros, illetve a két zöld derékszögű háromszög területét, amelyek szintén egy-egy téglalapra egészítik ki egymást. Vagyis a paralelogramma területét azért tudjuk meghatározni, mert a téglalap területét már ki tudjuk számolni.

A paralelogramma területét meghatározhatjuk átdarabolással is. Vágjuk le a paralelogrammából a beszínezett derékszögű háromszöget, és helyezzük át úgy, ahogy az ábrán látható! Az így kapott téglalap területét már ki tudjuk számítani.

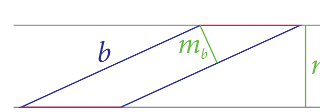
A kétféleképpen kapott téglalapok nem egybevágók, de a területük egyenlő, hiszen ugyanazt a paralelogrammát daraboltuk. Van olyan paralelogramma, amelyiknél a rajzon mutatott kétféle darabolás nem valósítható meg.



A téglalapok területének kiszámításához nem elegendő a paralelogramma oldalhosszainak az ismerete, a párhuzamos oldalainak a távolságát is ismernünk kell.

A paralelogramma párhuzamos oldalegyeneseinek távolságát a paralelogramma magasságának nevezzük.

Az a oldalhoz tartozó magasságot m_a, a b oldalhoz tartozó magasságot m_b jelöli.



Minden paralelogrammára igaz, hogy **területképlete:** $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$.

Vagyis **a paralelogramma területét az oldalhossz és a hozzá tartozó magassághossz szorzata adja.**

1. PÉLDA

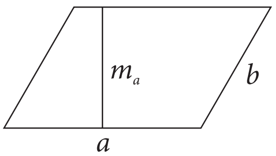
a) A paralelogramma egyik oldalának hossza 14 cm, a hozzá tartozó magasságé 6 cm, a másik oldal hossza pedig 8 cm. Mekkora magasság tartozik ehhez az oldalhoz?

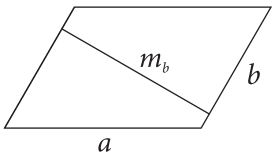
b) A paralelogramma egyik oldalának hossza 16 cm, a hozzá tartozó magasságé 9 cm, a másik oldal hossza pedig 6 cm. Mekkora magasság tartozik ehhez az oldalhoz?

Megoldás

a) Kiszámíthatjuk a paralelogramma területét a paralelogramma oldalának és a hozzá tartozó magasságának ismeretében: $T = 14 \cdot 6 = 84$ (cm^2).
A terület és a másik oldal ismeretében kiszámítjuk a hiányzó magasság hosszát:
$84 = 8 \cdot m_b$. Vagyis $m_b = 10{,}5$ cm.

b) Ez előző gondolatmenetet követve: $T = 16 \cdot 9 = 144$ (cm^2). A hiányzó magasságra felírhatjuk a következő összefüggést: $144 = 6 \cdot m_b$. Ezek alapján azt gondolhatnánk, hogy $m_b = 24$ cm.

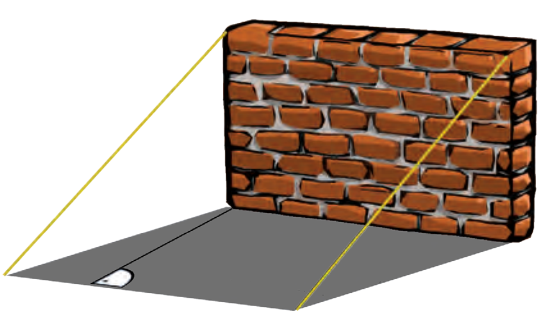




Vizsgáljuk meg, hogy a kapott paralelogrammák léteznek-e!
A paralelogramma magassága nem lehet hosszabb, mint a nem hozzá tartozó oldal, vagyis $b \geq m_a$, $a \geq m_b$. Téglalap esetében lesz közöttük egyenlőség.
Ezek alapján az *a)* megoldás helyes. A paralelogramma létezik, hiányzó magasságának a hossza 10,5 cm.
A *b)* részben kapott $m_b = 24$ cm, amely azonban nem lehet hosszabb a nem hozzá tartozó oldalnál, ami 16 cm-es. Sőt, már a számolás előtt is észrevehető, hogy a 9 cm-es magasság nem lehet hosszabb a 6 cm-es oldalnál. Vagyis ez a paralelogramma nem létezik, így a hiányzó magasságának a hosszát sem adhatjuk meg!

2. PÉLDA

Egy téglalap alakú faldarab árnyéka a vízszintes talajon paralelogramma alakú. A fal szélessége 4,4 m. Az árnyék a fal tövétől 2,5 méterre nyúlik. Mekkora részt árnyékol a fal?

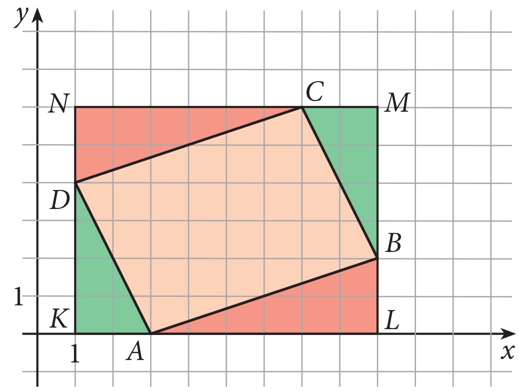


Megoldás

A szöveget értelmezve kiderül, hogy a paralelogramma egyik oldalának hossza 4,4 m, a hozzá tartozó magasságé pedig 2,5 m.
A paralelogramma területe: $T = 4{,}4 \cdot 2{,}5 = 11$. Vagyis a fal egy 11 m^2-es területet árnyékol.

3. PÉLDA

Egy paralelogramma négy csúcsának koordinátái $A(3; 0)$, $B(9; 2)$, $C(7; 6)$, $D(1; 4)$. Mekkora a területe?



Megoldás

Most sajnos nem ismerjük a paralelogramma oldalainak hosszát, ezért a feladatot kiegészítéssel, átdarabolással oldjuk meg.
Foglaljuk a paralelogrammát téglalapba! A középpontos szimmetria miatt az *ADK* és a *BMC* háromszögekből egy $2 \cdot 4$-es téglalap rakható ki. Hasonlóan az *ALB* és *CND* háromszögekből egy $2 \cdot 6$-os téglalapot tudunk kirakni.
$6 \cdot 8 - 2 \cdot 4 - 2 \cdot 6 = 48 - 8 - 12 = 28$ területegység.

FELADATOK

1. Hány négyzetdeciméter a területe a következő paralelogrammáknak?
a) $a = 12$ dm, $m_a = 3{,}8$ dm;
b) $b = 21{,}2$ dm, $m_b = 15$ dm;
c) $a = 85$ cm, $m_a = 1{,}4$ m;
d) $b = 2{,}8$ m, $m_b = 140$ cm.

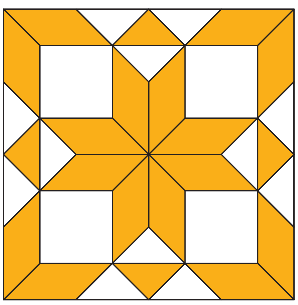
2. Add meg a hiányzó oldal vagy magasság hosszát!
a) $a = 8{,}8$ cm, $m_a = 2{,}5$ cm, $b = 11$ cm;
b) $a = 1{,}2$ m, $b = 0{,}8$ m, $m_b = 0{,}6$ m;
c) $a = 51$ dm, $m_a = 16$ dm, $m_b = 17$ dm;
d) $a = 24$ mm, $b = 16$ mm, $m_b = 9$ mm.

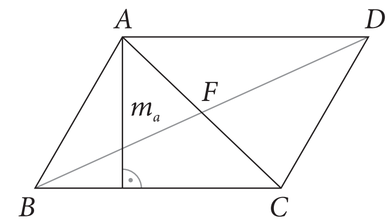
3. Egy 49 hektáros paralelogramma alakú terület két párhuzamos oldalának távolsága 560 méter. Milyen hosszúak ezek az oldalak?

4. Hogyan változik a paralelogramma területe, ha
a) az alapjának a hosszát kétszeresére növeled;
b) az egyik magasságának a hosszát a harmadára csökkented;
c) az alapját és a hozzá tartozó magasság hosszát is kétszeresére növeled;
d) az alapjának a hosszát háromszorosára, a hozzá tartozó magasság hosszát a felére változtatod?

5. Egy rombusz alakú búzaföld kerülete 2,8 km, a területe 392 000 m^2.
a) Milyen messze van a földterület két széle egymástól?
b) Mennyivel nagyobb egy ugyanilyen kerületű, négyzet alakú terület?

6. A képen látható 20 cm oldalú négyzet alakú mintát egyenlő szárú derékszögű háromszög, négyzet és paralelogramma alakú csempékből állítottuk össze. Mekkora egy paralelogramma területe?



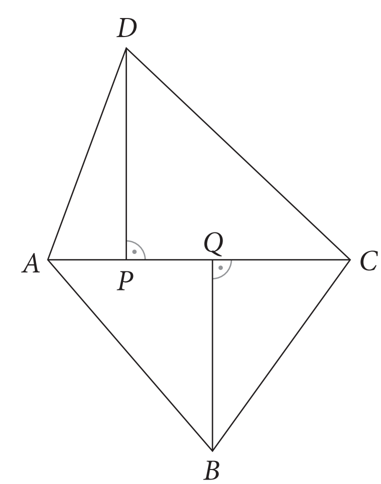


Minden *ABCD* paralelogramma megkapható, ha az *ABC* háromszöget az *AC* oldal felezőpontjára tükrözzük.
Az ábrán bejelölt m_a a paralelogramma egyik magassága. Az *ABC* háromszög *A* csúcsa és a *BC* oldalegyenes távolsága m_a. Azt is mondhatjuk, hogy m_a az *ABC* háromszög *A* csúcsából induló *BC* oldalhoz tartozó magassága.
Mivel a paralelogramma területe $a \cdot m_a$, és a tükrözés miatt az *ABC* háromszög egybevágó a *CDA* háromszöggel, ezért az *ABC* háromszög területe pontosan a paralelogramma területének a felével egyenlő.
Vagyis a háromszög területét megkapjuk, ha valamelyik oldal és a hozzátartozó magasság hosszának szorzatát elfelezzük.

A háromszög területképlete: $T = \frac{a \cdot m_a}{2} = \frac{b \cdot m_b}{2} = \frac{c \cdot m_c}{2}$.

1. PÉLDA

Az ábra egy négyszög alakú gazdaság vázlatát mutatja. A bejelölt utak hosszát ismerjük: $AC = 120$ m, $BQ = 76$ m, $DP = 84$ m. Mekkora a gazdaság területe?



Megoldás

Az *ABC* háromszögnek és az *ADC* háromszögnek is oldala az adott hosszúságú *AC* út. Mindkét háromszögben az ehhez az oldalhoz tartozó magasság hosszát is ismerjük. A kérdéses területet a két háromszög területének az összege adja.

$$T = \frac{120 \cdot 76}{2} + \frac{120 \cdot 84}{2} = \frac{120}{2} \cdot (76 + 84) = 60 \cdot 160 = 9600.$$

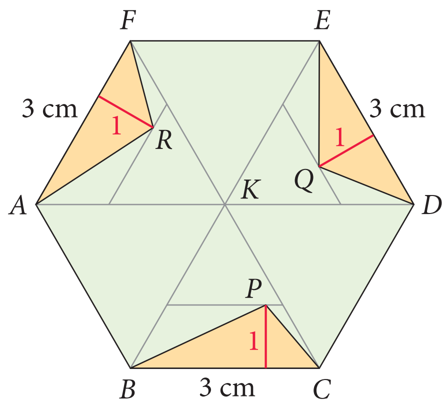
Vagyis a négyszög területe 9600 m^2.

2. PÉLDA

A 3 cm oldalhosszúságú *ABCDEF* szabályos hatszög szimmetria-középpontja a *K* pont. Tudjuk, hogy a *P* pont a *BCK* háromszög belsejében, a *BC* oldaltól 1 cm távolságra található párhuzamos szakaszon van. Hasonlóan a *Q* pont a *DEK*, az *R* pont pedig az *AFK* háromszögben található. Mekkora az *ABPCDQEFR* kilencszög területe, ha a hatszög területe kerekítve 23,4 cm^2?

Megoldás

Rajzoljunk ábrát a szöveg alapján (az ábrát lásd a következő oldalon)!
A *BCP*, *DEQ* és *AFR* háromszögeknek 3 cm-es az az oldaluk, amelyik a hatszögnek is oldala. Mivel a *P*, *Q* és *R* pontok ezekkel az oldalakkal párhuzamos szakaszokon vannak 1 cm-re az oldalaktól,



ezért mindhárom pontból 1 cm hosszúságú magasság húzható a 3 cm-es oldalhoz. Vagyis a P, Q és R pontok helyzetétől függetlenül ezeknek a háromszögeknek a területe:

$$t = \frac{3 \cdot 1}{2} = 1{,}5\ (\text{cm}^2).$$

A 23,4 cm^2 területű szabályos hatszögből három 1,5 cm^2-es háromszöget kell kivágnunk, hogy a kilencszöget megkapjuk.

Vagyis a kilencszög területe: $T = 23{,}4 - 3 \cdot 1{,}5 = 18{,}9\ (\text{cm}^2)$.

FELADATOK

1. Mekkora a területe a következő háromszögeknek?
a) $a = 67$ dm, $m_a = 38{,}2$ dm;
b) $b = 5{,}8$ dm, $m_b = 32$ dm;
c) $c = 84$ cm, $m_c = 0{,}74$ m;
d) $a = 3{,}72$ m, $m_a = 17$ dm.

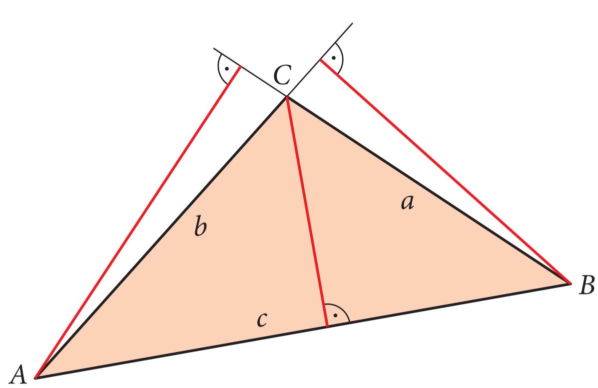
2. Adj meg a háromszögben egy hiányzó oldal vagy egy hiányzó magasság hosszát!
a) $a = 10{,}2$ cm, $m_a = 2{,}4$ cm, $b = 12{,}24$ cm;
b) $a = 14{,}4$ m, $b = 9{,}6$ m, $m_b = 7{,}2$ m;
c) $a = 16{,}2$ km, $m_a = 10{,}8$ km, $b = 14$ km;
d) $a = 0{,}3$ cm, $m_a = 0{,}22$ cm, $c = 0{,}42$ cm.

3. Hogyan változik a háromszög területe, ha
a) az egyik oldalának a hosszát háromszorosára növeled, a hozzá tartozó magasság hosszát viszont nem változtatod;
b) az egyik magasságának a hosszát a felére csökkented, a hozzá tartozó oldal hosszát viszont nem változtatod;
c) az oldalát és a hozzá tartozó magasság hosszát is felére csökkented;
d) az oldalának a hosszát kétszeresére, a hozzá tartozó magasság hosszát a felére változtatod?

4. Egy derékszögű háromszög hosszabb befogójának felezőpontjától a háromszög határoló vonalán haladva a szemközti csúcs 40, illetve 56 cm-re van. Az átfogó és a rövidebb befogó együtt 64 cm.
a) Mekkora a háromszög kerülete?
b) Mekkora a háromszög területe?

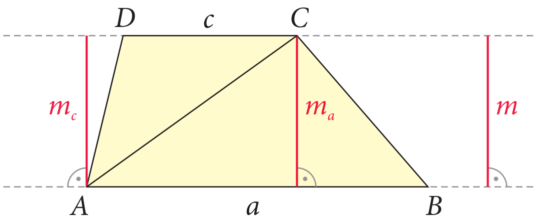
5. Egy szabályos háromszög kerülete 12 cm, magasságát 3,6 cm-nek mértük. Mekkora a területe?

6. Mérd meg az ábrán látható háromszög megfelelő adatait, majd számold ki a területét!



A TRAPÉZ TERÜLETE

Az egyik átlója mentén minden trapézt két háromszögre vághatunk. Az ABC háromszög a oldalához az m_a, az ACD háromszög c oldalához az m_c magasság tartozik.



Trapéz a cirkuszban

Mindkét magasság a trapéz párhuzamos oldalainak a távolságát adja, ezért $m_a = m_c$.
Ezt jelöljük m-mel.

A trapéz párhuzamos oldalegyeneseinek a távolságát a trapéz magasságának nevezzük.

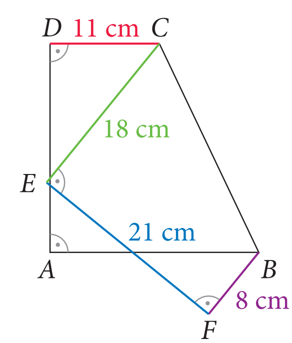
A trapéz területét a két háromszög területének összege adja. Vagyis a **trapéz területképlete:**

$$T = \frac{a \cdot m}{2} + \frac{c \cdot m}{2} = \frac{(a + c) \cdot m}{2}.$$

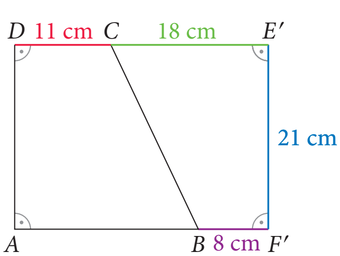
A trapéz területét úgy kapjuk, ha a két párhuzamos oldalának összegét megszorozzuk a trapéz magasságával, majd az eredményt elosztjuk kettővel.

1. PÉLDA

Egy téglalap alakú papírt az ábra alapján kettéhajtottunk. Néhány adatot feltüntettünk. Adjuk meg ezek alapján a két rész területét!



Megoldás



Rajzoljuk le az ábrát úgy, mintha visszahajtottuk volna a lapot az eredeti állapotába!
Az $ABCD$ és a $BF'E'C$ trapéz területét kell megadnunk. Ezeknek a trapézoknak az egyik szára merőleges az alapra. Az ilyen derékszögű trapézok magasságának a hossza pontosan a merőleges szár hosszával egyenlő.

A $BF'E'C$ trapéz területe: $T_1 = \dfrac{(8 + 18) \cdot 21}{2} = 273\ (\text{cm}^2)$.

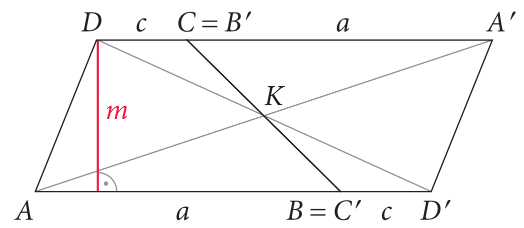
Az $ABCD$ trapéz AB alapjának a hosszát megkapjuk, ha a DE' hosszából elvesszük a BF' hosszát.
Vagyis $AB = (11 + 18) - 8 = 21$ (cm).

Az $ABCD$ trapéz területe: $T_2 = \dfrac{(21 + 11) \cdot 21}{2} = 336\ (\text{cm}^2)$.

2. PÉLDA

Már korábban láttuk, hogy ha az $ABCD$ trapézt a BC szár K felezőpontjára tükrözzük, akkor az eredeti trapéz és a képként kapott trapéz együtt egy paralelogrammát alkot. Ezt az állítást felhasználva igazoljuk a trapéz területképletét!

Megoldás



Az ábrán az $ABCD$ trapézt tükröztük a BC szár K felezőpontjára, ezért az $AD'A'D$ paralelogramma. Tudjuk, hogy az AD' oldal hossza $a + c$, a hozzá tartozó magasság pedig m.
Használjuk a paralelogramma területképletét: $(a + c) \cdot m$!
Ez a tükrözés miatt kétszerese az $ABCD$ trapéz területének, ezért a trapéz területe: $T = \dfrac{(a+c)\cdot m}{2}$.

FELADATOK

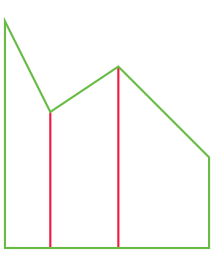
1. Mekkora a trapéz területe, ha
a) $a = 28$ cm, $c = 12$ cm, $m = 17$ cm;
b) $a = 33$ m, $c = 27$ m, $m = 15$ m;
c) $a = 450$ dm, $c = 31$ m, $m = 4200$ cm;
d) $a = 12$ cm, $c = 0{,}07$ m, $m = 1{,}1$ dm?

2. Mekkora a trapéz magassága, ha
a) $a = 32$ cm, $c = 14$ cm, $T = 184\ \text{cm}^2$;
b) $a = 47$ m, $c = 29$ m, $T = 646\ \text{m}^2$?

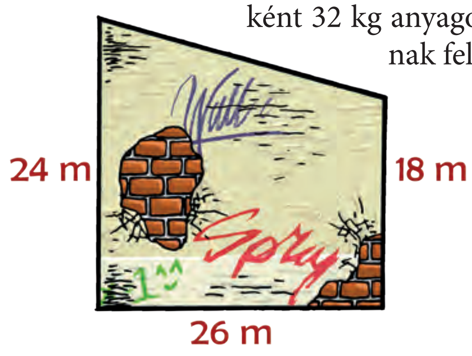
3. Mekkora a trapéz hiányzó alapjának hossza, ha
a) $a = 47$ cm, $m = 18$ cm, $T = 612\ \text{cm}^2$;
b) $a = 102$ m, $m = 52$ m, $T = 3848\ \text{m}^2$?

4. Melyek igazak a következő állítások közül? A hamis állításokat javítsd, hogy igazak legyenek!
a) A trapézt az egyik átlója két háromszögre vágja.
b) A trapéz szemközti oldalegyeneseinek távolságát a trapéz magasságának nevezzük.
c) A trapéz területét úgy számíthatjuk ki, hogy a két párhuzamos oldalának az összegét megszorozzuk a trapéz magasságával.
d) Van olyan trapéz, amelynek a területét három oldal ismeretében is ki lehet számítani.

5. Mekkora az ábrán látható sokszög területe, ha a függőleges szakaszok hossza 10 cm, 6 cm, 8 cm és 4 cm, és a szomszédos függőleges szakaszok távolsága 2 cm, 3 cm és 4 cm?

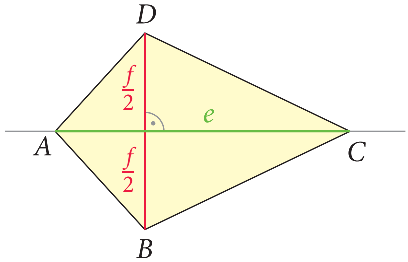


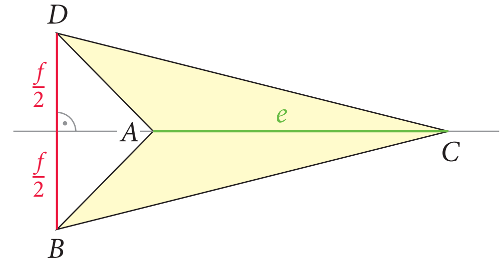
6. Egy tűzfal trapéz alakú. Mennyi vakolatra lesz szükség a felújításnál, ha m^2-enként 32 kg anyagot használnak fel?



III. 12. A DELTOID TERÜLETE

Tudjuk, hogy a deltoidoknak van szimmetriatengelyük, amely mentén minden deltoid két egybevágó háromszögre vágható.





A konvex és a konkáv *ABCD* deltoid esetén is az $ABC\triangle \cong ADC\triangle$. (Így jelöljük röviden, hogy az *ABC* háromszög egybevágó az *ADC* háromszöggel.)

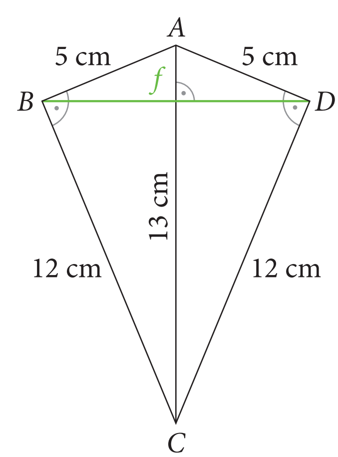
Az *ABC* háromszög *e* oldalához $\frac{f}{2}$ magasság tartozik, ezért a területe: $\frac{e \cdot \frac{f}{2}}{2} = \frac{e \cdot f}{4}$.

A deltoid területe ennek a kétszeresével egyenlő, vagyis **a deltoid területképlete: $T = \frac{e \cdot f}{2}$**.

A deltoid területét úgy kapjuk, ha a két átlójának a hosszát összeszorozzuk, és a szorzat felét vesszük.

1. PÉLDA

Az ábrán látható adatokat méréssel kaptuk. Határozzuk meg mérés nélkül a *BD* átló *f* hosszát!



Megoldás

A deltoid területe felírható a tanult módon: $T = \frac{13 \cdot f}{2}$.

Ez a deltoid az *AC* átlója mentén két egybevágó derékszögű háromszögre vágható, ezért a területe:

$T = 2 \cdot \frac{5 \cdot 12}{2} = 5 \cdot 12 = 60$.

A kétféleképpen kapott terület egyenlő: $\frac{13 \cdot f}{2} = 60$.

Ebből következik, hogy $f = \frac{120}{13}$ (cm).

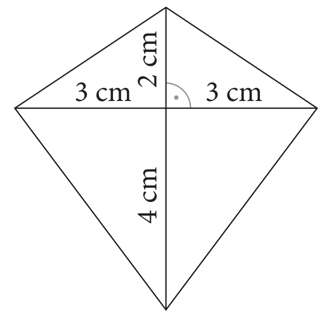
2. PÉLDA

A 18 cm^2 területű deltoid átlói egyenlő hosszúak, és az egyik harmadolja a másikat. Rajzoljuk le a deltoidot!

Megoldás

A deltoid területképletét használjuk, de tudjuk, hogy $e = f$, ezért $18 = \frac{e \cdot e}{2}$.

Mivel $e \cdot e = 36$, ezért az átlók hossza 6 cm.
Bár a deltoid egyik átlója mindig felezi a másikat, de most egy olyan adattal is rendelkezünk, mely szerint a másik harmadolva metszi az egyiket. Ezek ismeretében elkészíthető a rajz:



FELADATOK

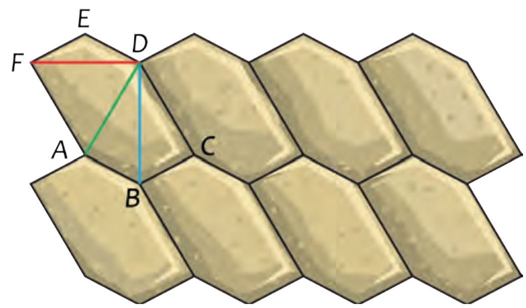
1. Hogyan változik a deltoid területe, ha
a) az egyik átlóját kétszeresére növeljük, a másik átló hosszát nem változtatjuk;
b) mindkét átló hosszát duplázzuk;
c) mindkét átló hosszát harmadoljuk;
d) az egyik átlóját kétszeresére növeljük, a másik átló hosszát felére csökkentjük?

2. Számold ki a deltoid területét, ha adott az e és f átlójának hossza!
a) $e = 16$ cm, $f = 28$ cm;
b) $e = 32$ m, $f = 14$ m;
c) $e = 64$ dm, $f = 7$ dm;
d) $e = 56$ mm, $f = 8$ mm.

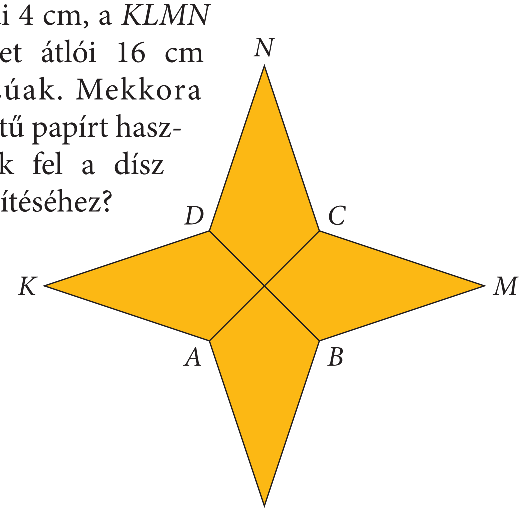
3. Egy 5 cm oldalhosszúságú rombusz átlóinak hossza 6 cm, illetve 8 cm. Milyen távol van egymástól a két párhuzamos oldala?

4. Egy rombusz alakú szántóföld két párhuzamos széle 672 méterre van egymástól. A terület két távoli csúcsa között 2400 méter, a két közelebbi csúcsa között pedig 700 méter a távolság. Mekkora a szántóföld oldalhossza?

5. Egy parkolót az ábrán látható térkövekkel burkoltak. A kövekből összesen 1200 darabot használtak fel. Mekkora részt burkoltak összesen? Az ábra néhány térkő felülnézetét mutatja. Tudjuk, hogy az AD átló két egybevágó deltoidra vágja a térkövet, illetve, hogy a BD átló hossza 25 cm, a DF átló hossza pedig 20 cm.



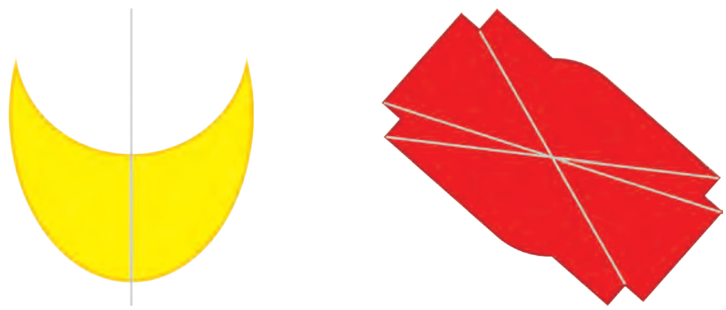
6. A képen látható karácsonyfadíszt színes papírból szeretnénk kivágni. A minta négy egybevágó deltoidból áll. Az $ABCD$ négyzet oldalai 4 cm, a $KLMN$ négyzet átlói 16 cm hosszúak. Mekkora területű papírt használunk fel a dísz elkészítéséhez?



III. 13. KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

Már megismerkedtünk a tengelyes és a középpontos szimmetriával. Most tovább folytatjuk a szimmetrikus alakzatok vizsgálatát, hogy újabb tulajdonságaikat is felfedezzük.
Emlékeztető:

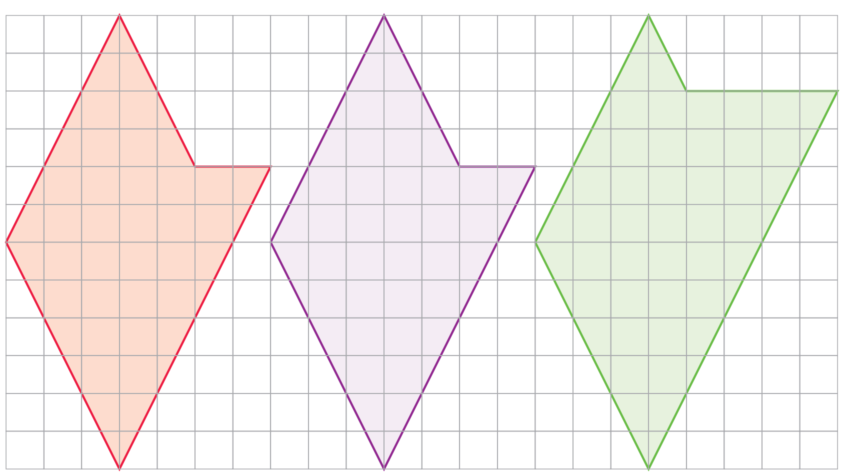
- Azt a síkbeli alakzatot nevezzük tengelyesen szimmetrikusnak, amelyhez van olyan tengelyes tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.
- Azt a síkbeli alakzatot nevezzük középpontosan szimmetrikusnak, amelyhez van olyan középpontos tükrözés, amely az alakzatot önmagába viszi.



CSOPORTMUNKA

Kirakós játék

Vágjátok ki az ábrán látható síkidomokat kartonpapírból! A négyzetrács segít, hogy pontos másolatokat készítsetek.



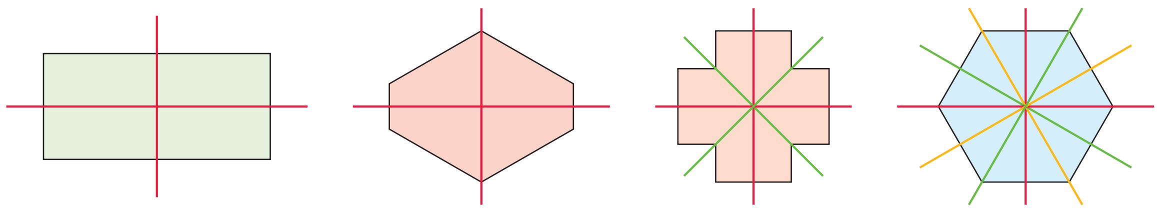
a) Hogyan lehet az első és a második síkidomot egymáshoz illeszteni, hogy középpontosan szimmetrikus alakzatot kapjunk?
b) Hogyan lehet az első és a második síkidomot egymáshoz illeszteni, hogy tengelyesen szimmetrikus alakzatot kapjunk?
c) Hogyan lehet az első és a harmadik síkidomot egymáshoz illeszteni, hogy tengelyesen szimmetrikus alakzatot kapjunk?

Dolgozzatok két-háromfős csoportokban! A síkidomok az összeillesztésnél akár meg is fordíthatók. Ha a három kérdésből kettőre megtaláljátok a választ, az már nagyon jó!

1. PÉLDA

Rajzoljunk olyan sokszögeket, amelyek középpontosan és tengelyesen is szimmetrikusak! Mit figyelhetünk meg?

Megoldás

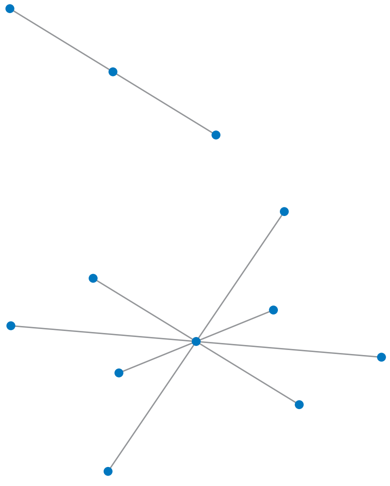


Megfigyelhető, hogy a tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus sokszögeknek legalább két szimmetriatengelye van.
Ha berajzoltunk egy szimmetriatengelyt, akkor a szimmetria-középpontban a rá merőleges egyenes is szimmetriatengely lesz.

2. PÉLDA

Adjunk válaszokat a következő kérdésekre!
a) Van-e három pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzat?
b) Van-e középpontosan szimmetrikus háromszög?
c) Van-e középpontosan szimmetrikus négyszög?
d) Van-e páratlan sok pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzat?
e) Van-e páratlan sok csúcsú, középpontosan szimmetrikus sokszög?

Megoldás



a) Három pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzatot csak úgy tudunk létrehozni, ha az egyik pont maga a szimmetria-középpont, vagyis a másik kettő között éppen középen található.
b) Középpontosan szimmetrikus háromszög nem létezik, hiszen ha lenne, akkor mindegyik oldalának volna párhuzamos párja. Három oldal esetén ez nem lehetséges.
c) Ilyen négyszög van. Ezek a paralelogrammák.
d) Páratlan sok pontból álló középpontosan szimmetrikus alakzatot csak úgy tudunk létrehozni, ha az egyik pont a szimmetria-középpont lesz, a többiek pedig párosával, erre középpontosan szimmetrikusan helyezkednek el.
e) Ilyen sokszög nem létezik. Az indoklást a háromszög esetén leírtakhoz hasonlóan fogalmazhatjuk meg.

III. 13. KÖZÉPPONTOSAN SZIMMETRIKUS ALAKZATOK

FELADATOK

1. Rajzold le néhány autó márkajelzését a füzetedbe! Írd mellé, ha valamelyik tengelyesen vagy középpontosan szimmetrikus!

2. Gyűjts egyszerű, középpontosan szimmetrikus ábrákat a környezetedből! Rajzold le őket!

3. Melyik igaz? Melyik hamis?

a) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor páros oldalszámú.
b) Ha egy sokszög páros oldalszámú, akkor középpontosan szimmetrikus.
c) Ha egy sokszög tengelyesen szimmetrikus, akkor páros oldalszámú.
d) Ha egy sokszög páros oldalszámú, akkor tengelyesen szimmetrikus.
e) Ha egy sokszögben minden oldalnak van párhuzamos párja, akkor a sokszög középpontosan szimmetrikus.
f) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor minden oldalának van párhuzamos párja.

4. *a)* A sakktáblát két színnel színezik. A színeket is figyelembe véve milyen szimmetriája van a sakktáblának?
b) Egy hatszor hatos táblát színezz ki két színnel úgy, hogy tengelyesen szimmetrikus legyen! Tervezz több ábrát is!
c) Egy négyszer négyes táblát színezz ki három színnel úgy, hogy középpontosan szimmetrikus legyen!

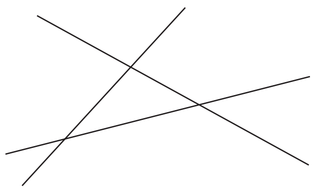
5. Pentominónak nevezzük azokat a sokszögeket, amelyek öt darab egység (például 1 cm^2) területű négyzetből rakhatók össze. A négyzeteket az éleik mentén illesztheted egymáshoz.

a) Rajzold le a füzetedbe az összes pentominót! Csak azokat tekintsd különbözőnek, amelyek elforgatással és tükrözéssel sem hozhatók fedésbe egymással! Törekedj arra, hogy megtaláld mind a tizenkettőt!
b) Csoportosítsd őket a szimmetriájuk szerint!

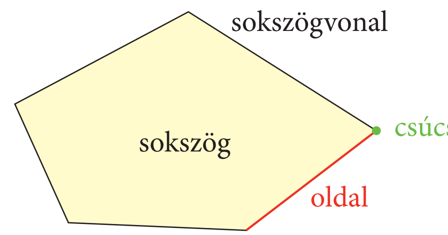
6. Válogasd szét a képeket! Melyik középpontosan szimmetrikus?




14. SOKSZÖGEK



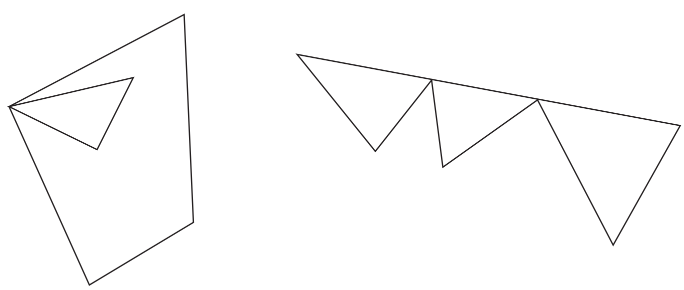
A sík darabolásával síkidomokat hozhatunk létre. Az ábrán három olyan egyenest látsz, amelyek páronként metszik egymást.
Ezek hét részre vágják a síkot, és közülük csak a középső nem nyúlik a végtelenbe. Ez a középső síkidom egy sokszög. Három egymáshoz csatlakozó szakasz határolja, **háromszög**nek nevezzük.



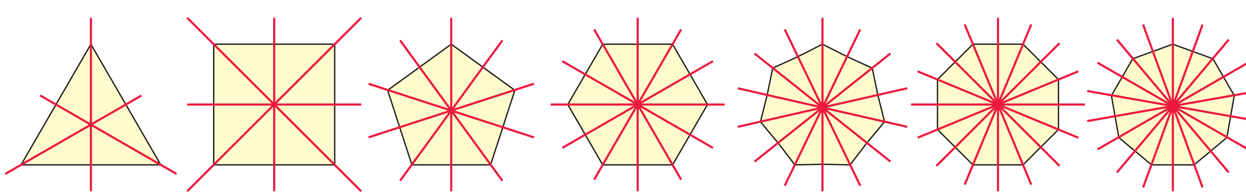
A síkban egymáshoz csatlakozó, záródó töröttvonalat **sokszögvonal**nak, az általuk határolt síkidomot pedig **sokszög**nek nevezzük. Az egymáshoz csatlakozó szakaszok a sokszög oldalait, a szakaszok végei a sokszög csúcsait adják.

Mi csak az egyszerű sokszögvonalakkal foglalkozunk, azaz
- a csúcsok és oldalak száma egyenlő;
- minden csúcsba két oldal fut be;
- az oldalaknak a csúcsokon kívül nincs közös pontjuk.

Mutatunk néhány nem egyszerű sokszögvonalat:



Ha a sokszög minden oldala és minden belső szöge egyenlő, akkor **szabályos sokszög**ről beszélünk.



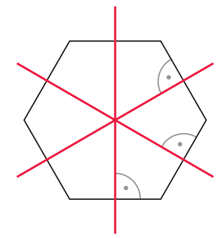
Minden szabályos sokszög tengelyesen szimmetrikus.

1. PÉLDA

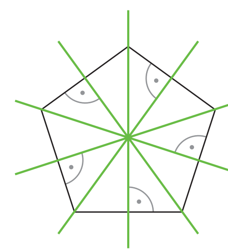
Hány oldala lehet a szabályos sokszögnek, ha van
a) olyan tengelye, amelyikre nem illeszkedik csúcs?
b) olyan tengelye, amelyikre pontosan egy csúcs illeszkedik?
c) olyan tengelye, amelyikre két csúcs illeszkedik?
d) szimmetria-középpontja?

Megoldás

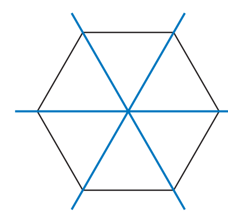
a) A páros oldalszámú szabályos sokszögekben az oldalfelező merőlegesek tengelyek lesznek, és nem illeszkedik rájuk csúcs.



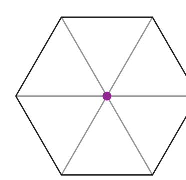
b) A páratlan oldalszámú szabályos sokszögekben az oldalfelező merőlegesek tengelyek lesznek, és a szemközti csúcs illeszkedik rájuk.



c) A páros oldalszámú szabályos sokszögekben bármely csúcs és a vele szemközti csúcsot összekötő egyenes ilyen tengely lesz.



d) A páros oldalszámú szabályos sokszögeknek van szimmetria-középpontjuk.



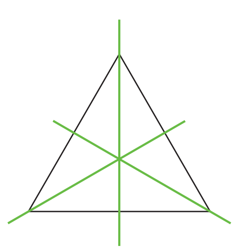
2. PÉLDA

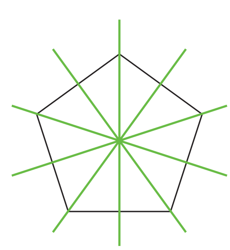
Hány szimmetriatengelye van a szabályos sokszögeknek?

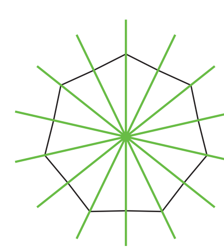
Megoldás

Érdemes külön vizsgálni a páratlan és a páros oldalszámú sokszögeket.

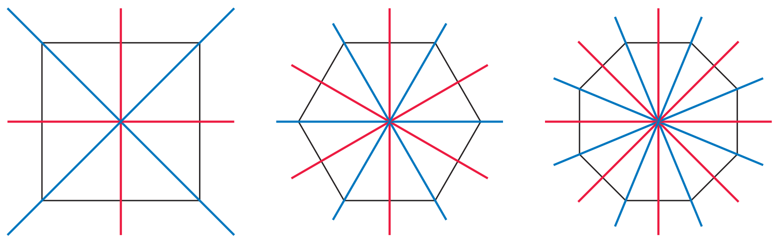
I. A páratlan oldalszámú szabályos sokszögek bármely oldalfelező merőlegese szimmetriatengely. Ebből következik, hogy a tengelyek száma egyenlő az oldalak számával.







II. A páros oldalszámú szabályos sokszögekben bármely oldalfelező merőleges szimmetriatengely. Egy ilyen tengely két oldalnak is a felezőmerőlegese lesz, így ezek száma az oldalak számának felével egyenlő. A két-két szemközti csúcsot összekötő egyenes is tengely lesz. Az ilyen egyenesek száma a csúcsok számának a felével egyenlő. Mivel a csúcsok és az oldalak száma egyenlő, ezért a tengelyek száma összesen most is az oldalak számával egyenlő.



A példák alapján a következő hasznos állításokat fogalmazhatjuk meg:

A szabályos sokszögek szimmetriatengelyeinek száma egyenlő az oldalainak számával, vagyis az n oldalú sokszögnek n darab szimmetriatengelye van.

A páros oldalszámú szabályos sokszögeknek van, a páratlan oldalszámú szabályos sokszögeknek nincs szimmetria-középpontja.

FELADATOK

1. Hol találsz a környezetedben szabályos sokszögeket?

2. Döntsd el, igaz vagy hamis!

a) Egy sokszög csak akkor lehet tengelyesen szimmetrikus, ha szabályos.

b) Ha egy sokszög középpontosan szimmetrikus, akkor szabályos.

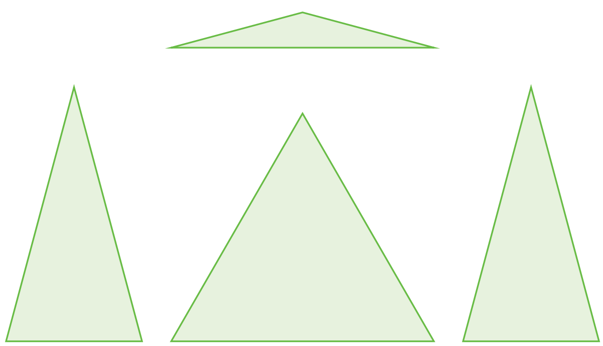
c) A szabályos sokszögnek biztosan van legalább három szimmetriatengelye.

d) Ha egy sokszög tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus, akkor szabályos.

3. Egy egyenlő szárú háromszög szögei: 30°, 75°, 75°. Hány darab egybevágó példányra lenne szükséged, ha szabályos sokszöget szeretnél összerakni belőlük?

4. Egy szabályos sokszög összes szimmetriatengelyét megrajzoltuk. Ezek 10 csúcson haladtak át. Hány oldalú a sokszög?

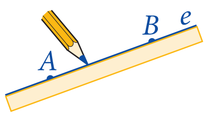
5. Készítsd el papírból az ábrán látható egyenlő szárú háromszögeket! Milyen szabályos sokszöget tudsz kirakni mind a négy felhasználásával?



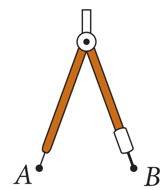
III. 15. SZERKESZTÉSEK

Már az előző években is készítettünk ábrákat vonalzó és körző segítségével. A síkidomok tengelyes és középpontos tükrözését is ezekkel végeztük. Azt is tudjuk, hogy szerkesztésről csak akkor beszélünk, ha a vonalzónknak egy élét használjuk, és betartjuk a következőket:

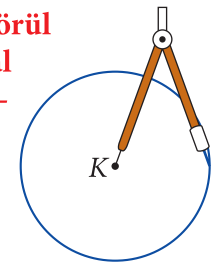
- **A vonalzót két adott ponthoz illesztve meghúzhatjuk a két pontra illeszkedő egyenest.**



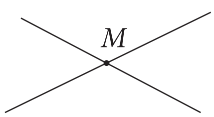
- **Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.**



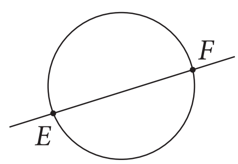
- **Adott pont körül adott sugárral kört rajzolhatunk.**



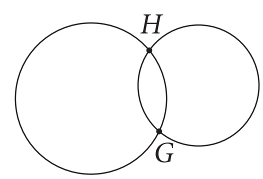
- **Két egyenes metszéspontját megszerkesztettnek tekintjük.**



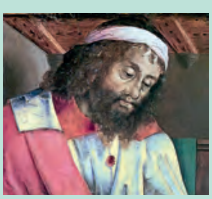
- **Egyenes és kör metszéspontjait megszerkesztettnek tekintjük.**



- **Két kör metszéspontjait megszerkesztettnek tekintjük.**



Ebben az esetben **euklideszi szerkesztés**ről beszélünk, amit röviden csak szerkesztésnek nevezünk.



Kr. e. 300 körül született Alexandriai Eukleidész görög matematikus, akit később a geometria atyjaként is emlegettek. Miután befejezte athéni tanulmányait, megalapította az alexandriai matematikai iskolát. Ő a híres ókori matematikakönyv, az *Elemek* szerzője, amelyben összefoglalta a matematika alapjait. Születésének éve és helye, valamint halálának körülményei ismeretlenek.

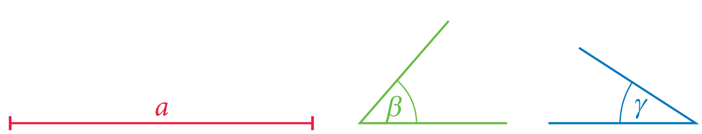
1. PÉLDA

Szerkesszünk háromszöget, ha adott az a oldala, valamint az ezen az oldalon fekvő β és γ szög!

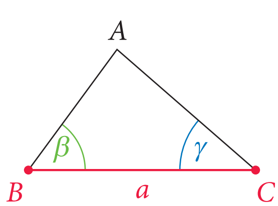
Megoldás

Ha az adatokat a feladat szövege nem adta meg, akkor azokat tetszőlegesen felvehetjük.

Adatok:

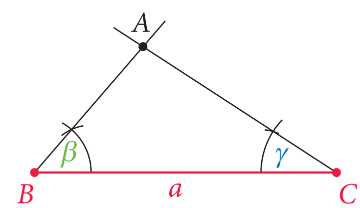


Vázlat:



Most csak az a oldal, valamint a β és a γ szög adott, ezért csak ezeket szerepeltetjük a vázlatrajzon. A B és a C pontokra tömött karikát tettünk, ezzel jelezve, hogy a szerkesztést az a szakasz felvételével fogjuk kezdeni. Az adatoknál szereplő a szakaszt a tanult módon a megfelelő helyre másoljuk.

A szerkesztés menete: Az A pontot szeretnénk megszerkeszteni. A szerkesztési lépésekből tudjuk, hogy egy pont akkor megszerkesztett, ha az két vonalnak – két egyenesnek, egy egyenesnek és egy körnek vagy két körnek – a metszéspontja.



Milyen vonalon van rajta az A pont?
Egy egyenesen! A BC szakasz B végpontjához másolt β szög szára lesz a keresett egyenes.

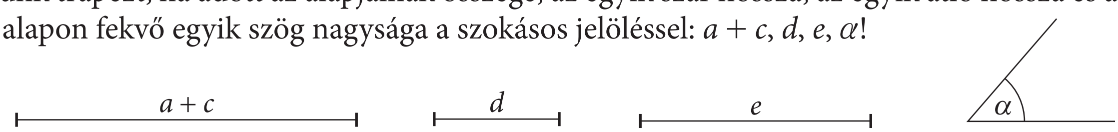
Milyen másik vonalon van rajta még az A pont?
Még egy egyenesen! A BC szakasz C végpontjához másolt γ szög szára lesz a keresett másik egyenes.
A két egyenes metszéspontja adja az A pontot.

Kivitelezés: Az adatok felhasználásával a leírás alapján, illetve a vázlatrajz segítségével megszerkeszthetjük a háromszöget.

2. PÉLDA

Szerkesszünk trapézt, ha adott az alapjainak összege, az egyik szár hossza, az egyik átló hossza és a hosszabb alapon fekvő egyik szög nagysága a szokásos jelöléssel: $a + c$, d, e, α!

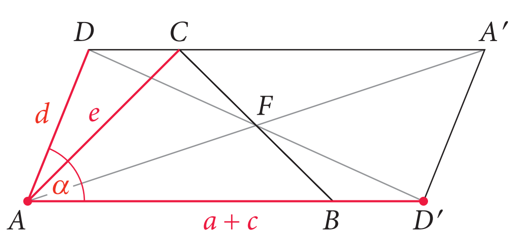
Adatok:



Megoldás

Készítsünk vázlatot! A trapézt középpontosan tükrözzük a BC szár F felezőpontjára, mert ekkor megjelenik a rajzunkon az $a + c$ hosszúságú szakasz is.

Vázlat:



A vázlatrajzon csak az adott szakaszok hosszát jelentő kisbetűket, valamint a szögek nagyságát jelentő görög betűket jelöltük, így jól láthatók az adatok. Tömött karikát tettünk annak a szakasznak a két végére, amellyel a szerkesztést el szeretnénk kezdeni.
Az $ABCD$ trapéz és a BC szár F felezőpontjára tükrözött képe, vagyis az $A'CBD'$ trapéz együtt egy paralelogrammát alkot. Ezt használjuk fel a szerkesztés során.

A szerkesztés menete:

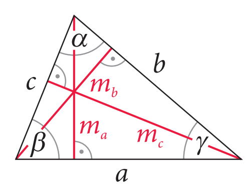
Az AD' szakasz két végére tettük a tömött karikát, ezért rajzolunk egy A kezdőpontú félegyenest, majd a körzőnyílásba vett $a + c$ hosszúságú szakaszt rámérjük. Így kapjuk a D' pontot.
Az A pontba az AD' szakaszra másoljuk az α szöget. A szög szára adja a D pont megszerkesztéséhez szükséges egyik vonalat.

III. 15. SZERKESZTÉSEK

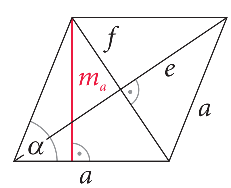
A most megrajzolt szögszárra rámérjük az adott d hosszúságú szakaszt, azaz az A középpontú d sugarú kör a D pont másik vonala lesz. Így megkapjuk a D csúcsot.
A D középpontú, $a + c$ sugarú és a D' középpontú, d sugarú körök metszéspontja lesz az A' pont. Az $AD'A'D$ paralelogramma átlóinak metszéspontja adja az F pontot. Az A középpontú, e sugarú kör kimetszi az $A'D$ szakaszból a C-t. A CF egyenes pedig kimetszi az AD' egyenesből a B-t.
A leírás alapján kivitelezhető a szerkesztés.
Az adatokat most is tetszőlegesen vettük fel. A felvett adatok azonban nem biztos, hogy meghatároznak egy trapézt. Ezért a feladat megoldásához a szerkeszthetőség feltételeinek vizsgálata is hozzátartozik. Például az α csak hegyesszög lehet, az e nem lehet nagyon kicsi és nagyon nagy sem. Most nem foglalkozunk részletesebb vizsgálattal, de a kivitelezésnél azonnal kiderül, ha az adatokból nem szerkeszthető meg a trapéz.

FELADATOK

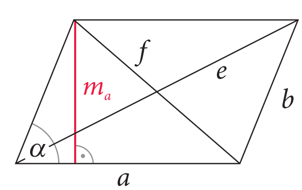
1. Szerkessz háromszöget a következő adatokból:
a) a, b, c; *b)* $a, b, \gamma = 60°$; *c)* a, b, m_a!



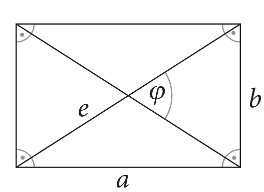
2. Szerkessz rombuszt a következő adatokból:
a) a, e; *b)* $a, \alpha = 45°$; *c)* a, m_a!



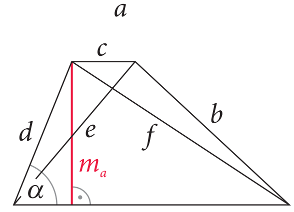
3. Szerkessz paralelogrammát a következő adatokból:
a) a, b, α; *b)* a, b, e; *c)* a, b, m_a!



4. Szerkessz téglalapot a következő adatokból:
a) a, b; *b)* a, e; *c)* e, φ!



5. Szerkessz trapézt, ha adott az $a + c$, m_a, e, α!



16. ÖSSZEFOGLALÁS

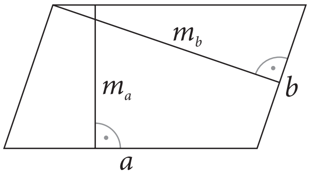
Ebben a fejezetben egy új **geometriai transzformáció**val, a **középpontos tükrözés**sel ismerkedtünk meg. A középpontos tükrözés (ugyanúgy, mint a tengelyes tükrözés) **egybevágósági** transzformáció.

Összegyűjtöttük a középpontos tükrözés legfontosabb tulajdonságait:
– Távolságtartó, szögtartó, egyenestartó.
– A középpontra illeszkedő egyenes képe önmaga.
– Nem változtatja meg a körüljárási irányt.
– A középpontra nem illeszkedő egyenes és a képe párhuzamos egymással.
– A félegyenes és képe fordított állású.
– A szakasz képe párhuzamos az eredeti szakasszal, de a végpontjaik sorrendje felcserélődik.
– Ha egy középpontos tükrözés esetén az A pont képe az A', akkor az A' képe ugyanebben a középpontos tükrözésben az A lesz. Azt mondtuk, hogy a középpontos tükrözés megfordítható transzformáció.

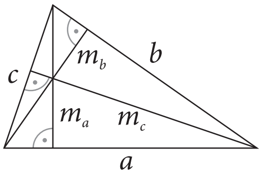
A középpontos tükrözést bizonyításokban és szerkesztésekben is alkalmaztuk. Vizsgáltuk a **középpontosan szimmetrikus** alakzatok tulajdonságait, és készítettünk is ilyen ábrákat.

Megismerkedtünk néhány síkidom területképletével.

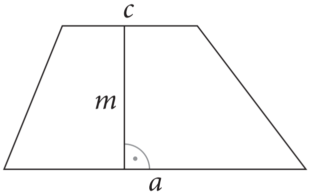
A paralelogramma területképlete: $T = a \cdot m_a = b \cdot m_b$.



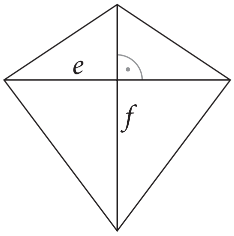
A háromszög területképlete: $T = \dfrac{a \cdot m_a}{2} = \dfrac{b \cdot m_b}{2} = \dfrac{c \cdot m_c}{2}$.



A trapéz területképlete: $T = \dfrac{(a + c) \cdot m}{2}$.



A deltoid területképlete: $T = \dfrac{e \cdot f}{2}$.



FELADATOK

Az első nyolc feladatban a megadott öt válasz között pontosan egy jó van. A helyes választ a füzetedben jelöld!

1. Melyik nem a középpontos tükrözés tulajdonsága?
(A) Távolságtartó;
(B) Az egyenes és képe párhuzamos;
(C) Van olyan egyenes, amelyik egybeesik a képével;
(D) A körüljárási irányt megfordítja;
(E) Szögtartó.

2. Melyik befejezés hibás?
Ha egy négyszög paralelogramma, akkor
(A) két-két szemközti oldala egyenlő hosszúságú;
(B) két-két szemközti oldala párhuzamos;
(C) az átlói merőlegesen felezik egymást;
(D) két-két szemközti szöge egyenlő egymással;
(E) bármely két szomszédos szöge egymásnak kiegészítő szöge.

3. Rajzoltunk egy középpontosan szimmetrikus szabályos sokszöget. Hány oldala lehet a megadottak közül?
(A) 1961;
(B) 1986;
(C) 2001;
(D) 2015;
(E) 2345.

4. A 72 cm^2 területű paralelogramma egyik oldalának hossza 9 cm. Mekkora lehet az ehhez az oldalhoz tartozó magasság hossza?
(A) 4 cm;
(B) 16 cm;
(C) 8 cm;
(D) 63 cm;
(E) Ennyi adatból nem adható meg.

5. Mekkora a 12 cm átlóhosszúságú négyzet területe?
(A) 144 cm^2;
(B) 72 cm^2;
(C) 36 cm^2;
(D) 288 cm^2;
(E) Az átló hosszával nem határozható meg a négyzet területe.

6. Egy deltoid egyik átlója kétszer olyan hosszú, mint a másik átlója. Centiméterben mérve mindkettő hossza egész szám. Mekkora lehet a területe?
(A) 961 cm^2;
(B) 916 cm^2;
(C) 691 cm^2;
(D) 619 cm^2;
(E) Az előzőek egyike sem.

7. Egy húrtrapéz (egyenlő szárú trapéz) 14 cm hosszúságú átlói merőlegesek egymásra. Mekkora lehet a területe?
(A) 196 cm^2;
(B) 169 cm^2;
(C) 98 cm^2;
(D) 56 cm^2;
(E) Csak az átló hosszának ismeretében nem határozható meg ennek a trapéznak a területe.

8. A 13 cm, 14 cm és 15 cm oldalhosszúságú háromszög területe
(A) 210 cm^2;
(B) 182 cm^2;
(C) biztosan nagyobb, mint 105 cm^2;
(D) biztosan nagyobb, mint 91 cm^2;
(E) 84 cm^2.

9. Milyen szót kellene írnod a pontozott helyre, hogy az állítások igazak legyenek? Lehetséges, hogy több helyes szó is létezik!

a) A paralelogramma olyan …… , amelynek a szárai is párhuzamosak egymással.
b) A paralelogramma olyan …… , amelynek két-két szemközti oldala egyenlő egymással.
c) A rombusz olyan …… , amelynek minden oldala egyenlő egymással.
d) A téglalap olyan …… amelynek két-két szemközti oldala egyenlő egymással, és van derékszöge.
e) A téglalap olyan …… , amelynek a szomszédos oldalai merőlegesek egymásra.
f) A négyzet olyan …… , amelynek van derékszöge.
g) A négyzet olyan …… , amelynek a szomszédos oldalai egyenlő hosszúságúak.
h) A deltoid olyan …… , amelyben van két-két egyenlő hosszúságú, szomszédos oldal.

10. A rendelkezésedre álló adatok alapján add meg a nevezetes sokszögek kerületét, területét! Elképzelhető olyan eset, amikor valamelyiket még nem fogod tudni kiszámolni!

a) A téglalap két különböző oldalának hossza 2,6 cm és 8,5 cm.
b) A négyzet oldalának hossza 3,5 cm.
c) A négyzet átlójának hossza 6 cm.
d) A derékszögű háromszög oldalainak hossza 7,5 cm, 18 cm és 19,5 cm.
e) A deltoid átlóinak hossza 14 cm és 8 cm.
f) A deltoid két különböző oldalának hossza 6,3 cm és 11,7 cm.

11. Mekkora a felszíne és a térfogata a kockának, ha az éle

a) 13 cm; *b)* 9,2 cm hosszú?

12. Mekkora a felszíne és a térfogata a téglatestnek, ha az élei

a) 3 cm, 5 cm és 11 cm;
b) 2,5 cm, 12 cm és 16 cm hosszúak?

13. Mekkora lehet a felszíne a 66 cm^3 térfogatú téglatestnek, ha minden éle cm-ben mérve egész szám?

14. Egy téglatest éleinek hossza cm-ben mérve három egymást követő egész szám, a térfogata pedig 1320 cm^3. Mekkora a felszíne?

15. Egy téglatest éleinek hossza cm-ben mérve három egymást követő egész szám. Lehet-e a felszíne

a) 94 cm^2; *b)* 100 cm^2?

16. Rajzolj a füzetedbe egy deltoidot! Tükrözd az átlók metszéspontjára! Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott síkidom közös része?

17. Rajzolj a füzetedbe egy téglalapot! Tükrözd az egyik átlójának egy tetszőleges pontjára! (Ne az átlók metszéspontját válaszd!) Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott síkidom közös része?

18. Rajzolj a füzetedbe egy húrtrapézt! Tükrözd az átlók metszéspontjára! Milyen síkidom lesz az eredeti és a képként kapott síkidom közös része?

19. Rajzolj egy *A* csúcsú hegyesszöget a két szárával, és vegyél fel a szögtartományban egy tetszőleges *C* pontot. Szerkeszd meg azt az *ABCD* paralelogrammát, amelynek két oldalegyenese a szög száraira esik!

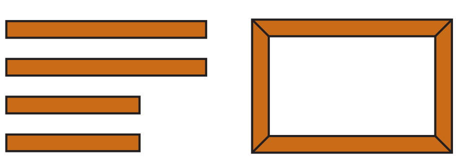
20. Rajzolj egy A csúcsú hegyesszöget a két szárával, és vegyél fel a szögtartományban egy tetszőleges K pontot. Szerkeszd meg azt az $ABCD$ paralelogrammát, amelynek két oldalegyenese a szög száraira esik és a K pont az átlóinak a metszéspontja!

21. Rajzolj egy szabályos hatszöget a füzetedbe! Rajzold meg az összes átlóját is!

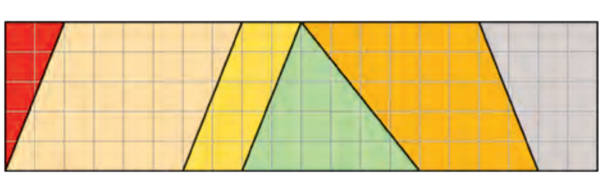
a) Keress az ábrádon nevezetes szögpárokat!
b) Keress az ábrádon tengelyesen tükrös síkidomokat!
c) Keress az ábrádon középpontosan tükrös síkidomokat!

22. Adott a koordináta-rendszerben egy origóra tükrös paralelogramma. Két csúcsának koordinátái: $A(2; 6)$, $B(8; 1)$. Mekkora a területe?

23. A képen látható négy téglalapból egy kép keretét szeretnénk kialakítani. A téglalapokból levágunk éppen annyit, hogy az ábrán látható összeillesztés megvalósítható legyen. Mekkora lesz a képen látható keret területe? Az egyik téglalap 2,2 cm-szer 26,4 cm-es, a másik 2,2 cm-szer 17,6 cm-es.



24. A képen látható négyzetrács szomszédos rácsvonalai 5 mm-re vannak egymástól. Határozd meg a színes síkidomok területét!



25. Egy deltoid mind a négy csúcsának helyét ismerjük a koordináta-rendszerben: $A(0; 0)$, $B(4; 0)$, $C(6; 6)$, $D(0; 4)$. Döntsd el a következő állításokról, hogy igazak-e!

a) A szimmetriaátlója hosszabb, mint a másik átló.
b) A területe 16 területegységnél nagyobb.
c) A kerülete 20 egység.
d) A területe 36 területegységnél nagyobb.
e) A rövidebb átló másfélszeresét kell vennünk, hogy a hosszabb átlót kapjuk.
f) A megadott négy pontból kiválaszthatunk három olyat, amelyik hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszöget alkot.

26. A képen látható tűzzománc fülbevalók deltoid alakúak, amelyeknek 3,2 cm hosszú a szimmetriaátlójuk, és 2 cm hosszú a másik átlójuk. Mekkora területet foglal el az asztalon egy pár ilyen fülbevaló?

27. A tetőtéri szoba háromszög alakú ablakának árnyékolását szeretnénk megvalósítani. A szalagfüggöny kivitelezési költségét az ablak területe adja. Mekkora ez a terület, ha az ablak szélessége 240 cm, magassága 180 cm?

28. A fényképen látható farmer térd alatti része láthatóan trapéz alakra hasonlít. Az ilyen nadrágok esetén használják a trapéznadrág elnevezést. A nadrág szárának alja 24 cm, a térdnél pedig csak 18 cm széles, és ennek a résznek a területe 1092 cm^2. Mekkora a teljes nadrág hossza, ha a térdnél említett vonal felezi a nadrág hosszát?

IV. OSZTHATÓSÁG

A következő utazással csupán röpke kb.170 évet kellett Nellinek és Szilvinek ugrania, hogy 1846-ban láthassák az idős Johann Carl Friedrich Gausst.

– Tudja jól, hogy nem szoktam tanítványokat vállalni – temetkezett vissza Gauss, a függvényekkel teleírt papírjai közé.

– Az ön zsenialitása és az eredményeim arra bátorítottak, hogy személyesen érdeklődjek a prímekről írt levelem sorsáról.

– Igen, olvastam – söpört félre kezével néhány papírlapot Gauss. – Ám ezeket már én is leírtam a prímszámokról!

– Ismerem a professzor úr munkáit és nagyon nagyra becsülöm önt, de nekem új gondolataim vannak a prímek elhelyezkedésével kapcsolatban …

– Azért fogadtam. Mert elgondolkodtató dolgokat is írt, amelyek valójában nekem is újak voltak. Az utolsó szavakat olyan halkan mormolta maga elé, hogy a lányok alig értették.

– A függvényem …

– Jöjjön minden kedden pontban 10 órára. Most elmehet. Mi is a neve?

– Bernhard Riemann vagyok professzor úr, és ígérem, pontos leszek!

A lányok eltávolodtak a helyszíntől, és a látványt köddé mosta az idő.

– Rémes, hogy minden tanárnak a mániája a pontosság – morfondírozott Szilvi hangosan – és milyen keményen kiosztotta azt a Riemannt.

– Úgy látszik, Gauss egy zseni volt, de nem túl kedves.

– Ebből következik, hogy ha undok vagyok, akkor matekzseni leszek? – vigyorgott kajánul Szilvi.

– Erről esetleg beszélgess Arisztotelésszel – válaszolt mosolyogva Nelli.

IV. 1. ISMÉTLÉS

Gyűjtsük össze címszavakban, kinek mi jut eszébe az oszthatóságról!

Ismételjünk át a kulcsfogalmakat az alábbi feladatokon keresztül!

FELADATOK

1. Sorold fel az alábbi számok első tíz többszörösét! Húzd alá azokat a többszörösöket, amelyek mindkét felsorolásban szerepelnek!

Egy pozitív egész szám többszöröseit úgy állíthatjuk elő, hogy a megadott számot rendre megszorozzuk a természetes számokkal.

Például az 5 többszörösei: 0; 5; 10; 15; 20; 25; 30; 35; 40; 45; 50…

a) 6 és 9; *b)* 10 és 15; *c)* 16 és 32; *d)* 3; 4 és 6;

2. Keresd meg az alábbi számok legkisebb közös többszörösét!

Két vagy több számnak végtelen sok közös többszöröse van. Két szám legkisebb közös többszöröse az a szám, amely mind a kettőnek többszöröse, és a pozitív többszörösök közül a legkisebb. A legkisebb közös többszöröst általában szögletes zárójellel jelöljük. (Az elnevezésre utalva néha az LKKT rövidítést is szoktuk használni.) Például: $[6; 8] = 24$

a) $[16; 32]$; *b)* $[9; 17]$; *c)* $[5; 6; 12]$; *d)* $[14; 18]$.

3. Hozd közös nevezőre a törteket, és végezd el az alábbi műveleteket!

A nevezők közös többszöröse közül bármelyiket használhatjuk közös nevezőként, de akkor kell a legkevesebbet számolni, ha a legkisebb közös többszörössel dolgozunk.

Például: $\frac{3}{20} + \frac{27}{25} = \frac{15}{100} + \frac{108}{100} = \frac{123}{100}$

a) $\frac{5}{8} + \frac{13}{12}$; *b)* $\frac{7}{10} - \frac{8}{25}$; *c)* $\frac{9}{14} + \frac{10}{21} - \frac{1}{2}$; *d)* $\frac{7}{6} - \frac{11}{9} - \frac{4}{15}$.

4. Milyen számjegyeket írhatsz az a, b, c, d betűk helyére, hogy a számok oszthatók legyenek *A)* 2-vel, *B)* 3-mal, *C)* 5-tel, *D)* 9-cel, *E)* 10-zel, *F)* 3-mal és 9-cel, *G)* 2-vel és 5-tel, *H)* 2-vel és 3-mal?

Ha egy szám utolsó számjegye osztható 2-vel, 5-tel vagy 10-zel, akkor maga a szám is osztható 2-vel, 5-tel vagy 10-zel.
Ha egy szám számjegyeinek összege osztható 3-mal vagy 9-cel, akkor maga a szám is osztható 3-mal vagy 9-cel.

a) $8a5$; *b)* $284b$; *c)* $7c450$; *d)* $d135210$.

5. Igaz vagy hamis?
a) Ha egy szám osztható 2-vel és 5-tel, akkor osztható 10-zel is.
b) Ha egy szám osztható 5-tel és 8-cal, akkor osztható 40-nel is.
c) Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor osztható 48-cal is.
d) Ha egy szám 4-re végződik, akkor osztható 4-gyel.
e) Ha egy szám utolsó két számjegyéből álló szám osztható 3-mal, akkor maga a szám is osztható 3-mal.
f) Ha egy szám páros, akkor összetett szám.
g) Ha egy szám prímszám, akkor nincs osztója.

6. Sorold fel az alábbi számok összes osztóját! Mely számoknak van páratlan darab osztója?

Egy pozitív egész számnak akkor osztója egy másik pozitív egész szám, ha az első szám többszöröse a második számnak.
Például 15-nek osztója a 3, mert a 15 többszöröse (ötszöröse) a 3-nak.
Másként fogalmazva: Egy természetes szám osztói azok a pozitív egész számok, amelyek maradék nélkül megvannak benne.

a) 18; *b)* 36; *c)* 49; *d)* 50; *e)* 64; *f)* 72.

7. Sorold fel az alábbi számok pozitív osztóit és keresd meg a közös osztókat! Karikázd be a füzetedben a közös osztók közül a legnagyobbat!

Két vagy több szám közös osztója az a szám, amely mindegyik vizsgált számnak osztója. Az 1 minden számnak osztója, így minden szám legkisebb osztója az 1. Két szám legnagyobb közös osztója az a szám, amely mind a kettőnek osztója, és a pozitív osztók közül a legnagyobb. A legnagyobb közös osztót kerek zárójellel jelöljük, de az elnevezésre utalva az LNKO rövidítés és a kerek zárójel együtt is használható. Például: $(16; 40) = 8$

a) $(14; 35)$; *b)* $(40; 70)$; *c)* $(42; 54)$; *d)* $(16; 32; 48)$.

8. Egyszerűsítsd az alábbi törteket!

Törtet úgy egyszerűsítünk, hogy a számlálót és a nevezőt is elosztjuk ugyanazzal a közös osztóval. Ha a legnagyobb közös osztóval osztunk, egy lépésben megoldjuk a feladatot.

Például: $\frac{36}{54} = \frac{2 \cdot \cancel{18}}{3 \cdot \cancel{18}} = \frac{2}{3}$ *a)* $\frac{25}{150}$; *b)* $\frac{36}{60}$; *c)* $\frac{30}{450}$.

IV. 2. PRÍMTÉNYEZŐS FELBONTÁS

CSOPORTMUNKA

Ismételjétek át a prímszám és az összetett szám fogalmát! Soroljátok fel a 100 alatti prímszámokat. Egyet mondjál te, egyet a padtársad!

Prímszámnak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan kettő pozitív osztója van (egy és önmaga).

Összetett számok azok a természetes számok, amelyeknek kettőnél több pozitív osztója van.

Az 1 nem prímszám és nem összetett szám.

Ha prímszámokat szorzunk össze, akkor biztosan összetett számot kapunk, mert a szorzat osztható lesz a prímszámok mindegyikével, 1-gyel és a szorzattal.

1. PÉLDA

Írjunk fel összetett számokat a 11 és 5 prímszámok felhasználásával úgy, hogy a megadott számokat legfeljebb kétszer használhatjuk!

Megoldás

$5 \cdot 11 = 55$

$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$

$11 \cdot 11 = 11^2 = 121$

$5 \cdot 5 \cdot 11 = 5^2 \cdot 11 = 275$

$5 \cdot 11 \cdot 11 = 5 \cdot 11^2 = 605$

$5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11 = 5^2 \cdot 11^2 = 3025$

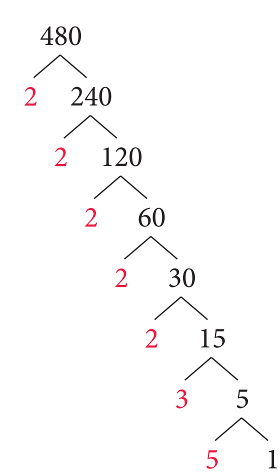
A felírt számok mindegyike összetett szám, hisz a két megadott prím közül legalább az egyikkel biztosan osztható.

2. PÉLDA

Bontsuk fel prímszámok szorzatára a 480-at!

Megoldás

Megmutatjuk, leggyakrabban melyik két módon juthatunk el a prímek szorzatához.



1. lehetőség:
A felírásnál bal oldalra egy prímszámot írunk, mellé pedig azt a számot, amivel megszorozva az eredeti számot kapjuk.
A bal oldali ágból kiindulva felírhatjuk a számot prímek szorzataként:
$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5$.
Ez a szám prímtényezős alakja. A hatványalak rövidíti a szorzások felírását.

Fontos, hogy a bal oldali ágakra prímszám kerüljön.

Célszerű mindig a legkisebb prímet kiválasztani, mert így egyszerűbb a számolás. Ebben a felírási módban könnyen megtalálhatók a szám osztói is.

2. lehetőség:
Ezt a módszert használjuk leggyakrabban. Lényegében ebben az esetben is az előző eljárást alkalmazzuk, ügyelve arra, hogy a jobb oldali oszlopba csak prímszámok kerüljenek. A jobb oldalon látható prímek adják a 480 prímtényezős felbontását:

$480 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5.$

480	2
240	2
120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

A kétféle módon történő felírás ugyanazt a **szorzatalakot** eredményezi, a tényezők sorrendjétől eltekintve.

CSOPORTMUNKA

Keressetek olyan szólásokat, közmondásokat, meséket, amelyekben van prímszám!

Például: Három a magyar igazság.

FELADATOK

1. Hány kétjegyű prímszám van?

2. Szorozd össze
A: az első három;
B: az első öt
prímszámot, majd a szorzathoz adj hozzá 1-et!
a) Mely számokkal nem osztható biztosan a kapott szám?
b) Milyen számot kaptál? Vajon mindig igaz ez a megfigyelés?

3. Bontsd fel az alábbi számokat prímszámok szorzatára!
a) 180; *b)* 900; *c)* 1144;
d) 2160; *e)* 111; *f)* 19 656.

4. Készíts összetett számokat a következő prímszámokból oly módon, hogy a prímeket összeszorzod! Egy adott prímszámból legfeljebb annyi tényezőt használhatsz, amenynyit a felsorolásban látsz.
a) 2; 2; 5; *b)* 3; 3; 7; 23; *c)* 2; 2; 7; 7; 11.

5. *a)* Van hárommal osztható prímszám?
b) Van öttel osztható prímszám?
c) Van héttel osztható prímszám?
d) Van hattal osztható prímszám?

6. A hajó méterben megadott hosszának és a kapitány életkorának szorzata 5617. Hány éves a kapitány?

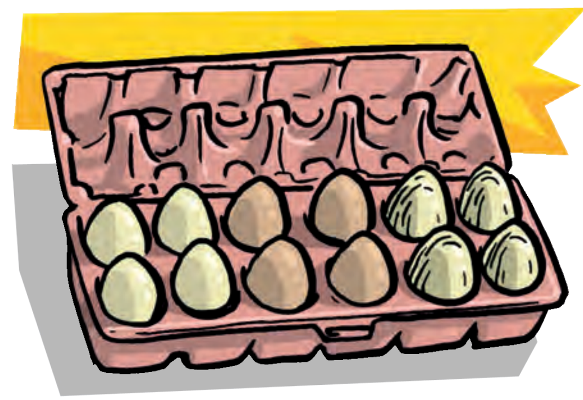
7. Gazsi két prímszámra gondolt és összeadta őket. Eredményül egy harmadik prímszámot kapott. Mi lehetett a Gazsi által gondolt kisebbik prím?

8. Keress az interneten információkat az ikerprímekről!

IV. 3. OSZTÓ, TÖBBSZÖRÖS

Ismételjük át az osztó, illetve a többszörös fogalmát!

Fontos!
Az osztó, illetve a többszörös fogalmáról mi csak a természetes számok körében beszélünk.



Azt mondjuk, hogy a 4 osztója a 12-nek, de mondhatjuk azt is, hogy a 12 többszöröse a 4-nek.
Viszont az 5 nem osztója a 12-nek, mert a hányados nem lesz egész szám. Így a 12 sem többszöröse az 5-nek.
Az osztó és többszörös fogalmak összetartoznak. Ugyanis, ha az egyik szám osztója egy másik számnak, akkor azt is mondhatjuk, hogy a másik szám többszöröse az egyik számnak.
Fogalmazzuk meg pontosabban!

A pozitív egész számok halmazán az *A* szám osztója a *B* számnak, ha az *A* számot megszorozva egy természetes számmal a *B* számot kapjuk.
Azt is mondhatjuk, hogy ha a *B* számot elosztjuk az *A* egész számmal, akkor hányadosként egész számot, vagyis 0 maradékot kapunk.
A nulla különleges szám, mert 0-nak minden pozitív egész szám osztója.

1. PÉLDA

Mely számok többszörösei a 15-nek a felsoroltak közül?
a) $3^2 \cdot 5$; *b)* $3 \cdot 5^2$; *c)* 5^2; *d)* $2 \cdot 3^2 \cdot 5$; *e)* $2^2 \cdot 5$; *f)* $3^2 \cdot 5^3$; *g)* $3^2 \cdot 7$.

Megoldás

$15 = 3 \cdot 5$. Írjuk fel a számokat szorzatalakban, és nézzük meg, hogy szerepel-e szorzótényezőként a 3 és az 5!

a) $3^2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5$, vagyis ez a szám többszöröse (3-szorosa) a 15-nek.

b) $3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 5 \cdot 5$, vagyis ez a szám többszöröse (5-szöröse) a 15-nek.

c) $5^2 = 5 \cdot 5$, tehát ez a szám nem többszöröse a 15-nek, mert a prímek szorzatában nincs 3-as tényező.

d) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, tehát ez a szám többszöröse ($2 \cdot 3$-szorosa) a 15-nek.

e) $2^2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5$, vagyis ez a szám nem többszöröse a 15-nek, mert a prímek között nem szerepel a 3-as tényező.

f) $3^2 \cdot 5^3 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$, tehát ez a szám többszöröse ($3 \cdot 5 \cdot 5$-szöröse) a 15-nek.

g) $3^2 \cdot 7 = 3 \cdot 3 \cdot 7$, így ez a szám nem többszöröse a 15-nek, mert a prímek szorzatában nincs 5-ös tényező.

A tapasztalat tehát az, hogy a szám többszörösében a 15 minden prímtényezőjének szerepelnie kell. Fogalmazzuk meg általánosítva:

Egy szám többszöröseinek prímtényezős felbontásában minden olyan prímtényező megtalálható, amelyik a számban is szerepelt.

PÁROS MUNKA

Válasszatok 3-3 prímszámot, összesen 6 db-ot! Szorozz össze néhányat! A szorzatot hívjuk KEZDŐ számnak!
Készíts a megadott prímek felhasználásával olyan szorzatokat, amelyek többszörösei a KEZDŐ számnak! Gyűjts külön csoportba olyanokat is, amelyek nem többszörösei a KEZDŐ-nek!

2. PÉLDA

Döntsd el, mely számok osztói a 72-nek!
$A = 3^2 \cdot 2$; $B = 3 \cdot 2^2$; $C = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $D = 2^3 \cdot 3^3$; $E = 2^2 \cdot 3^2$; $F = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

Megoldás

A 72 többszöröse az osztóinak, ezért nézzük meg a 72 prímtényezős felbontását!

$$72 = 2^3 \cdot 3^2$$

A 72 osztóiban csak a 2 és a 3 szerepelhet prímosztóként, ezért a
$C = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ és az
$F = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ számok nem lehetnek osztók.
Az osztókban legfeljebb annyi prím szerepelhet szorzóként, amennyi az eredeti számban is szerepelt. Vizsgáljuk meg a számokat ezek alapján! A $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ osztóiban legfeljebb 3 db 2-es és 2 db 3-as szorzótényező szerepelhet, és más prímszorzó nem.
$A = 3^2 \cdot 2 = 3 \cdot 3 \cdot 2$;
$B = 3 \cdot 2^2 = 3 \cdot 2 \cdot 2$;
$D = 2^3 \cdot 3^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$;
$E = 2^2 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.
Ebből következik, hogy az *A*, *B*, *E* számok osztói a 72-nek, a *D* szám viszont nem osztója, mert a 3 szorzótényezőiből több szerepel benne.

Egy szám osztóinak prímtényezős felbontásában csak olyan prímek (prímtényezők) szerepelhetnek szorzóként, amelyek a számban is szerepeltek, és az egyes prímtényezők száma legfeljebb annyi lehet, mint amennyi a vizsgált számban van.

Hogyan határozhatjuk meg egy összetett szám osztóit?

Az egyik lehetséges módszer az osztópárok felírása. Írjuk fel az osztópárokat két oszlopban úgy, hogy szorzatuk az adott szám legyen! Kezdjük a legkisebb számmal!

3. PÉLDA

Írjuk fel a 108 összes osztóját!

Megoldás

Írjuk fel az osztópárokat!

Osztópárok:		
	1	108
	2	54
	3	36
	4	27
	6	18
	9	12

Meddig kell vizsgálni az osztókat?
Írjuk fel növekvő sorrendben az osztókat és a hozzá tartozó osztópárt.
Ha találunk olyan osztót, amelynek a párja egyenlő vele, akkor több osztót nem kell keresnünk.
Ha nincs ilyen osztó, akkor addig kell számolnunk, amíg meg nem jelenik egy már megtalált osztó.

Egy szám osztói között mindig szerepel az 1 és maga a szám. Ezeket nem valódi osztóknak nevezzük. A szám valódi osztóinak száma tehát kettővel kevesebb az osztók számánál.

Mindezek alapján a 108-nak 12 db osztója van, ezek közül 10 db valódi osztó.

FELADATOK

1. Döntsd el, az alábbi számok közül melyik többszöröse a 18-nak!
a) $3^3 \cdot 2$; *b)* $3 \cdot 2^2 \cdot 5$;
c) $2 \cdot 3 \cdot 13^2$; *d)* $2^{12} \cdot 3^3 \cdot 19$;
e) $3^2 \cdot 5^2 \cdot 11^2$; *f)* $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

2. Sorold fel az alábbi számok prím osztóit! Az osztók mellé írd fel, az adott szám hányszorosa az osztónak!
a) 36; *b)* 135;
c) 360; *d)* 132.

3. Sorold fel az alábbi számok prímosztóit! Az osztók mellé írd fel, az adott szám hányszorosa az osztónak!
a) $3^3 \cdot 2$; *b)* $3^3 \cdot 11$;
c) $2 \cdot 3^2 \cdot 7$; *d)* $2^4 \cdot 3 \cdot 5$;
e) $2 \cdot 3 \cdot 5^2$; *f)* $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$.

4. Sorold fel a számok osztópárjait! Húzd alá a valódi osztókat!
a) 36; *b)* 135;
c) 360; *d)* 132.

5. Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyik 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel is osztható?

6. Többszöröse-e
a) 15-nek a $2 \cdot 3^2 \cdot 5$;
b) 22-nek a $2^4 \cdot 3 \cdot 5$;
c) 77-nek a $2 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11$;
d) 24-nek a $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$?

7. Egy téglalap területe 54 cm^2. Mekkorák a téglalap oldalai, ha tudjuk, hogy az oldalak hossza (centiméterekben mérve) egész szám?

8. Sorold fel a következő kifejezések osztóit!
a) $2 \cdot 3 + 1$;
b) $2 \cdot 3 \cdot 5 + 1$;
c) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1$;
d) $2 \cdot 9 \cdot 5 + 1$.

9. Készíts a füzetedbe táblázatot 1-től 32-ig, majd minden szám alá írd oda, hogy hány osztója van!

10. Hozz ellenpéldát az ötletre! Péter felsorolta a 360-nak mind a 24 osztóját. $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, ezért úgy gondolta, hogy a számok osztóinak számát megkaphatjuk, ha a prímtényezős felbontásban szereplő prímszámok szorzatából kivonjuk a kitevők szorzatát.

1. PÉLDA

A kisiskolásoknak szervezett Mikulás-napi játékos délutánon a 7. b osztály vállalta a műsor és a játékok szervezését. A szervezők szaloncukrot és nápolyit osztottak jutalmul a kisdiákoknak. A befejezés után 54 darab szaloncukor és 36 nápolyi szelet maradt. Az osztályfőnökük a megmaradt édességet úgy osztotta ki, hogy mindenkinek ugyanannyi szaloncukor vagy nápolyi szelet jutott. Hányan vehettek részt a szervezésben?

Megoldás

Ha megkeressük a 36 és az 54 közös osztóit, akkor válaszolhatunk a kérdésre.
Írjuk fel mindkét szám osztópárjait, majd jelöljük meg a közös osztókat!
Mindkét számnak osztója az 1; 2; 3; 6; 9 és 18, tehát a diákok ennyi darab édességet kaptak.
Ezek szerint több válaszlehetőség van.

A 36 osztópárjai:

1	36
2	18
3	12
4	9
6	6

Az 54 osztópárjai:

1	54
2	27
3	18
6	9

Ennyi édesség jutott egy tanulónak	A szervező diákok száma	Megjegyzés
1	90	Ennyi tanuló nem lehet egy osztályban
2	45	Ennyi tanuló nem lehet egy osztályban
3	30	Lehetséges
6	15	Lehetséges
9	10	Lehetséges
18	5	Lehetséges

A megoldás során a közös osztókat soroltuk fel. A közös osztók között mindig szerepel az 1, ezért az 1 mint közös osztó nem kitüntetett szerepű.
Az osztók között van legnagyobb, így a közös osztók között is biztosan van legnagyobb. Ezt a számot a két vagy több szám legnagyobb közös osztójának nevezzük. Ennek meghatározása egyrészt történhet az előző módszerrel, azaz a közös osztók meghatározása után meg kell keresnünk a legnagyobbat.
Jelölése: a számokat kerek zárójelbe tesszük és pontosvesszővel választjuk el egymástól: $(36; 54) = 18$.

Másrészt azonban ez a módszer túlságosan hosszadalmas lenne akkor, ha a számok nagyok és sok osztójuk van. Így keressünk egy másik módszert is!

2. PÉLDA

Írjuk fel a 36 és az 54 prímtényezős alakját! A prímtényezős alak felhasználásával adjuk meg a két szám legnagyobb közös osztóját!

Megoldás

$36 = \mathbf{2} \cdot 2 \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3}$; $54 = \mathbf{2} \cdot \mathbf{3} \cdot \mathbf{3} \cdot 3$.

A színessel jelölt prímek mindkét számnak osztói: **2; 3; 3.**

Képezzünk ezekből minden lehetséges módon szorzatokat: $2 \cdot 3$; $3 \cdot 3$; $2 \cdot 3 \cdot 3$.

Ha ezekhez a szorzatokhoz hozzávesszük a közös prímeket, azaz a 2-t és a 3-at, valamint az 1-et, akkor megkaptuk az összes közös osztót.

A legnagyobb közös osztót úgy kaptuk, hogy az összes közös prímet összeszoroztuk.

Ez a meggondolás mindig célravezető.
Foglaljuk össze a tapasztalatokat!

Két szám legnagyobb közös osztóját úgy határozhatjuk meg, hogy a számokat prímtényezőkre (prímszámok szorzatára) bontjuk, és a számokban szereplő közös prímeket összeszorozzuk. Ugyanígy határozható meg kettőnél több szám legnagyobb közös osztója is.

Azokat a számokat, amelyeknek nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk, relatív prímeknek neveztük.

Megjegyzés:

Két vagy több szám legnagyobb közös osztóját a hatvány fogalmának felhasználásával is meghatározhatjuk. A számokat prímhatványok szorzataként írjuk fel, kiválasztjuk a közös prímeket és azok legkisebb hatványát, majd ezeket a prímhatványokat összeszorozzuk.

$36 = 2^2 \cdot 3^2$; $54 = 2 \cdot 3^3$.

Tehát: $(36; 54) = 2 \cdot 3^2$.

FELADATOK

1. Írd fel az alábbi számok közös osztóit!
a) 10; 12; *b)* 20; 70; *c)* 45; 12;
d) 4; 5; *e)* 14; 15; *f)* 60; 108.

2. A számok prímtényezős alakjának felhasználásával írd fel az alábbi számok legnagyobb közös osztóját!
a) (24; 60); *b)* (120; 45); *c)* (96; 144).

3. Írd fel prímtényezős alakban a számok legnagyobb közös osztóját!
a) $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 3 \cdot 5^2 \cdot 11)$;
b) $(2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5^2;\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 19^2)$.

4. Egyszerűsítsd az alábbi törteket! Javaslat: A legnagyobb közös osztó segítségével gyorsabb az egyszerűsítés.
a) $\frac{48}{42}$; *b)* $\frac{168}{96}$; *c)* $\frac{95}{209}$; *d)* $\frac{2016}{2592}$.

5. Számítsd ki az alábbi számhármasok legnagyobb közös osztóját!
a) (24; 120; 72); *b)* (25; 100; 200).

6. Milyen számok kerüljenek a téglalap helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?
a) $(2^2 \cdot 3^{\square} \cdot 5;\ 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7) = 45$;
b) $(2^2 \cdot 3 \cdot 5;\ 2^{\square} \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11) = 60$.

5. LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

1. PÉLDA

Két hegyi falu között kétféle útjelző oszlop található. Az egyik az út szélét jelzi és fényvisszaverő csíkkal van ellátva, a másik kb. 2 méter magas, élénk színe van és a lehullott hó magasságát mutatja. Az első útjelzőt 45 méterenként, a másodikat 75 méterenként helyezték el. Az egyik falu határában egymás mellett van a két jelzőoszlop. A falutól számítva hány méterenként lesz egymás mellett a kétféle útjelző oszlop?

Megoldás

Írjuk fel, hány méterenként helyezkednek el az egyes oszloptípusok!

A felsorolt számok 45, illetve 75 többszörösei. Ezek közül a színessel jelölt számok a két szám közös többszörösei.

Az összesítésből kiderül, hogy a kétféle jelzőoszlop 225 m-enként kerül egymás mellé.

Tehát először 225 méternél lesznek egymás mellett.

Útjelző (méter)	Hómagasság-jelző (méter)
45	75
90	150
135	**225**
180	300
225	375
270	**450**
315	525
360	
405	
450	

A többszörösök közül a 225 a legkisebb. Legnagyobb közös többszörös nincs, mert ha a 225-öt egy tetszőlegesen nagy számmal megszorozzuk, az eredmény is többszörös lesz.

A közös többszörösök közül a legkisebb kitüntetett szerepet játszik. Jelölése: A számokat szögletes zárójelbe tesszük és pontosvesszővel választjuk el egymástól: $[45; 75] = 225$.

A legkisebb közös többszöröst úgy is meghatározhatjuk, ahogyan most tettük: felírjuk a számok többszöröseit, majd megkeressük a legkisebbet, amelyik mindkét számnak többszöröse. Ez a módszer néha nagyon hosszadalmas lehet, így mutatunk egy másik módszert, amely a legkisebb közös többszörös meghatározásához a számok prímtényezős felbontását használja.

A két szám prímtényezős felbontása:

$45 = 3^2 \cdot 5 = 3 \cdot 3 \cdot 5$;

$75 = 3 \cdot 5^2 = 3 \cdot 5 \cdot 5$.

A legkisebb közös többszörös prímtényezős felbontása:

$225 = 3^2 \cdot 5^2 = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$.

PÁROS MUNKA

Keressétek meg a 140 és 90 legkisebb többszörösét mindkét szám többszöröseinek felírásával! Írjátok fel a számok prímtényezős felbontását is! Fogalmazzátok meg, hogyan határozhatjuk meg a két szám legkisebb közös többszörösét a prímtényezős felbontás alapján!

IV. 5. LEGKISEBB KÖZÖS TÖBBSZÖRÖS

A legkisebb közös többszörös meghatározása során olyan számot kell keresnünk, amely mindkét számnak többszöröse, így a legkisebb közös többszörösben a vizsgált számok összes prímtényezőjének szerepelni kell.
Foglaljuk össze a tapasztalatokat!

Két szám legkisebb közös többszörösét úgy határozhatjuk meg, hogy a számokat prímtényezőkre (prímszámok szorzatára) bontjuk, és a számokban szereplő összes prímet összeszorozzuk, úgy hogy a mindkettőben szereplő közös prímeket csak egyszer vesszük szorzótényezőként. Ugyanígy határozható meg kettőnél több szám legkisebb közös többszöröse is.

Megjegyzés:

Két vagy több szám legkisebb közös többszörösét a hatvány fogalmának felhasználásával is meghatározhatjuk. A számokat felírjuk prímhatványok szorzataként, kiválasztjuk a számokban szereplő összes prímet, azok legnagyobb kitevős hatványát, majd ezeket a prímhatványokat összeszorozzuk.

FELADATOK

1. Írd fel az alábbi számok öt-öt közös többszörösét!

a) 1; 11; *b)* 3; 12;
c) 45; 12; *d)* 12; 15;
e) 10; 12; *f)* 20; 70;
g) 7; 8; *h)* 22; 26;
i) 15; 4; *j)* 15; 12;
k) 14; 15; *l)* 8; 9.

2. Írd fel az alábbi számok legkisebb közös többszörösét a számok prímtényezős alakjának felhasználásával!

a) [8; 32]; *b)* [1; 14];
c) [24; 60]; *d)* [120; 45];
e) [96; 144]; *f)* [60; 108];
g) [112; 32]; *h)* [242; 275].

3. Számítsd ki az alábbi számhármasok legkisebb közös többszörösét!

a) [7; 28; 12]; *b)* [25; 8; 27];
c) [48; 120; 72]; *d)* [75; 300; 200].

4. Add meg a legkisebb közös többszörösöket prímhatványok szorzataként!

a) $[2^3 \cdot 3^2 \cdot 5;\ 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7;\ 3 \cdot 5^2 \cdot 13]$;
b) $[2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5^2;\ 2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3;\ 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^4 \cdot 11^2]$.

5. A legkisebb közös többszörös megkeresésével hozzatok közös nevezőre és végezzétek el a műveleteket.

a) $\frac{3}{8} + \frac{7}{12}$; *b)* $\frac{7}{30} - \frac{3}{55}$;
c) $\frac{7}{54} - \frac{8}{100}$; *d)* $\frac{11}{54} + \frac{25}{108} - \frac{23}{72}$;
e) $\frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 5^2}$; *f)* $\frac{4}{3^3 \cdot 11} - \frac{8}{11^2 \cdot 5}$.

6. Milyen számok kerüljenek a négyzetek helyére, hogy az egyenlőség igaz legyen?

a) $(2^2 \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square};\ 3 \cdot 5^2 \cdot 2^{\square}) = 2400$;
b) $(2^2 \cdot 3^{\square} \cdot 5^{\square};\ 2^{\square} \cdot 3^2 \cdot 5) = 1080$.

7. Egy repülőgép-társaságnál négyféle úti cél közül választhatunk: 3 naponta indul egy gép Londonba, 4 naponta Párizsba, 8 naponta Brüsszelbe és 12 naponta Stockholmba. Ha Budapestről január elsején mind a négy városba elrepülhetünk, melyik napon indul újra együtt Budapestről ez a négy járat?

Panka és Berta 7. osztályos tanulók. A táblázatban az ő órarendjüket látod.

Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek
ofő	magyar	info/német	német	töri
fizika	ének	angol/német	magyar	magyar
biosz	töri	matek	matek	rajz
német/angol	matek	biosz	tesi	matek
német/info	tesi	föci	fizika	tesi
tesi		kémia		német
magyar				

1. PÉLDA

Állapítsd meg, mely napokon mondhatta Panka az alábbi állításokat!
A: Ma nincs matekórám.
B: Ma lehet, hogy felelünk történelemből.

Megoldás

Csak hétfőn nincs matematikaóra, ezért az *A* állítás csak hétfőn hangozhatott el.
A *B* állítást Panka csak kedden vagy pénteken mondhatta, mivel csak ezeken a napokon van történelemóra.
Panka egyik reggel iskolába menet összetalálkozott Bertával, aki kissé szétszórt volt, és azt kérdezte:
– Ha ma szerda van, akkor nincs történelemóránk? És ez fordítva is igaz? Ha nincs történelemóránk, akkor ma szerda van?
Panka kissé furcsán nézett rá:
– Halihó, ébredj már fel! Persze, hogy szerda van, és nincs törink. De a második kérdésedre „nem" a válasz, hiszen hétfőn és csütörtökön sincs törióránk.

PÁROS MUNKA

Fogalmazzatok meg állításokat, és azok megfordítását is az itt látható órarend alapján! A párotok döntse el, hogy egy-egy leírt állításotok igaz vagy hamis!

IV. 6. EGY KIS LOGIKA

Az élet minden területén gyakran kell eldöntenünk egy állításról, információról, hogy igaz-e vagy hamis. A kérdés eldöntésében előző ismereteink, ezekből levont következtetéseink segíthetnek.
A helyes következtetés az oszthatóság esetében is fontos, mivel ezekre alapozhatjuk újabb állításainkat. Vizsgáljunk meg néhány fontos következtetést!

1. Ha egy összeg minden tagja osztható egy pozitív egész számmal, akkor az összeg is osztható a számmal.

A feltétel (az összeg minden tagja osztható egy számmal) szerint a szám többszöröseit adjuk össze, ezért az összeg is többszöröse lesz az adott számnak. Illusztráljuk egy példával:
A $35 + 21 + 63 = 7 \cdot 5 + 7 \cdot 3 + 7 \cdot 9$, az összeg minden tagja osztható 7-tel.
Az összeg $119 = 7 \cdot (5 + 3 + 9)$, ami szintén osztható 7-tel, mivel 7-nek a $(5 + 3 + 9)$-szerese.

A következő egy hibás következtetés!

2. Ha egy összeg osztható egy pozitív egész számmal, akkor az összeg minden tagja is osztható a számmal.

Például a 4 osztója a 12-nek, de a 4 nem osztója az $5 + 7$ összeg tagjainak.

3. Ha egy különbség minden tagja osztható egy pozitív egész számmal, akkor a különbség is osztható a számmal.

Különbség esetén az 1. esethez hasonló módon gondolkodhatunk. Ezt a következő példával szemléltetjük:
A $72 = 99 - 27 = 11 \cdot 9 - 3 \cdot 9$, a különbség minden tagja osztható 9-cel, ezért a különbség $72 = (11 - 3) \cdot 9$ is osztható 9-cel, hiszen 9 többszöröse.

Ismét egy rossz következtetés:

4. Ha egy különbség osztható egy pozitív egész számmal, akkor a különbség minden tagja is osztható a számmal.

A következtetés hibás, mivel például a 4 osztója a 20-nak, de a 4 nem osztója a $43 - 23$ különbség tagjainak.

5. Ha egy szorzat egyik tényezője osztható egy pozitív egész számmal, akkor a szorzat is osztható a számmal.

A következtetés helyes, mivel a feltétel szerint a szorzat egyik tényezője többszöröse egy pozitív számnak, így ennek a többszöröse az adott pozitív számnak is többszöröse lesz.

És végül ez is hibás következtetés:

6. Ha egy szorzat osztható egy pozitív egész számmal, akkor van olyan tényezője, amely osztható a számmal.

Például a 6 osztója a 18-nak, de a 6 nem osztója a $2 \cdot 9$ szorzat tényezőinek.

FELADATOK

Szorgimorgi szigetén szorgik és morgik laknak. A szorgik mindig igazat mondanak, a morgik mindig hazudnak. Egyetlen dologban azonban hasonlítanak: jól tudják a matekot.

1. Hétfőn a szigeten sétálva találkoztam három szigetlakóval. Megmutattam nekik két számot, és a következőket mondták:
A: A két szám összege osztható 3-mal.
B: Az egyik szám 3 többszöröse.
C: A másik szám 3-mal osztva 2-t ad maradékul.
Lehetett-e mindhárom szigetlakó szorgi?

2. Kedden szembejött velem három szigetlakó, megmutattam nekik három számot, ekkor a következőket mondták:
A: Mindhárom szám osztható 5-tel.
B: A három szám szorzata osztható 5-tel.
C: A három szám összege osztható 5-tel.

a) Mit mondhatsz *B*-ről és *C*-ről, ha tudod, hogy *A* szorgi?
b) Mit mondhatsz *A*-ról és *C*-ről, ha tudod, hogy *B* morgi?

3. Szerdán újabb ismerősöket szereztem a szigeten, így nekik is mutattam két számot. A következőket mondták:
A: A két szám összege osztható 8-cal.
B: A két szám különbsége osztható 8-cal.
C: A két szám szorzata osztható 8-cal.

a) Lehet-e *A*, *B* és *C* is szorgi?
b) Lehet-e mindhárom szigetlakó morgi?
c) Lehet-e közöttük egy szorgi és két morgi? Ha igen, melyikük mond igazat?

4. Csütörtökön három 10-nél nagyobb természetes számot mutattam nekik, melyek összege osztható 3-mal. Döntsd el az alábbi állításokról, hogy mondhatták-e szorgik! Válaszaidat példákkal indokold!
A: Az összeg minden tagja osztható hárommal.
B: Az összeg pontosan két tagja osztható hárommal.
C: Az összeg pontosan egy tagja osztható hárommal.
D: Az összeg egyik tagja sem osztható hárommal.

5. Pénteken a 306 540-es számot mutattam a szembe jövő szorgiknak és morgiknak, akik a következő megállapításokat tették:
A: Ez a szám akkor is páros, ha az első és az utolsó számjegyét felcseréljük.
B: Ez a szám akkor is osztható 3-mal, ha a számjegyeit összekeverjük, és tetszőleges sorrendben felírjuk.
C: Ez a szám akkor is osztható 5-tel, ha az utolsó két számjegyét felcseréljük.
D: Ez a szám nem osztható 9-cel.
E: Ezt a számot tetszőleges természetes számmal szorozva 3-mal osztható számot kapunk.

Kik voltak morgik a csapatból?

IV. 7. OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOK

Ismételjük át a tavaly megtanult szabályokat! Ne feledd, oszthatóságról mi csak a természetes számok körében beszélünk!

1. Egy szám pontosan akkor osztható 3-mal, illetve 9-cel, ha számjegyeinek összege is osztható 3-mal, illetve 9-cel.

1. PÉLDA

A 45 684 osztható-e 3-mal, illetve 9-cel?

Megoldás

A 45 684 szám számjegyeinek összege $4 + 5 + 6 + 8 + 4 = 27$. Mivel 27 osztható 9-cel, így az eredeti szám is osztható 9-cel. Mivel 9 többszöröse a 3-nak, ezért a szám 3-mal is osztható.
Figyeljük meg a 45 684 szám „helyi értékes” összegalakját:

$$45\,684 = 4 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 4 =$$
$$= 4 \cdot 9999 + 4 + 5 \cdot 999 + 5 + 6 \cdot 99 + 6 + 8 \cdot 9 + 8 + 4$$

Ennek az összegnek az első, harmadik, ötödik és hetedik tagja láthatóan osztható 9-cel, tehát az oszthatóság csak a többi tag összegétől függ. Ezek összege: $4 + 5 + 6 + 8 + 4$, vagyis a szám számjegyeinek összege.

Ahogy az eddigiekben láttuk, azért tudtunk egyszerű oszthatósági szabályt megfogalmazni, mert a 10-es számrendszer minden helyi értéke 9-cel osztva 1 maradékot adott. Ha bármely helyi értékre írunk egy számjegyet, akkor a 9-es maradék a számjegy 1-szeresének maradékával, azaz magával a számjegy maradékával egyezik meg.
Felmerül a kérdés, hogy mely számok esetén lehet hasonlóan egyszerű szabályt találni?
A következő táblázatban a tízes számrendszer helyi értékeinek maradékát soroljuk fel:

	1	10	100	1000	10 000	100 000
2-es maradék	a számjegytől függ	0	0	0	0	0
4-es maradék	a számjegytől függ	a számjegytől függ	0	0	0	0
8-as maradék	a számjegytől függ	a számjegytől függ	a számjegytől függ	0	0	0
5-ös maradék	a számjegytől függ	0	0	0	0	0
25-ös maradék	a számjegytől függ	a számjegytől függ	0	0	0	0
125-ös maradék	a számjegytől függ	a számjegytől függ	a számjegytől függ	0	0	0

Ezek alapján újabb oszthatósági szabályokat állapíthatunk meg:

2. Egy szám pontosan akkor osztható 2-vel, illetve 5-tel, ha az utolsó számjegye osztható 2-vel, illetve 5-tel.

3. Egy szám pontosan akkor osztható 4-gyel, illetve 25-tel, ha az utolsó két jegyéből álló kétjegyű szám osztható 4-gyel, illetve 25-tel.

4. Egy szám pontosan akkor osztható 8-cal, illetve 125-tel, ha az utolsó három számjegyéből alkotott háromjegyű szám osztható 8-cal, illetve 125-tel.

Megjegyzés:
Tovább vizsgálva a helyi értékek maradékait újabb oszthatósági szabályokat állapíthatunk meg. A legismertebb:

5. Egy szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha számjegyeinek váltakozó előjelű összege osztható 11-gyel.

Például a 907 016 osztható 11-gyel, mert $9 - 0 + 7 - 0 + 1 - 6 = 11$ osztható 11-gyel.
Az oszthatósági szabályokkal a maradékok is megállapíthatók, mivel megegyeznek az oszthatósági szabály által vizsgált szám osztási maradékával.

FELADATOK

1. *a)* Osztható-e a 111 111 111 szám 3-mal, illetve 9-cel?
b) Osztható-e a 222 333 444 szám 3-mal, illetve 9-cel?
c) Osztható-e a 222 333 444 szám 2-vel, 4-gyel, illetve 8-cal?
d) Osztható-e a 222 333 444 szám 11-gyel?

2. Válaszolj a kérdésekre az összeg, illetve a szorzat kiszámítása nélkül!
a) Osztható-e a $289 + 316$ összeg 3-mal?
b) Osztható-e a $120 + 48 + 317$ összeg 4-gyel?
c) Osztható-e a $8145 - 3069$ különbség 9-cel?
d) Osztható-e a $6527 - 4315$ különbség 4-gyel?
e) Osztható-e a $31 \cdot 16 \cdot 7$ szorzat 8-cal?
f) Osztható-e a $34 \cdot 15 \cdot 27$ szorzat 10-zel?

3. Milyen számjegyet írhatunk a ✱ helyére, hogy igaz legyen az állítás?
a) 4508✱ osztható 4-gyel.
b) 4508✱ osztható 3-mal.
c) 4508✱ osztható 9-cel.

4. Dobókockával dobunk kétszer egymás után. Sorold fel azokat a dobáspárokat, ahol az így kapott kétjegyű szám osztható
a) 5-tel; *b)* 8-cal;
c) 10-zel; *d)* 25-tel!

5. Írjunk fel a 4; 9; 14 és 15 számok segítségével olyan kéttényezős szorzatokat, ahol a szorzat
a) osztható 3-mal;
b) 4-gyel osztva 2 maradékot ad;
c) 5-tel osztva 1 maradékot ad;
d) osztható 8-cal!

6. Rakj ki az 1; 2; 3; 5 számkártyákból olyan háromjegyű számokat, amelyek oszthatók

a) 3-mal; *b)* 4-gyel; *c)* 25-tel!
Keresd meg az összes számot!

7. Igaz-e, hogy
a) négy egész szám között mindig van két olyan, hogy a különbségük osztható 3-mal?
b) öt egész szám között mindig van két olyan, hogy a különbségük osztható 4-gyel?
c) hét egész szám között mindig van két olyan, hogy a különbségük osztható 6-tal?

8. Hány egész számot kell választanod, hogy biztos legyen köztük kettő, amelyek különbsége osztható 5-tel?

IV. 8. KÉSZÍTSÜNK MAGUNKNAK OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOKAT!

Kiegészítő tananyag

1. PÉLDA

Milyen számjegyet írjunk a ✱ helyére a 74 8✱8 számban, hogy a szám osztható legyen 36-tal? A 36-tal való oszthatóságnak nem ismerjük a szabályát. Fogalmazd meg, hogyan gondolkozzunk!

Megoldás

A 36 felírható például $4 \cdot 9$ alakban. Mondhatjuk-e, hogy elég azt vizsgálni, hogy milyen esetekben osztható a szám 4-gyel és 9-cel?

Azt tudjuk, hogy ha 36 osztója a 74 8✱8-nak, akkor a szám prímtényezős felbontásában szerepelnie kell a $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 4 \cdot 9$ szorzatnak is, és ez éppen a $4 \cdot 9$ prímfelbontása.

A 74 8✱8 akkor osztható néggyel, ha a ✱8 kétjegyű szám osztható 4-gyel. Tehát a ✱ helyére 0-t, 4-et vagy 8-at írhatunk. Ebből következik, hogy a lehetséges három szám: 74 808, 74 848, 74 888.
A 9-cel való oszthatóság eldöntéséhez adjuk össze a számjegyeket mindhárom esetben!
$7 + 4 + 8 + 0 + 8 = 27$, vagyis a szám osztható 9-cel.
$7 + 4 + 8 + 4 + 8 = 31$, vagyis a szám nem osztható 9-cel.
$7 + 4 + 8 + 8 + 8 = 35$, vagyis a szám nem osztható 9-cel.
Tehát a feladatnak egy megoldása van: a ✱ helyére csak a 0 számjegyet írhatjuk, mert csak a 74 808 osztható 36-tal. (Számolással megállapíthatjuk, hogy $74\,808 = 36 \cdot 2078$, tehát az állítás igaz.)

Vajon mindig ilyen egyszerű a dolgunk? Elegendő-e felírni a kívánt osztót szorzatalakban, és megvizsgálni, hogy a szorzótényezők osztói-e a számnak? A kérdést és a választ sokkal könnyebb megérteni egy példa segítségével.

2. PÉLDA

Milyen számjegyet írjunk a ✱ helyére a 81 8✱0 számban, hogy a szám osztható legyen 40-nel?

Megoldás

Az előző gondolatmenet alapján:

$$40 = 4 \cdot 10.$$

A felírt szorzótényezőkre ismerünk egyszerű oszthatósági szabályokat. Ezek alapján azonnal megállapítható, hogy a feladatban megadott szám 10-zel biztosan osztható, mert utolsó számjegye 0. 4-gyel viszont csak akkor lesz osztható, ha a ✱ helyére 0-t, 2-t, 4-et, 6-ot vagy 8-at írunk.

Ellenőrizzük a megoldásokat:

$81\,800 = 2045 \cdot 40$, tehát a 0 megoldása a feladatnak.
$81\,820 = 2045 \cdot 40 + 20$, tehát a 2 nem jó megoldása a feladatnak, mert 20 az osztási maradék.
A további eseteket ellenőrizve a 81 840 és a 81 880 osztható 40-nel, a 81 860 viszont nem.

Miért kaptunk hamis megoldásokat is?

8. KÉSZÍTSÜNK MAGUNKNAK OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOKAT!

Kiegészítő tananyag

Ha egy szám osztható 40-nel, akkor prímfelbontásában szerepelnie kell a

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5$$

prímtényezőknek. Ám a 4-gyel és 10-zel való oszthatóság már akkor is teljesül, ha a szám prímfelbontásában $2 \cdot 2 \cdot 5$ szerepel. Tehát egy 2-sel kevesebb prímtényezőt vettünk csak figyelembe, mivel mind a 4, mind a 10 osztható 2-vel. Ezért kaptunk hibás „megoldásokat” is.
Ezek szerint nem a legcélszerűbb módon bontottuk fel a 40-et két szám szorzatára.

Nézzük a $40 = 5 \cdot 8$ szorzatalakot. Most a tényezőknek nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk, így nem veszítünk el prímtényezőt.

Az 5-tel való oszthatóság bármilyen számjegy esetén teljesül, mivel a 81 8✱0 nullára végződik.
A 8-cal való oszthatóság azonban csak azokban az esetekben igaz, ha 8✱0 szám osztható 8-cal, vagyis a ✱ helyére a 0, 4, 8 számjegyeket írhatjuk, de nem írhatjuk a 2-t és a 6-ot.
Tehát a megoldások:
- a ✱ helyére 0-t írva: 40 osztója a 81 800-nak;
- a ✱ helyére 4-et írva: 40 osztója a 81 840-nak;
- a ✱ helyére 8-at írva: 40 osztója a 81 880-nak.

Ezen megfigyeléseink alapján újabb oszthatósági szabályokat fogalmazhatunk meg:
Például:
1. **Egy szám osztható 6-tal, ha osztható 2-vel és 3-mal, mert $2 \cdot 3 = 6$, és 2-nek és 3-nak nincs 1-nél nagyobb közös osztója.**
2. **Egy szám osztható 18-cal, ha osztható 2-vel és 9-cel, mert $2 \cdot 9 = 18$, és 2-nek és 9-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója.**

Emlékszel?
Ha két számnak nincs 1-nél nagyobb közös osztója, akkor a két számot **relatív prímszámoknak,** röviden **relatív prímeknek** nevezzük.

IV. 8. KÉSZÍTSÜNK MAGUNKNAK OSZTHATÓSÁGI SZABÁLYOKAT!

Kiegészítő tananyag

Összegezve:

Ha egy összetett számmal való oszthatóságot vizsgálunk, akkor célszerű a számot olyan szorzatalakban felírni, amelynek tényezőire már ismerünk oszthatósági szabályt. A tényezőket úgy válasszuk meg, hogy azok páronként relatív prímek legyenek!

Például:

1. Egy szám osztható 30-cal, ha osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel is, mivel $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, és 2, 3, 5 páronként relatív prímek, azaz nincs 1-nél nagyobb közös osztójuk.
2. Egy szám osztható 24-gyel, ha osztható 3-mal és 8-cal.
3. Egy szám osztható 22-vel, ha osztható 2-vel és 11-gyel.

FELADATOK

1. Osztható-e a $14 \cdot 3 \cdot 8$ szorzat

a) 6-tal? *b)* 18-cal?
c) 21-gyel? *d)* 15-tel?

2. Igaz vagy hamis? Hamis válaszaidat példával igazold!

a) Ha egy szám osztható 6-tal és 8-cal, akkor 48-cal is.
b) Ha egy szám osztható 48-cal, akkor 6-tal és 8-cal is.
c) Ha egy szám osztható 7-tel és 10-zel, akkor 70-nel is.
d) Ha egy szám osztható 70-nel, akkor 2-vel, 5-tel és 7-tel is.
e) Ha egy szám nem osztható 9-cel, akkor 18-cal sem.
f) Nincs olyan 10-zel osztható szám, amelyik nem osztható 20-szal.

3. Gondoltam egy számra.
– Négyjegyű.
– Osztható 45-tel.
– Az első és az utolsó számjegye megegyezik.
– A második számjegye 7.
Melyik számra gondoltam?

4. Milyen számjegyet írhatunk a ✱ helyére, hogy igaz legyen az állítás?

a) 45 08✱ osztható 12-vel.
b) 9✱ 605 osztható 15-tel.
c) 32 ✱40 osztható 30-cal.

5. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amit a $\square$ helyére írhatsz, hogy a

a) $348 + \square + 36$ összeg osztható legyen 12-vel?
b) $9547 - \square$ különbség osztható legyen 18-cal?
c) $2 \cdot 3 \cdot \square \cdot 7$ szorzat osztható legyen 10-zel?
d) $2 \cdot 9 \cdot \square \cdot 13$ szorzat osztható legyen 18-cal és 14-gyel is?

6. „Gondoltam egy számra” – szól az osztály lelkes matekosa, és a többiek már kérdezgetik is. „Annyit elárulok róla, hogy 1 és 100 között van” – teszi hozzá sokat sejtető mosollyal.
– 10-zel osztva mennyi maradékot ad? – Négyet.
– Osztható nyolccal? – Igen.
– Megvan benne a három? – Igen.
– Én már tudom! – örvendezik Jázmin.
Próbáljátok ki ti is a padtársaddal ezt a játékot!

JÁTÉK

Adj nyerő stratégiát! Keress olyan lépéssorozatot, amelyikkel mindig nyersz!

1. Ezt a játékot párban játszhatjátok. Tegyetek egy bábut (radírt, papírfecnit stb.) a START mezőre! Lépjetek a bábuval felváltva egy vagy két mezőt előre! Az a játékos nyer, aki pontosan rálép a CÉL mezőre.

2. Változtassatok a játékszabályon! Lépjetek egyet, kettőt vagy akár hármat is! Működik az előző játéknál kialakított stratégia?

3. Mit gondolsz, hogyan változik a nyerő stratégia, ha a mezők számát növeljük
a) 3-mal? *b)* 5-tel? *c)* 7-tel?

4. Ezt a játékot másféleképpen is játszhatjátok. Rakjatok ki tetszőleges számú kavicsot vagy pálcikát az asztalra, és vegyetek el belőle felváltva egyet, kettőt vagy hármat! Az nyer, aki az utolsó darabot elveszi. Figyeljétek meg, hogyan kell megváltoztatni a nyerő stratégiát a kirakott tárgyak darabszámától függően!

5. Versenyezzetek, ki tud adott idő alatt többféle téglatestet megépíteni adott darabszámú kis kockából! Hányféle téglatest építhető
a) 8 darab;
b) 12 darab;
c) 16 darab;
d) 48 darab kis kockából?

IV. 10. ÖSSZEFOGLALÁS

Ebben a fejezetben először átismételtük az oszthatóság és a többszörös fogalmát, valamint a korábban tanult oszthatósági szabályokat.

A pozitív egész számok halmazán az *A* szám osztója a *B* számnak, ha az *A* számot megszorozva egy természetes számmal a *B* számot kapjuk.
Azt is mondhatjuk, hogy ha a *B* számot elosztjuk az *A* egész számmal, akkor hányadosként egész számot, vagyis 0 maradékot kapunk.
A 0 különleges szám, mert 0-nak minden pozitív egész szám osztója.

Felsoroljuk azokat az osztókat, amelyekhez már tanultunk oszthatósági szabályt:
2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 11; 25; 100; 125; 1000

Beszéltünk a következő fogalmakról:

- közös osztó;
- legnagyobb közös osztó;
- közös többszörös;
- legkisebb közös többszörös.

Például 72 és 40 legnagyobb közös osztója $(72; 40) = (2^3 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 5) = 2^3 = 8$.
Például 72 és 40 legkisebb közös többszöröse $(72; 40) = (2^3 \cdot 3^2; 2^3 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$.

Foglalkoztunk a prímszámokkal is:
Prímszámnak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan kettő pozitív osztója van (egy és önmaga).
Összetett számok azok a természetes számok, amelyeknek kettőnél több pozitív osztója van.
Az 1 nem prímszám és nem összetett szám.

FELADATOK

1. Teszt
Az alábbi totóban több jó válasz is lehetséges. A jó válaszok betűjelét írd a füzetedbe!

I. A 269 136 osztható
A: 6-tal; B: 8-cal; C: 72-vel; D: 48-cal.

II. A $\overline{64\,63Z}$ ötjegyű szám osztható 12-vel. Milyen szám kerülhet a Z helyére?
A: 2; B: 4; C: 0; D: 8.

III. Az 1, 2, 3, 4, számkártyákkal hány 3-mal osztható háromjegyű szám rakható ki?
A: 3; B: 6; C: 12; D: nincs ilyen szám.

IV. Hányféle módon rendezhetők párokba a 8; 12; 27; 35; 90 számok úgy, hogy a párokon belüli sorrendet nem vesszük figyelembe?
A: 8; B: 10; C: 12; D: 9.

V. A 8; 12; 27; 35; 90; számok közül az összes lehetséges módon kiválasztunk kettőt úgy, hogy a kiválasztott számok sorrendjét nem vesszük figyelembe. Hány esetben lesznek a kiválasztott számpárok tagjai relatív prímek?
A: 4; B: 6; C: 0; D: 5.

VI. Az alábbiak közül mely számpároknak lesz a legnagyobb közös osztója 12?
A: 120 és 38; B: 84 és 132; C: 24 és 96; D: 12 és 924.

2. Melyik állítás igaz? A hamis állításra keress példát!
A: Ha egy szám osztható 4-gyel és 12-vel, akkor osztható 48-cal is.
B: Ha egy szám osztható 5-tel és 2-vel, akkor osztható 10-zel is.
C: Ha egy szám osztható 6-tal és 4-gyel, akkor osztható 24-gyel is.
D: Ha egy szám osztható 4-gyel és 8-cal, akkor osztható 32-vel is.
E: Ha egy szám osztható 9-cel és 5-tel, akkor osztható 45-tel is.

3. Melyik az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyek valamilyen sorrendjével felírható hatjegyű számok közül
a) a legnagyobb;
b) a legnagyobb páros;
c) a legnagyobb 3-mal osztható;
d) a legnagyobb 4-gyel osztható;
e) a legnagyobb 5-tel osztható;
f) a legnagyobb 6-tal osztható;
g) a legnagyobb 12-vel osztható szám?

4. Miért nem lehet az 1; 2; 3; 4; 5; 6 számjegyek valamilyen sorrendjével felírható hatjegyű szám 11-gyel osztható?

5. Igaz, vagy hamis?
a) Ha két természetes szám szorzata 0, akkor mindkettő 0.
b) Ha két természetes szám szorzata páros, akkor mindkettő páros.
c) Ha két természetes szám szorzata páratlan, akkor mindkettő páratlan.
d) Ha egy természetes szám jegyeinek összege osztható 6-tal, akkor a szám is osztható 6-tal.
e) Ha egy páros természetes szám jegyeinek az összege osztható 18-cal, akkor a szám is osztható 18-cal.

6. Minden sorban felírtuk, hogy az a szám melyik prímek szorzata, de elrejtettünk a sorban egy felesleges prímet is. Ha a felesleges prímek mellé írt betűket összeolvasod, akkor egy értelmes szót kapsz. Nézz utána az interneten, hogy mi a megfejtett szó és a prím szó kapcsolata!

60	2 H	7 I	3 J	5 K	2 L
198	3 H	2 I	3 J	13K	11 L
525	3 A	5 B	7 C	5 D	13 E
572	2 P	7 R	13 S	2 T	11 U

7. Az angoltanár ad házi feladatot az első napon, aztán a negyedik napon és így tovább, minden 3. tanítási napon.
A matektanár is ad leckét az első napon, és aztán minden 2. tanítási napon.
A földrajztanár rendes, ő először a hatodik napon ad leckét, és aztán is csak minden 5. tanítási napon.
Ha mindhárom tanár ad házi feladatot, akkor az tragikus nap. Először október 10-e péntek volt tragikus. Mikor lesz a következő tragikus nap?

8. Hány négyzet van a sakktáblán?

IV. 10. ÖSSZEFOGLALÁS

9. Négy focicsapat körmérkőzést játszik a helyi Bozsik-tornán, azaz mindenki játszik mindenkivel. 10:00-kor kezdenek, egy-egy mérkőzés 20 percig tart, és két meccs között 5 perc szünetet tartanak. Három pálya van egymás mellett, a sorszámuk I., II., III., tehát legfeljebb 3 meccset játszhatnak egyszerre.

a) Hány mérkőzést játszik egy-egy csapat?
b) Hány mérkőzést játszanak összesen?
c) Mennyi idő alatt lehet lebonyolítani a helyi Bozsik-tornát?
d) Segíts a rendezőknek! Készíts lebonyolítási tervet, ha a nevezett csapatokat *A*; *B*; *C*; *D* jelöli. A terv tartalmazza, hogy melyik csapat mikor, melyik pályán játszik.
e) Hogyan változnak a válaszok, ha 5 csapat nevezett a tornára?
f) Hogyan változnak a válaszok, ha 6 csapat nevezett a tornára?

JÁTÉK

BINGO

Kisebb, mint 15	Páros	Négyzetszám	Páratlan
Prím	2-re végződik	11 többszöröse	30 osztója
25-nél nagyobb	10 hatványa	5-nél kisebb	40 és 60 között van
Van benne 7-es	Háromjegyű szám	Köbszám	Egy másik prím

Mindenki készítsen egy 4×4-es táblázatot a füzetében, amelyikbe olyan természetes számokat ír be, amelyek illenek az itt látható meghatározásokhoz.

Ha mindenki kitöltötte a saját táblázatát, akkor sorban mondjatok egy-egy számot a saját lapotokról. Akinél szerepel a mondott szám, az be kell ikszelje egy helyen a saját lapján. Ha valaki egy sorban, oszlopban vagy átlóban mind a négy számot beikszelte, akkor felkiált, hogy BINGÓ! és nyert.

A játék egy nehezebb változatában akkor lehet nyerni, ha mind a 16 számot sikerül valakinek beikszelni.

Ha már nagyon jól megy, készítsetek saját meghatározás táblát a bingóhoz.

V. EGYENLETEK, EGYENLŐTLENSÉGEK

Következő járatunkkal Alexandriába látogatunk, Kr. e. 240-be. – Mindenki jelentkezett? – kérdezte Judit néni teljesen feleslegesen, hiszen maga előtt látta a pályázók névsorát. Még tizenkét másodpercet kellett várni, és a holomonitoron megjelent az utazók listája. A két kiválasztott, Zsombi és Zsuzsi először örömujjongásban tört ki, majd villámgyorsan készülődni kezdtek az időugrásra. A visszaszámlálás megkezdésekor erősen megmarkolták a karfát, s szorításuk csak akkor enyhült, amikor megpillantottak néhány görögösen öltözött embert és mögöttük az alexandriai könyvtárat.
– Üdv, Béta! Hallom, keresel egy megbízható embert, aki Szüénébe utazik mérni.
– Jól hallottad, Hérón, de ha még egyszer Bétának szólítasz, nem te leszel az, bármilyen nagyra tartom is a munkáidat.
– Bocsáss meg, Eratoszthenész! Tudod, én is mennyire becsüllek. Nem mellesleg szeretnék részt venni a mérésben. Elmagyaráznád az eljárásodat?
– Az utazók szerint van Szüénében egy nap, amikor a Nap úgy süti a kutak fenekét, hogy egy csepp árnyék sem esik a vízre. Ha ugyanekkor itt Alexandriában is megmérjük, hogy mekkora árnyékot vet egy függőlegesen leszúrt bot, akkor ki tudjuk majd számolni a Föld kerületét, hiszen tudjuk, milyen messze van Szüéne Alexandriától. – Miközben beszélt, egy bottal hevenyészett ábrát rajzolt a homokba.
– Most, hogy elmondtad, olyan egyszerűnek tűnik. Hogy nem jutott ez nekem is eszembe? – sóhajtott Hérón.
Zsuzsi azt forgatta a fejében, hogyha hazaérnek, ők is lerajzolják a többieknek Eratoszthenész magyarázatát. Zsombi viszont ekkorra már készített is néhány téridőképet, amit elégedetten bámult a holomonitoron.

V. 1. ARÁNYOSSÁGRÓL MÉG EGYSZER

Hatodik osztályban tanultuk az arány fogalmát. Mennyiségeket, számokat osztottunk fel megadott arányban.

CSOPORTMUNKA

a) Beszéljétek meg, mit jelent az 1 : 2?
b) Szemléltessétek ábrával egy mennyiség 2 : 3 arányú felosztását!
c) Írjatok egy feladatot az osztály egy másik csoportjának, amelyben egy mennyiség 3 : 5 arányú felosztását kell elvégezni!

Ha egy osztályban a fiútanulók kétszer annyian vannak, mint a lánytanulók, akkor azt is mondhatjuk, hogy a lányok és a fiúk aránya 1 : 2.

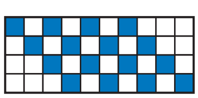
Mit jelent az 1 : 2 arány? Azt, hogy az 1 hányszorosa a 2-nek. Az 1 a 2-nek $\frac{1}{2}$-szerese.

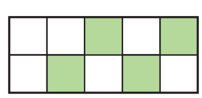
Két szám vagy mennyiség aránya a két szám hányadosa. Az fejezi ki, hogy az első szám, illetve mennyiség hányszorosa a másodiknak.

Arány például: 1 : 2 vagy $\frac{4}{5}$. Tizedes tört alakban csak akkor adjuk meg, ha véges tizedes tört az arány értéke.

1. PÉLDA

Írjuk fel az itt látható különböző színű csempék területének arányát!





Megoldás

A színes és színezetlen részek aránya:
16 : 24; 4 : 6.

Írjuk fel az arányokat tört alakban!

$$16 : 24 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$

$$4 : 6 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Azt kaptuk, hogy a színes és a színezetlen csempék aránya mindkét esetben 2 : 3.

A két ábráról leolvasott arányok egyenlő értékűek. Az egyenlő értékű arányokat **aránypárok**nak nevezzük. Az arányban szereplő számok nem cserélhetők fel.
Az arányokkal való számolásnál célszerű a lehető legegyszerűbb alakkal számolni.

2. PÉLDA

Egy iskolai *A fele sem igaz!* vetélkedő díjazására a diákönkormányzat 24 db 1000 Ft-os könyvutalványt ajánlott fel. A megállapodás alapján az első három helyezett csapatot jutalmazzák könyvutalvánnyal. Szeretnék, ha az első helyezett háromszor akkora jutalmat kapna, a második pedig kétszer akkorát, mint a harmadik helyezett. Hogyan osszák el az utalványokat?

Megoldás

Tekintsük a harmadik helyezett csapat jutalmát egységnyinek! Ekkor a jutalmat 3 : 2 : 1 arányban kell felosztani, azaz az első kapjon 3 részt, a második 2 részt, a harmadik 1 részt! Ez azt jelenti, hogy az utalványokat $3 + 2 + 1 = 6$ részre kell osztani.

$24 : 6 = 4$

Az első helyezettnek $3 \cdot 4 = 12$, a második helyezettnek $2 \cdot 4 = 8$, a harmadik helyezettnek $1 \cdot 4 = 4$ könyvutalvány jut.

Arányos osztásnál a felosztandó mennyiséget vagy számot elosztjuk az arányban szereplő számok összegével, majd a kapott értéket megszorozzuk az arányban szereplő számokkal.

FELADATOK

1. Írj fel három olyan számpárt, melyeknek aránya

a) 2 : 5; *b)* 3 : 2; *c)* 10 : 15!

2. Írd fel egész számokkal a megadott arányokat!

a) 1,5 : 6,75; *b)* $\frac{1}{2} : 2$; *c)* $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$;

d) $\frac{1}{3} : \frac{3}{6}$; *e)* $\frac{3}{7} : \frac{4}{9}$; *f)* $3\frac{1}{5} : 2\frac{3}{7}$.

3. Írd fel két egész számmal az alábbi arányokat úgy, hogy a lehető legkisebb pozitív egész szám szerepeljen az arányban!

a) 84 : 112; *b)* 14 : 21; *c)* 10 : 0,04;

d) 0,75 : 2,4; *e)* $\frac{5}{8} : \frac{2}{3}$.

4. Osszuk fel az alábbi számokat a megadott arányban!

a) 56-ot 3 : 5 arányban;

b) 0,32-ot 7 : 9 arányban;

c) $\frac{11}{5}$-öt 5 : 6 arányban;

d) 2800-at $\frac{1}{3} : \frac{5}{6}$ arányban;

e) 6300-at 2 : 3 : 4 arányban;

f) $\frac{9}{5}$-ot 1 : 2 : 3 arányban.

5. Két testvérnek összesen 420 cserélhető focis kártyája van. Az idősebb testvérnek háromszor annyi kártyája van, mint a fiatalabbnak.

a) Írd fel a két testvér kártyái számának az arányát!

b) Hány focis kártyája van a kisebb testvérnek?

6. Két szám aránya 2 : 7.

a) Mekkora a nagyobbik szám, ha a kisebb szám 124?

b) Melyik két számra gondoltunk, ha az összegük 1710?

c) Melyik két számról van szó, ha különbségük 45?

7. Egy derékszögű háromszög két hegyesszögének az aránya 1 : 4. Hány fokosak a háromszög szögei?

8. A Vidám családban három gyerek van. A családtagok életkorának összege 116 év. A gyerekek életkorának aránya 5 : 4 : 3. Az apa 4 évvel idősebb az anyánál. Ha az apa életkorának kétszereséhez 4-et adunk, 100-at kapunk.

a) Hány évesek a szülők?

b) Hány éves a legidősebb gyermek?

c) Hány év múlva lesz a legkisebb gyerek fele annyi idős, mint az anya most?

V. 2. MIT TUDUNK A SZÁZALÉKSZÁMÍTÁSRÓL?

Milyen fogalmakról tanultunk a tavalyi évben? Segít az ábra!

A SZÁZALÉKÉRTÉK MEGHATÁROZÁSA

1. PÉLDA

Egy 650 férőhelyes színházban a jegyek 40%-a 4900 Ft, a többi jegy ára 3500 Ft.

a) Hány db jegyért kell 4900 Ft-ot fizetni?

b) A jegyek 92%-át sikerült eladni. Hány darab jegy maradt meg?

Megoldás

a) 650-nek a 40%-át keressük. Másként úgy is fogalmazhatunk, hogy mennyi 650-nek a $\frac{40}{100}$ része. Ezt sokféleképpen felírhatjuk:

$650 \cdot \frac{40}{100} = 260$ vagy $650 \cdot 40 : 100 = 260$ vagy $650 \cdot 0{,}4 = 260$.

A konkrét érték kiszámítása bármelyik műveletsorral elvégezhető.

260 db 4900 Ft-os jegy van.

b) A jegyek $100\% - 92\% = 8\%$-a maradt meg, tehát 650-nek a 8%-át kell meghatározni.

Az előzőekhez hasonlóan $650 \cdot \frac{8}{100} = 650 \cdot 0{,}08 = 52$ db jegy maradt meg.

Általánosítsunk!

I. Határozzuk meg egy tetszőleges A érték 23%-át!
Az első példához hasonlóan itt is többféle módon történhet a kiszámítás. A-nak a 23%-a, azaz $\frac{23}{100}$-szorosa egyenlő: $A \cdot \frac{23}{100}$ vagy $(A \cdot 23) : 100$ vagy $(A : 100) \cdot 23$ vagy $\frac{A}{100} \cdot 23$ vagy $A \cdot 0{,}23$.
Az $A \cdot 0{,}23$ kiszámítási mód azért lehet a legcélszerűbb, mert konkrét A érték esetén a **százalékérték** számológéppel gyorsan kiszámolható.

II. Határozzuk meg A-nak a p%-át!

Bár most már egyetlen konkrét szám sincsen, de az előzőek alapján betűkkel is felírhatjuk a keresett kifejezést. Ebben az esetben azonban nem tudunk minden alakot megadni, mert a $\frac{p}{100}$-at nem lehet felírni tizedes tört alakban.

A keresett kifejezés: $A \cdot \frac{p}{100}$ vagy $(A:100) \cdot p$ vagy $\frac{A}{100} \cdot p$.

A SZÁZALÉKALAP MEGHATÁROZÁSA (100% KISZÁMÍTÁSA)

2. PÉLDA

Szofi a havi ingyenes letöltési korlát 35%-át, azaz 175 MB-ot már elhasznált az elszámolási időszak első 10 napjában. Mennyi az egy hónapra kapott ingyenes adatforgalmi lehetősége?

Megoldás

A kiszámítandó mennyiség 35%-át ismerjük. Úgy is fogalmazhatunk, hogy ismerjük a **százaléklábat** és a **százalékértéket,** és az alapot keressük.

Nézzünk kétféle megoldási utat!

Következtetéssel:
az 1%, majd ebből a 100% kiszámítása.
Ha 35% 175, akkor
1% $175:35=5$
100% $5 \cdot 100 = 500$

Egy lépésben kiszámítva:
Ismerjük egy mennyiségnek a 35%-át, azaz 0,35 részét, és az egészet keressük. Ezt megkaphatjuk egy lépésben is, a $175:0{,}35=500$ osztás elvégzésével.

Írjuk fel a kapott eredményeket többféle módon!

$(175:35)\cdot 100$ vagy $175:\frac{35}{100}$ vagy $175\cdot\frac{100}{35}$ vagy $\frac{175}{35}\cdot 100$ vagy $175:0{,}35$.

A műveletsorok eredményei egyenlők, Szofi ingyenes adatforgalma az elszámolási időszakban 500 MB.

Általánosítva:

3. PÉLDA

A Föld különböző éghajlati öveiben nagyon eltérő az évenként lehullott csapadék mennyisége. Ha tudjuk, hogy egy adott területen a lehullott csapadék mennyisége 50 mm, és ez az összmennyiség p%-a, akkor mennyi az éves lehullott csapadékmennyiség?

Megoldás

A keresett mennyiség most nem egy konkrét szám lesz, hanem p értékétől függ.

Következtetéssel: ha a p% 50 mm, akkor

1% $\quad \frac{50}{p}$;

100% $\quad \frac{50}{p} \cdot 100$.

Másképpen: Ha ismerjük egy szám p%-át, azaz $\frac{p}{100}$-ad részét, akkor a szám $50 : \frac{p}{100} = 50 \cdot \frac{100}{p}$.

A keresett értéket leíró műveletsorok:

$\frac{50}{p} \cdot 100$ vagy $50 : \frac{p}{100}$ vagy $50 \cdot \frac{100}{p}$.

Nézzük meg, mennyi a lehullott éves csapadékmennyiség néhány konkrét p értékre:

p%	50	20	12,5	10	5	2,5
lehullott éves csapadékmennyiség $50 : \frac{p}{100}$ (mm)	100	250	400	500	1000	2000

A p értékétől függően láthatjuk a lehullott éves csapadékmennyiséget.

Ha a százalékalapot szeretnénk meghatározni, akkor a százalékértékből visszakövetkeztetünk az 1%-ra, aminek a 100-szorosa adja meg az alapot.

A SZÁZALÉKLÁB MEGHATÁROZÁSA (HÁNY SZÁZALÉK?)

4. PÉLDA

Egy ruhákat árusító boltban az utolsó vásárlás alkalmával kaptunk egy 3000 Ft-os kupont, amelyen a következő szöveg található.

Beváltható 2015. június 30-ig. A kupon értéke csak 15 000 Ft feletti vásárlás esetén számítható be. Egy vásárlásnál csak egy kupon váltható be. Esetleges pénzvisszafizetési kötelezettség esetén üzletünk csak a kupon értéke nélküli összeget téríti vissza.

Ha szeretnénk megvásárolni egy 16 000 Ft-os kabátot és beváltjuk a kupont, akkor az eredeti ár hány százalékát kell fizetnünk?

Megoldás

Számítsuk ki először azt, hogy hányad része az eredeti árnak a kupon értékével csökkentett ár, majd írjuk át százalékos alakra!

A 13 000 Ft a 16 000 Ft-nak a $\frac{13\,000}{16\,000} = \frac{13}{16} = 0{,}8125$ része, azaz 81,25%-a.

Gondolkodhattunk volna másképpen is: 100% 16 000 Ft;
1% 160 Ft.

Azt kell kiszámítanunk, hogy a 13 000 Ft-ban hányszor van meg a 160 Ft, azaz 13 000 : 160 = 81,25%.

Általánosan:

1. lehetőség:
Meghatározzuk, hogy a százalékérték hányadrésze az alapnak, majd a kapott hányadost tizedes törtté alakítjuk, és megszorozzuk 100-zal. Ekkor megkapjuk a **százaléklábat.**

2. lehetőség:
Kiszámítjuk az alap 1%-át, majd megnézzük, hogy a százalékértékben hányszor van meg az 1% értéke. Így megkapjuk a **százaléklábat.**

FELADATOK

1. Számítsd ki 750-nek a
a) 20%-át; *b)* 15%-át; *c)* 27,5%-át;
d) 145%-át; *e)* 24,75%-át; *f)* 400%-át!

2. Számítsd ki kétféle módon a
a) 24 500 m 45%-át;
b) 5,4 kg 70%-át;
c) 3700 cm^2 27,5%-át!

3. Írd fel többféleképpen a
a) 20 perc p%-át; *b)* m kg 65%-át;
c) a liter 160%-át; *d)* 1,5 hl p%-át;
e) k kg p%-át!

4. Egy téglalap alakú kert egyik oldala 25 m, hosszabb oldala ennek 170%-a. Milyen hosszú a kert másik oldala?

5. Egy városismereti vetélkedőn 50 kérdéses tesztet kellett kitölteni. A Pajkos csapat célba érés után az alábbit mondta a már beérkezett csapatoknak: „*A feladatok közül 40% biztos, hogy jó, 45% lehet hogy jó, és csak a tesztkérdések 15%-ára nem tudtunk válaszolni.*” Igaz lehetett-e az állításuk?

6. 50 kg narancsban 39 kg víz van. Hány százalék a narancs víztartalma?

7. Hány százaléka
a) 27 a 100-nak; *b)* 12 a 200-nak;
c) 45-nek az 5; *d)* a 103,4 a 470-nek;
e) 1400-nak az 560; *f)* a 40,5 a 13,5-nek;
g) $\frac{3}{7}$ a $\frac{5}{14}$-nek; *h)* a 168 a 2800-nak;
i) a 210-nek a 42; *j)* 27 a 127-nek?

8. Melyik az a szám, amelynek
a) 1%-a 12; *b)* 4%-a 25;
c) 15%-a 75; *d)* 25%-a 4500;
e) 37,5%-a 4,5; *f)* 24%-a 252;
g) 220%-a 924; *h)* $33,\dot{3}$%-a 135;
i) p%-a 700; *j)* p%-a 3,2?

9. Az iskolánkban 315 lány tanul. Ez a tanulók létszámának a 45%-a. Hány tanuló jár az iskolába?

10. A hetedik évfolyamon lévő *A* osztályba 6-tal több tanuló jár, mint a *B* osztályba. Az *A* osztály tanulóinak 60%-a lány, és az osztályba 12 fiú jár.
a) Hányan tanulnak az *A* osztályban?
b) Hányan járnak a hetedik évfolyamra?
c) A *B* osztályban a fiúk és lányok aránya 1 : 2. Hány lány jár az évfolyamra?

V. 3. ÖSSZETETT SZÁZALÉKSZÁMÍTÁSI FELADATOK

1. PÉLDA

a) Egy üdítős palackokat töltő üzem új gépet vásárolt. Ennek teljesítménye nagyobb, mint a régi gépé, így egy óra alatt 10%-kal több dobozt tud megtölteni. A régi géppel egy óra alatt 2500 üdítős doboz tölthető meg. Hány dobozt tud megtölteni az új gép egy óra alatt?

b) Egy év múlva a gyártó frissítette a gép szoftverét, ami további 6%-os termelésnövekedést eredményezett. Hány dobozt tudnak a frissítés után megtölteni a géppel egy óra alatt?

Megoldás

a) $2500 + 2500 \cdot \frac{10}{100} = 2500 + 250 = 2750$ palackot töltenek meg óránként.

b) $2750 + 2750 \cdot \frac{6}{100} = 2750 + 165 = 2915$ dobozt lehet megtölteni 1 óra alatt.

Írjuk át a feladatban végzett számításokat más, egyszerűbb alakba!

$$2500 + 2500 \cdot \frac{10}{100} = 2500\left(1 + \frac{10}{100}\right) = 2500 \cdot 1{,}1 = 2750$$

$$2750 + 2750 \cdot \frac{6}{100} = 2750\left(1 + \frac{6}{100}\right) = 2750 \cdot 1{,}06 = 2500 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}06 = 2915.$$

Az itt leírt számítások alapján általánosítsunk!

I. Számítsuk ki 5000 p%-kal megnövelt értékét!

$$5000 + 5000 \cdot \frac{p}{100} \quad \text{vagy} \quad 5000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad \text{vagy} \quad 5000 \cdot \frac{100 + p}{100}$$

II. Számítsuk ki az A szám p%-kal megnövelt értékét!

$$A + A \cdot \frac{p}{100} \quad \text{vagy} \quad A \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad \text{vagy} \quad A \cdot \frac{100 + p}{100}$$

$$\underbrace{\boxed{5000}\boxed{p\%}}_{5000 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

2. PÉLDA

Mint minden gép, az újonnan vásárolt is kopik, veszít az értékéből, idegen szóval amortizálódik a használat során. Ennek következtében az első évben 12%-kal, a második évben 8%-kal csökken az értéke.

a) Mennyit ér a gép egy év elteltével, ha 12 500 000 Ft-ért vásárolták?

b) Mennyi az értéke két év múlva?

Megoldás

a) $12\,500\,000 - 12\,500\,000 \cdot \frac{12}{100} = 12\,500\,000 - 1\,500\,000 = 11\,000\,000$ Ft-ot ér a gép egy év használat után.

b) $11\,000\,000 - 11\,000\,000 \cdot \frac{8}{100} = 11\,000\,000 - 880\,000 = 10\,120\,000.$

Tehát két év múlva 10 120 000 Ft-ot ér a gép.

3. ÖSSZETETT SZÁZALÉKSZÁMÍTÁSI FELADATOK

A kidolgozott példa a gép értékének adott %-os csökkenését számolta ki.
Írjuk át más alakba a számolásokat!

$$12\,500\,000 - 12\,500\,000 \cdot \frac{12}{100} = 12\,500\,000\left(1 - \frac{12}{100}\right) = 12\,500\,000 \cdot 0,88 = 11\,000\,000$$

$$11\,000\,000 - 11\,000\,000 \cdot \frac{8}{100} = 11\,000\,000\left(1 - \frac{8}{100}\right) = 11\,000\,000 \cdot 0,92 =$$

$$= 12\,500\,000 \cdot 0,88 \cdot 0,92 = 10\,120\,000$$

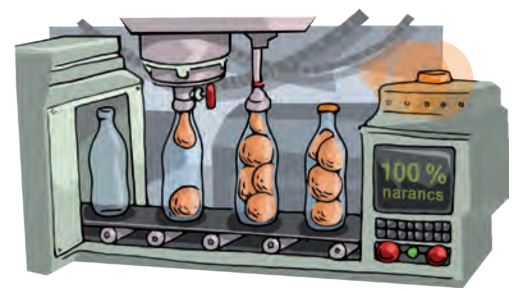
Általánosítsunk!

I. Írjuk fel a 3000 t%-kal csökkentett értékét!

$$3000 - 3000 \cdot \frac{t}{100} \quad \text{vagy} \quad 3000 \cdot \left(1 - \frac{t}{100}\right) \quad \text{vagy} \quad 3000 \cdot \frac{100 - t}{100}$$

II. Adjuk meg a B szám t%-kal csökkentett értékét!

$$B - B \cdot \frac{t}{100} \quad \text{vagy} \quad B \cdot \left(1 - \frac{t}{100}\right) \quad \text{vagy} \quad B \cdot \frac{100 - t}{100}$$



FELADATOK

1. Számítsd ki
a) 135-nek a $\frac{3}{4}$ részét;
b) 40-nek a 35%-át;
c) 240 kg 15%-kal megnövelt értékét;
d) 600 liter 18%-kal csökkentett értékét;
e) 2870 $\frac{2}{7}$ részének a 65%-át;
f) 1250 15%-ának az 50%-kal növelt értékét;
g) 444 20%-kal csökkentett értékének a 125%-át!

2. Írd fel egyenlőségalakban! Ellenőrizd, valóban jók-e a számolások! Ha hibát találsz, akkor írd le helyesen a füzetedbe!
a) 450 méter 22%-a 99 méter.
b) 3400 dl 15%-kal csökkentett értéke 2890 dl.
c) 640 dkg 18%-ával megnövelt értéke 736 dkg.
d) 1222 20%-kal csökkentett értékének 24%-kal megnövelt értéke 1222.
e) 1,2 óra 25%-a 18 perc.

3. Egy fapados légitársaságnál október hónapban meghirdették az akciós utakat. Ha valaki ebben az időpontban megveszi a jegyét, akkor a következő év áprilisára 5600 Ft a repülőjegy Barcelonába. Az indulás időpontjához közeledve egyre drágulnak a jegyek. Márciusban ugyanerre az időpontra a jegy ára 32 480 Ft. Hány %-kal emelkedett a jegy ára ezen időszak alatt?

4. A tavaszi leárazás során a 30 000 Ft-os csizma árát először 15%-kal, majd áprilisban 10%-kal csökkentették.
a) Mennyibe került a csizma a kétszeri leárazás után?
b) Hány százalékos lenne az árleszállítás, ha egy lépésben csökkentették volna az árat?

5. Egy hipermarket árufeltöltője 500 csomag nápolyit rakott ki kedd reggel az üzlet polcaira. Estére elfogyott a nápolyi 12%-a, sőt másnap estig újabb 15%-kal csökkent a nápolyi készlet.
a) Hány csomag nápolyi volt a polcokon kedd este?
b) Hány csomag nápolyi fogyott el a két nap alatt?

6. A megtakarított pénzem 40%-át elköltöttem karácsonyi ajándékozásra. A megmaradt pénzem hány százalékát kell újra hozzátennem a nyaralásig, hogy ugyanannyi pénzem legyen, mint a karácsonyi vásárlás előtt volt?

FELADATOK

1. Olga néni sütött egy nagy tepsi pogácsát. Matyi a pogácsák 20%-át, Gazsi a negyedét, Gergely a $\frac{3}{10}$ részét ette meg, így anyának és apának 10 darab maradt.
a) A pogácsák hány százaléka maradt meg a szülőknek?
b) Hány darab pogácsát sütött Olga néni?

2. Nyáron bejártuk Görögországot. Az út 75%-át repülővel tettük meg, az ötödét autóval, és 120 km-t még bicikliztünk is. Hány kilométert utaztunk a nyáron?

3. Az iskolába 680 gyerek jár. A gyerekek 15%-a minden nap vesz magának tízórait a büfében, közülük minden harmadik ásványvizet is vásárol. Hány gyerek vásárol minden nap tízórait és ásványvizet is a büfében?

4. A téglalap egyik oldala 10 dm, másik oldala 2 m. Minden oldalát 45%-kal megnöveljük.
a) Hány százalékkal növekszik a kerülete?
b) Hány százalékkal növekszik a területe?

5. A 10 cm-es oldalú négyzet egyik oldalát 40%-kal megnöveltük, másik oldalát 40%-kal csökkentettük.
a) Hány százalékkal változott a kerülete?
b) Hány százalékkal változott a területe?

6. 2 liter vízhez 2 dl málnaszörpöt keverünk. Hány százalékos lesz az italunk?

7. Az edzésre 14 lány jár. A csapat 72%-a fiú. Hány gyerek jár az edzésre?

8. A szünetig még 8 dolgozatot írunk. Tegnap már megírtunk kettőt, ma egyet. A tervezett dolgozatok hány százaléka van még hátra?

9. A nyári angoltábor 10%-kal olcsóbb, ha most fizetem be, így 7830 forintba kerül. Mennyibe kerül eredetileg?

10. A matematikadolgozatok átlaga 4,56 lett, ami 14%-kal jobb, mint a földrajzdolgozatok átlaga. Mennyi lett az osztályátlag földrajzból?

11. A nagy nyári hőségben eladtuk a jégkrémek 55%-át. Hány százalékkal kell növelnünk a megmaradt mennyiséget, hogy ugyanannyi jégkrémünk legyen, mint eredetileg volt?

12. Nyári munkával és újságkihordással összegyűjtöttem 70 000 Ft-ot, de a laptop, amit kinéztem magamnak 100 000 Ft-ba kerül. A boltban ki tudom fizetni a fennmaradó összeget hathavi részletre, de akkor a kamat miatt 15%-kal többe kerül.

a) Mennyivel kell így többet fizetnem a laptopért?
b) Hány forint lesz a havi törlesztőrészlet, ha fél évre vettem fel a hitelt, és minden hónapban ugyanannyit fizetek?

13. Volt két tengerimalacom. Egy szép napon kölykeik születtek, majd azoknak is kölykeik születtek, akik még tovább szaporodtak. Azóta eltelt pár év és megállapítottam, hogy a tengerimalac-állományom fél év alatt 20%-kal növekszik. Jelenleg 100 tengerimalacom van. Hány tengerimalac boldog tulajdonosa leszek fél év, egy év és két év múlva?

14. Egy tableteket forgalmazó cég az új termékét 24 000 Ft-ért állítja elő. Mivel a piacon nincs más ilyen termék, nagy hasznot remél a forgalmazásból. Ezért az előállítási költség 150%-kal megnövelt értékéért árusítja. Nem sokkal később megjelennek hasonlóan jó minőségű tabletek, így az árat 30%-kal csökkentenie kell.

a) Mennyibe került a piacra kerüléskor a tablet?
b) Hány Ft-tal csökkentették a tabletek árát?
c) Mennyi volt a cég bevétele, ha 12 500 tabletet sikerült eladniuk a bevezető áron és 21 000 darabot a csökkentett áron?

15. Lakásvásárlás során a szerződés megkötésekor a lakás árának 15%-át kell kifizetni előlegbe. Lucáék szülei 2,4 millió forintot fizettek az eladónak.

a) Mennyibe került a lakás?
b) A lakás vásárlásához hitelt kellett felvenni. Ez a lakás árának a 30%-a. Hány forint hitelre volt szükség?
c) A lakásvásárlásakor 640 000 Ft illetéket kell fizetni az államnak. Hány % az illeték mértéke?

V. 5. SZÁMOK ÉS BETŰK HASZNÁLATA I.

Egyenletek felírásakor az ismeretlent betűvel jelöljük, és ezzel végzünk műveleteket. A természetben, gazdasági életben lejátszódó folyamatokat leíró összefüggések gyakran tartalmaznak egy vagy több ismeretlent, amelyeket betűkkel jelölünk.
Ismerkedjünk meg egy példán keresztül néhány betűt tartalmazó kifejezéssel!

1. PÉLDA

Írjuk fel betűk és számok felhasználásával:
a) a négyzet kerületét; *b)* a téglalap kerületét;
c) a szabályos háromszög kerületét; *d)* a téglalap területét;
e) a kocka felszínét; *f)* a 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel *t* óráig mozgó elektromos autó megtett útját!

Megoldás

a) $4 \cdot a$; *b)* $2 \cdot a + 2 \cdot b$; *c)* $3 \cdot a$; *d)* $a \cdot b$; *e)* $6 \cdot a^2$; *f)* $30 \cdot t$.

A betűkifejezések közül azokat, amelyekben csak szorzás vagy számmal történő osztás szerepel, egytagú kifejezéseknek nevezzük.

A felsorolt példában egytagúak: $4 \cdot a$; $3 \cdot a$; $a \cdot b$; $6 \cdot a^2$; $30 \cdot t$.

Ha a különböző egytagú kifejezéseket összeadjuk vagy kivonjuk, akkor többtagú kifejezésekről beszélünk. (Akkor is, ha kivonás van közöttük.)

Többtagúak: $2 \cdot a + 2 \cdot b$, kéttagú; $a - b - c$, három tagú.

A betűs kifejezésekben található számszorzókat együtthatónak nevezzük.

A fenti példákban az egytagúak együtthatói:

Tag	$4 \cdot a$	$3 \cdot a$	$a \cdot b$	$6 \cdot a^2$	$30 \cdot t$
Együttható	4	3	1	6	30

Többtagúak esetén minden tagnak külön van együtthatója.
$2 \cdot a + 2 \cdot b$ kifejezésben az *a* együtthatója 2; *b* együtthatója 2.
$a - b - c$ kifejezésben az *a* együtthatója 1; *b* együtthatója -1; *c* együtthatója -1.

Jegyezd meg!
A betűkifejezések során gyakran nem teszünk ki minden szorzásjelet, ezeket láthatatlan szorzásjelnek nevezzük.

Például: $5a = 5 \cdot a$; $ab = a \cdot b$; $2x + 3y = 2 \cdot x + 3 \cdot y$

PÁROS MUNKA

Válasszátok szét az alábbi kifejezéseket aszerint, hogy egytagúak vagy többtagúak!
Írjátok le a füzetetekbe az alábbi kifejezéseket, és színessel húzzátok ki az egytagúak együtthatóit!

$4{,}5x$; $2x - 5y$; $3ab$; $-a^2b$; $x^2 + 3y$; $-5at$; $-\frac{3}{2}v$; $\frac{4x}{5}$; $5x - 3y + 4z$.

Az egytagú kifejezések közül azokat, amelyek csak együtthatóikban (számszorzókban) különböznek, egynemű kifejezéseknek nevezzük.

Egyneműek például: $2x$; $-x$; $\frac{3}{2}x$ vagy $3ab$; $-5ab$; $-\frac{ab}{10}$; $\frac{2}{7}ab$.

Nem egynemű: az $5a$ és a $4a^2$, mert $4a^2 = 4a \cdot a$.

Az **egynemű kifejezések egymással összevonhatók** úgy, hogy a számokkal elvégezzük az összeadást vagy a kivonást, és az összevonás után a betűkifejezésnek ez lesz az együtthatója.

Ha a betűk helyére konkrét számokat helyettesítünk, akkor a kifejezés helyettesítési értékét kapjuk meg.

Például: Az a oldalú négyzet kerülete $4a$. Ha az $a = 5$, akkor a kerület $4 \cdot 5 = 20$ egység, ha $a = \frac{1}{2}$, akkor a kerület $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$ egység.

2. PÉLDA

Végezzük el a lehetséges összevonásokat!

a) $2x + 5y + 3x - 2y - 4x$

b) $3a + 4a^2 - 2a + 2a^2 - 4a$

Megoldás

a) $2x + 5y + 3x - 2y - 4x = 1x + 3y = x + 3y$

b) $3a + 4a^2 - 2a + 2a^2 - 4a = -3a + 6a^2$

FELADATOK

1. Keresd a párját!

a) Egy szám hétszerese.

b) Egy szám felének a háromszorosa.

c) Két szám hányadosa.

d) Egy szám harmadának a kétszerese.

e) Egy számnál kilencszer nagyobb szám.

f) Egy számnál héttel nagyobb szám négyszerese.

A) $(x : 3) \cdot 2$;	*D)* $x \cdot 9$;	*G)* $x + 9$;
B) $7x$;	*E)* $x \cdot 7 \cdot 4$;	*H)* $(x + 7) \cdot 4$;
C) $\frac{x}{3 \cdot 2}$;	*F)* $\frac{x}{2} \cdot 3$;	*I)* $\frac{x}{y}$.

2. Készíts az a; b; a^2; -1; 14 elemekből egytagú algebrai kifejezéseket! Írj a füzetedbe tíz különböző lehetőséget!

3. Válaszd ki azokat az algebrai kifejezéseket, amelyeknek az együtthatója 2-nél nagyobb!

a) $7xy$; *b)* $-5a^2b$; *c)* $1{,}7x^6$; *d)* $\frac{7}{2}ab$;

e) $8{,}4x^2y^2z^2$; *f)* a^3; *g)* $\frac{km}{6}$; *h)* $\frac{12x^4}{4}$.

4. Végezd el az összevonásokat a következő algebrai kifejezésekben!

a) $a - a - a + a - a - a$;

b) $4b - 5b - b + 6b + 2b - 13b$;

c) $6c + 8c - 2c - 4c - 16c + c$;

d) $4{,}3b - 3{,}9b + 5{,}4b$;

e) $4x - (+3x) + 7x - (-2x)$;

f) $-7y - 13y + (-9y) + 13$.

5. Végezd el az összevonásokat, és számold ki a kifejezések helyettesítési értékét, ha $x = -\frac{1}{3}$; $y = \frac{1}{2}$!

a) $3x - 4y + 5x - 7y$;

b) $5x + 11 - 7x + (-19)$;

c) $4xy - 3x + 5y - 2xy$;

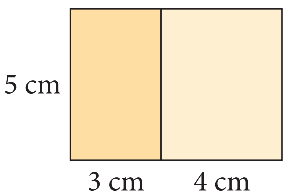
d) $4x^2 + 8y - 1 + 5x^2 - 12y$;

e) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + xy + \frac{1}{6}$;

f) $\frac{1}{2}xy - \frac{1}{3}y^2 - 21xy + x^2$.

1. PÉLDA

Egy téglalap két oldala 3 és 5 cm hosszú. Rövidebb oldalát meghosszabbítottuk 4 cm-rel. Mekkora lesz a megnövelt oldalú téglalap területe?



Megoldás

Írjuk fel az eredeti téglalap területét!

$T_1 = 3 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 15\ \text{cm}^2.$

Írjuk fel a hozzáépített téglalap területét!

$T_2 = 4 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 20\ \text{cm}^2.$

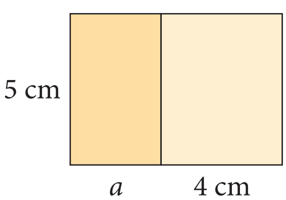
Írjuk fel a nagy téglalap területét kétféleképpen!

$T_{nagy} = T_1 + T_2 = 15\ \text{cm}^2 + 20\ \text{cm}^2 = 35\ \text{cm}^2.$

$T_{nagy} = 7 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 35\ \text{cm}^2.$

2. PÉLDA

Változtassunk a feladaton! Tegyük fel, hogy az eredeti téglalap rövidebb oldalát nem ismerjük, ezért betűvel jelöljük! Legyen a rövidebb oldal *a!*



A feladat ugyanaz, mint az 1. példában: mekkora lesz a megnövelt oldalú téglalap területe?

Megoldás

Írjuk fel az eredeti téglalap területét!

$T_1 = a \cdot 5\ \text{cm}^2 = 5a\ \text{cm}^2.$

Írjuk fel a hozzáépített téglalap területét!

$T_2 = 4 \cdot 5\ \text{cm}^2 = 20\ \text{cm}^2.$

Írjuk fel a nagy téglalap területét kétféleképpen!

$T_{nagy} = T_1 + T_2 = 5a\ \text{cm}^2 + 20\ \text{cm}^2.$

$T_{nagy} = (a + 4) \cdot 5\ \text{cm}^2.$

A szorzás műveletnél a tényezők felcserélhetők, ezért az utolsó sort $T_{nagy} = 5 \cdot (a + 4)\ \text{cm}^2$ alakban is írhatjuk. A kétféle módon felírt terület egyenlő, tehát azt kaptuk, hogy $5 \cdot (a + 4) = 5a + 20$.

Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha összeget szorzunk egy számmal, akkor ugyanazt kapjuk, mintha az összeg minden tagját megszorozzuk a számmal és a szorzatokat adjuk össze.

CSOPORTMUNKA

Oldjátok meg az előző feladatot az alábbi módosításokkal!

1. Nem ismerjük a téglalap rövidebb oldalát, és nem ismerjük a meghosszabbítás mértékét sem, így ezeket jelöljétek *a*-val, illetve *b*-vel! A téglalap másik oldala továbbra is 4 cm. Rajzoljatok ábrát a füzetbe és írjátok fel a területeket!
2. Nem ismerjük a téglalap egyik oldalát sem, és a meghosszabbítás mértékét sem. Jelöljétek a téglalap oldalait *a*-val, illetve *b*-vel! Legyen a meghosszabbítás mértéke most *c*! Rajzoljatok ábrát a füzetbe és írjátok fel a területeket!

6. SZÁMOK ÉS BETŰK HASZNÁLATA II.

Betűs kifejezéseket akkor használunk, ha nem ismerjük egy adott mennyiség konkrét értékét. Használatuk során több megállapodást meg kell jegyeznünk ahhoz, hogy helyesen tudjunk feladatokat megoldani.

- **Zárójeles kifejezések esetén sem tesszük ki mindig a láthatatlan szorzásjeleket.**

Például:

$5(a + 4) = 5 \cdot (a + 4)$.

Ha egy adott betűt vagy betűket tartalmazó kifejezésben a betűk helyére konkrét számokat helyettesítünk, akkor **az algebrai kifejezés helyettesítési értékét** kapjuk meg.

A csoportmunka során megoldott 2. feladatban azt kaptátok eredményül, hogy a nagy téglalap területe

$T_{\text{nagy}} = b \cdot (a + c)$, illetve $T_{\text{nagy}} = b \cdot a + b \cdot c$.

Ha az $a = 3$ cm; $b = 5$ cm; $c = 4$ cm értékeket behelyettesítjük, akkor az 1. példát és eredményeit kapjuk.
Azt is láthatjuk, hogy a kétféle módon felírt terület egyenlő, azaz

$b \cdot (a + c) = b \cdot a + b \cdot c$.

- A zárójelfelbontásra tanult szabályt betűkifejezések használata során is alkalmazhatjuk. **Zárójel felbontásakor a zárójelben lévő összes kifejezést meg kell szoroznunk a szorzótényezővel, majd ezeket kell összeadnunk.**
- A $2x + 3y$-hoz hasonló kifejezéseket **többtagú kifejezéseknek** nevezzük. Ebben az esetben egy kéttagú kifejezést írtunk fel.
- Szétbontva a $2x$, illetve a $3y$ külön-külön **egytagú kifejezések** lesznek.

Megjegyzés: Vannak bonyolultabb algebrai kifejezések, amelyekről nem egyszerű megállapítani, hogy egytagúak-e vagy többtagúak. Ugyanazon kifejezést egy- és többtagú alakban is fel lehet írni, de erről majd későbbi tanulmányaitok során lesz szó.

Például: $b \cdot (a + c) = b \cdot a + b \cdot c$ betűkifejezés bal oldala egytagú, jobb oldala többtagú (kéttagú).

Ezek ismeretében megtehetünk néhány egyszerűsítő átalakítást:

- Az egynemű kifejezéseket összevonhatjuk.
- A zárójeleket a tanult módon felbonthatjuk.

3. PÉLDA

Végezzük el a zárójelfelbontást és a lehetséges összevonásokat!

a) $3(x + 4) + 2(x - 1) + 5(x - 2)$;

b) $5(x + y) + 3(x + 2y) - 2(x - y)$.

Megoldás

Jelöljük egyforma módon az egynemű tagokat! Itt most színessel jelöltük, de a füzetedben jelölheted aláhúzással, kiemelő filccel, amivel neked kényelmes.

a) $3(x + 4) + 2(x - 1) + 5(x - 2) = 3x + 12 + 2x - 2 + 5x - 10 = 10x$

A *b)* résznél vigyázni kell az utolsó zárójel felbontásánál. A mínusz előjel megváltoztatja a zárójelben lévő összes tag előjelét!

$-2(x - y) = (-2) \cdot (x - y) = (-2) \cdot x + (-2) \cdot (-y) = -2x + 2y$

b) $5(x + y) + 3(x + 2y) - 2(x - y) = 5x + 5y + 3x + 6y - 2x + 2y = 6x + 13y$

FELADATOK

1. Végezd el a szorzásokat!

a) $3(x+2)$; *b)* $-4(5+y)$;
c) $1{,}5(2x-3y)$; *d)* $x(7-x)$;
e) $(x+y)\cdot(-5)$; *f)* $z(4x-6y)$;
g) $2x(x+8)$; *h)* $xy(3{,}4+1{,}7)$;
i) $4y(x+y)$; *j)* $z(3x+4y-5z)$.

2. Először vond össze a zárójelen belüli kifejezéseket, majd végezd el a szorzásokat!

a) $3(a+7b-4a+5b)$;
b) $(-2e-3f+7f-12e)\cdot(-5)$;
c) $x(-3-4x+8-2x+1)$;
d) $(-5)(4-x+5+4x-8-3x)$;
e) $(2x-3y+4xy-2yx)\cdot xy$;
f) $(x-y-4x-7y-xy)\cdot(-3xy)$.

3. Bontsd fel a zárójeleket és végezd el az összevonásokat!

a) $4(a-1)+7(2-a)$;
b) $5(3-a)-3(a+2)$;
c) $3(3+a)-7(2-a)$;
d) $2(2-a)+2(a+4)$;
e) $4(4x-2)-5(5-3x)$;
f) $6(3x-8)+2(11x+8)$.

4. Végezd el a zárójelfelbontásokat, összevonásokat és számítsd ki a kifejezés helyettesítési értékét!

a) $8y-3x+6-(y+2x+8)$
$x=-3$; $y=7$;
b) $(5-9)-(2a-3b)-(-2b+4a)$
$a=2$; $b=6$;
c) $(-4z-5)+(-3z-2v)-(9v+1)$
$z=\frac{4}{9}$; $v=-\frac{1}{7}$.

5. Péntek délután megírtam az összes leckém negyedét, szombat délelőtt a $\frac{2}{3}$-át. Maradt-e leckém vasárnapra?

6. Végezd el az összevonásokat!

a) $2a+4a^2+8a+6a^2$;
b) $5b+5b^2-8b-18b^2$;
c) $c+c^2+c^3-2c-2c^2$;
d) $d-\frac{1}{2}d^2+d^2+\frac{3}{2}d-\frac{2}{4}d^2-\frac{1}{2}d$;
e) $3a+2b+b^2-\frac{1}{2}b-\frac{3}{2}b^2+a$.

7. Keresd az egyenlőket!

a) $3a+2a$ $\quad -2a$ $\quad 2(3a-9)$ $\quad 5a-7a$ $\quad a+4a$ $\quad 5a$ $\quad (a-3)6$ $\quad -2(a-2)-4$

b) $x+y$ $\quad -\frac{1}{2}(8x-4y)$ $\quad -3(y-x)$ $\quad 4x-2y-3x+3y$ $\quad y-2x$ $\quad \frac{2x+2y}{2}$ $\quad 3x-3y$ $\quad 2(y-2x)$

8. Egy a számhoz hozzáadtuk a szám négyszeresét. Írd fel betűkkel!

9. Egy z számot elosztottunk a szám nyolcadával. Írd fel betűkkel!

10. Vettem s darab rágót (119 Ft/db), c darab csokit (87 Ft/db), k csomag gumicukrot (165 Ft/db) és n üveg lekvárt (439 Ft/db).

a) Írd fel, mennyit fizettem összesen!
b) Hány forinttal fizetek többet, ha veszek még négy rágót és két csokit?

11. András minden születésnapjára annyi könyvet kapott, ahány éves volt. Készíts táblázatot, hogy hány könyve gyűlt össze az ajándékokból 1; 2; …; 13; 14, illetve a éves koráig!

7. EGYENLETMEGOLDÁSI MÓDSZEREK: PRÓBÁLGATÁS ÉS LEBONTOGATÁS

Betűk használatával az egyenletek megoldását is egyszerűbbé tehetjük.

- Az **egyenlet olyan egyenlőség,** amely egy (esetleg több) ismeretlent tartalmaz. Az **egyenlet megoldása** során az ismeretlen lehetséges értékei közül keressük azt (vagy azokat) az érték(ek)-et, amely(ek) igazzá teszi(k) az egyenlőséget.
- Az **egyenlet alaphalmazának** nevezzük azoknak a számoknak a halmazát, amely halmazban a megoldást keressük. Ha nem utal semmi az alaphalmazra, akkor mindig a tanult számok halmazán kell keresni a megoldást.
- A kapott megoldást mindig ellenőrizni kell. Az ellenőrzést az eredeti egyenletbe történő behelyettesítéssel végezzük. Ha szöveges feladatot oldunk meg egyenletfelírással, akkor az ellenőrzés mindig a szöveg alapján történjen!

Például:

Oldjuk meg a $3x + 5 = 17$ egyenletet az egész számok halmazán!
Az alaphalmaz az egész számok halmaza.
Bármely eddig tanult egyenletmegoldási módszert használva megkapjuk, hogy $x = 4$.
Ez azt jelenti, hogy ha az x helyére 4-et helyettesítünk, akkor igaz egyenlőséget kapunk, ha bármely más számot, akkor az egyenlőség nem igaz.

Ellenőrzés: $3 \cdot 4 + 5 = 17$

PÁROS MUNKA

Beszéljétek meg, milyen egyenletmegoldási módszereket ismertek!
Fogalmazzátok meg, melyik módszernek mi a lényege!

1. PÉLDA

Oldjuk meg az egyenleteket a korábban tanult módszerek segítségével!

a) $(3x + 8) \cdot 2 - 5 = 17$

b) Van-e megoldása az alábbi egyenletnek a 10-nél kisebb prímszámok között?
$x \cdot (x - 1) = 6$

Megoldás

Az egyenleteket többféle módszerrel megoldhatjuk. Próbáljuk meg mindig azt alkalmazni, amely a leggyorsabban vezet a megoldáshoz!

a) Most a **lebontogatás** a legcélravezetőbb. Ezt a módszert akkor tudjuk hatékonyan használni, ha az egyenlet egyik oldalán egy szám áll. Ilyenkor az egyenlet ismeretlent is tartalmazó oldalán szereplő utolsó művelet ellentettjével változtatjuk a jobb oldal értékét. Ezt a lépést többször alkalmazva eljutunk az ismeretlen (most az x) értékének meghatározásához.
$x = [(17 + 5) : 2 - 8] : 3$
$x = 1$
Ellenőrzés!

b) A **próbálgatás módszerét** akkor érdemes alkalmazni, ha az egyenlet vagy egyenlőtlenség alaphalmazának kevés eleme van. Hátránya, hogy sok számolással jár, hiszen gyakran az alaphalmaz minden elemét be kell helyettesíteni.

Az alaphalmaz elemei: 2; 3; 5; 7. Ezeket behelyettesítve az $x = 3$ megoldást kapjuk.

V. 7. EGYENLETMEGOLDÁSI MÓDSZEREK: PRÓBÁLGATÁS ÉS LEBONTOGATÁS

Az összevonásról, zárójelfelbontásról tanult azonosságok nem változtatják meg az algebrai kifejezések értékét, tehát használhatjuk őket az egyenletek megoldása során is.

2. PÉLDA

Oldjuk meg a $3(x + 2) + 2(x - 1) + x - 5 = 11$ egyenletet!

Megoldás

$$3(x + 2) + 2(x - 1) + x - 5 = 11 \quad \text{/zárójelfelbontás}$$
$$3x + 6 + 2x - 2 + x - 5 = 11 \quad \text{/összevonás}$$
$$6x - 1 = 11$$

Oldjuk meg a $6x - 1 = 11$ egyenletet lebontogatással. Visszafelé gondolkozva kapjuk, hogy $x = (11 + 1) : 6 = 2$.

Ellenőrzés:
$3(2 + 2) + 2(2 - 1) + 2 - 5 = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 - 3 = 11$

Tehát az $x = 2$ valóban megoldás.

FELADATOK

1. Oldd meg az alábbi egyenleteket a lebontogatás módszerének felhasználásával!
a) $5[4 \cdot (6x - 3) + 2] - 4 = 26$; *b)* $2 \cdot [3 \cdot (4x + 1) + 3] - 2 = 28$.

2. Végezd el a lehetséges összevonásokat, majd a próbálgatás módszerének segítségével döntsd el, van-e az egyenleteknek 5-nél nem nagyobb megoldása a pozitív egész számok halmazán!
A számoláshoz készíts táblázatot a füzetedben!
a) $2x + 3 + 8x - 7 + 2 = 5x - 12$; *b)* $4x - 8 - 10x + 2 + x + 6 = 4 - 4x$;
c) $x + 4x + 2 - 2x + 2 = 3x + 5 + 3x - 4$; *d)* $3x - 6 + 10x - 2 - 6x = 5x - 8 - 2x + 12$.

3. Egy számhoz a négyszeresét hozzáadva 9785-t kapunk. Melyik ez a szám?

4. Egy autóbusz előre tervezett útjának harmadánál 20 km-rel többet tett meg, amikor pihenőt tartott egy parkolóban. Ekkor a buszvezető azt mondta az utasoknak, hogy eddig 200 km-t tettek meg. Hány km volt a tervezett út?

5. Egy számot elosztva a nyolcadával eredményül 8-at kaptunk. Melyik számra igaz ez az állítás?

6. Ki melyik számra gondolt? Írd fel az egyenleteket, és oldd meg lebontogatással az alábbi feladatokat!

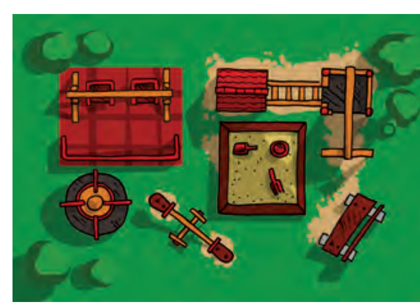
a) Anna: A gondolt szám hétszereséből négyet elvéve 45-öt kaptam.
b) Bálint: A gondolt számhoz hozzáadtam 8-at, az összeget elosztottam 7-tel, a hányadosból elvettem 3-at, így 1-et kaptam.
c) Csenge: A gondolt szám kilencszeresénél 12-vel kisebb szám harmada 2.
d) Gáspár: Ha a gondolt szám négyszereséből elveszek 2-t, a különbséget megszorzom 3-mal, a szorzatból elveszek 10-et és az eredményt elosztom 5-tel, 4-et kapok.

7. Délután fél háromkor biciklizni mentünk. Megtettük a túra negyedét és még 20 km-t, így már csak a harmada van hátra.

a) Hány kilométeres a túra?
b) Mikor értünk haza, ha 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel tekertünk?

8. *a)* Ha 3 kg alma 210 forintba kerül, mennyibe kerül 5 kg alma?
b) Ha a kg alma x forintba kerül, mennyibe kerül b kg alma?

9. *a)* A játszóteret 200 m kerítéssel lehet teljesen bekeríteni. Az egyik rövidebb oldalra 40 m kerítés szükséges. Hány méter kerítés kell az egyik hosszabb oldalra?
b) Egy játszótér kerülete k, egyik oldala a. Mekkora a másik oldal?
c) Minden k és a értékre értelmes a *b)* feladat?



10. Arany János 6 évvel volt idősebb Petőfi Sándornál. 1848-ban ketten együtt 56 évesek voltak. Hány éves volt Arany János 1844-ben, amikor fia, Arany Laci megszületett?

11. *„Falu végén kurta kocsma,*
Oda rúg ki a Szamosra[…]”

Tudod-e mire utal Petőfi Sándor versében a „kurta kocsma” kifejezés? A XVIII. században a parasztok nem egész évben, hanem csak rövidebb ideig árulhatták saját borukat a kocsmákban. Az év maradék részében a földesúré volt a borkimérés joga és haszna is.

a) Hány napon keresztül árulhattak bort a parasztok a maguk hasznára, ha az év 1/3 részénél 11 nappal kevesebb ideig volt övék a borkimérés joga?
b) A haszon hányad része lehetett a földesúré?

V. 8. A MÉRLEGELV

Az ábrákon régi mérlegeket láttok. Ezeket nevezik kétkarú mérlegnek. Egyensúly esetén a mérleg tányérjai ugyanolyan magasan vannak. Ha az egyik oldalon nehezebb tárgy van, akkor ezen az oldalon lévő mérleg tányérja lejjebb van a másik oldalhoz képest.

Egyensúlyban lévő mérleg; a serpenyőkben lévő tömegek megegyeznek.

A mérleg nincs egyensúlyban, a jobb oldali serpenyőben nagyobb tömeg van, mint a bal oldaliban.

Kétkarú mérleg segítségével a serpenyőkben lévő testek tömegét hasonlítjuk össze. A digitális mérlegek elterjedése előtt ilyen mérlegek szolgáltak tömegmérésre. Számos helyen ma is találkozhatunk velük.

1. PÉLDA

Van három egyforma tömegű dobozunk. Ha egy kétkarú mérleg egyik serpenyőjében 2 ilyen dobozt és egy 2 kg-os tömeget, a másikba pedig egy ugyanilyen dobozt és két darab 2 kg-os és egy 1 kg-os tömeget teszünk, akkor a mérleg egyensúlyban van. Határozzuk meg egy doboz ismeretlen tömegét!

Megoldás

A mérleg egyensúlyban van.

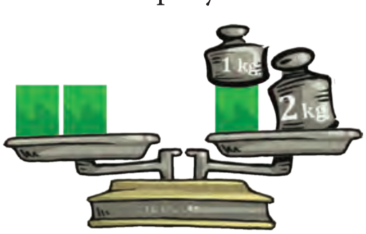
Jelölje az ismeretlen tömeget x.

Bal oldal: $x + x + 2 = 2 \cdot x + 2$,

Jobb oldal: $x + 2 + 2 + 1 = x + 5$

A két oldal egyenlő, ezért: $2 \cdot x + 2 = x + 5$

Mindkét serpenyőből levettünk egy 2 kg-os tömeget.



$2x = x + 3$

A mérleg egyensúlyban maradt.

8. A MÉRLEGELV

V.

Mindkét serpenyőből levesszük az ismeretlen tömegű  dobozt.

$x = 3$

A mérleg egyensúlyban maradt.

Az  doboz tömeg 3 kg-os.

Egyenlet megoldásakor az előbb alkalmazott módszert akkor is alkalmazhatjuk, ha nincs szó valódi mérlegről. Az egyenlet két oldalát egy egyensúlyban lévő mérleg két serpenyőjéhez hasonlítjuk. Megoldás közben a két oldalt ugyanolyan módon változtatjuk.

Nem változik a mérleg egyensúlya, azaz az egyenletben az egyenlőség, ha:

- **Az egyenlet két oldalán álló kifejezést ugyanannyival növeljük, vagy csökkentjük.**
- **Az egyenlet két oldalán álló kifejezésnek ugyanannyiszorosát vagy ugyanannyiad részét vesszük.**

Ezek a **mérlegelv** lépései, melyeket megoldás során az egyenlet jobb oldala mellé írva jelölünk. A mérlegelv segítségével olyan egyenletek is megoldhatók, amelyek lebontogatással nem, vagy csak sokkal körülményesebben lennének megoldhatók.

2. PÉLDA

Oldjuk meg mérlegelv segítségével az alábbi egyenletet!

$3 \cdot x + 2 = x + 12$

Megoldás

$3 \cdot x + 2 = x + 12$	$/-2$	Mindkét oldalból vonjunk ki 2-t. $3 \cdot x + 2 - 2 = x + 12 - 2$
$3 \cdot x = x + 10$	$/-x$	Mindkét oldalból vonjunk ki x-et. $3 \cdot x - x = x + 10 - x$
$2 \cdot x = 10$	$/:2$	Mindkét oldalt osszuk el 2-vel.
$x = 5$		

Ellenőrzéskor az eredeti egyenlet mindkét oldalán be kell helyettesítenünk.

Bal oldal: $3 \cdot 5 + 2 = 17$ Jobb oldal: $5 + 12 = 17$

A két oldal egyenlő, tehát $x = 5$ az egyenlet megoldása.

A mérlegelv alkalmazásakor is az a célunk, hogy megkapjuk az ismeretlennek (betűnek) azt az értékét, amelyet behelyettesítve az egyenletbe igaz egyenlőséget kapunk.

Célszerű az átalakításokat úgy végezni, hogy az egyik oldalon csak ismeretlen, a másik oldalon csak szám legyen.

V. 8. A MÉRLEGELV

3. PÉLDA

Oldjuk meg a következő egyenletet: $4 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 5$!

Megoldás

Az egyenlet	A lépések jelölése	A megoldás lépései szövegesen
$4 \cdot x - 7 = 2 \cdot x + 5$	$/+7$	Mindkét oldalhoz 7-et hozzáadunk.
$4 \cdot x - 7 + 7 = 2 \cdot x + 5 + 7$		
$4 \cdot x = 2 \cdot x + 12$	$/-2 \cdot x$	Mindkét oldalból elveszünk $2 \cdot x$-et.
$4 \cdot x - 2 \cdot x = 2 \cdot x + 12 - 2 \cdot x$		
$2x = 12$	$/:2$	Mindkét oldalt elosztjuk 2-vel.
$2x : 2 = 12 : 2$		
$x = 6$		

Az egyenlet megoldása $x = 6$.
Behelyettesítéssel igazoljuk a megoldás helyességét: $4 \cdot 6 - 7 = 2 \cdot 6 + 5$, $17 = 17$.

4. PÉLDA

Az előző példa egyenletét lebontogatással nem lehet megoldani. A $3 \cdot x - 5 = 7$ egyenletet azonban igen. Oldjuk meg kétféleképpen!

Megoldás

lebontogatással

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{x} \arrow[r, "\cdot 3"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \boxed{3 \cdot x} \arrow[r, "-5"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & \boxed{3 \cdot x - 5} \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] \\
\boxed{4} & \boxed{12} \arrow[l, ":3"'] & \boxed{7} \arrow[l, "+5"']
\end{tikzcd}
$$

a mérlegelv alkalmazásával

$$3 \cdot x - 5 = 7 \qquad /+5$$
$$3 \cdot x - 5 + 5 = 7 + 5$$
$$3 \cdot x = 12 \qquad /:3$$
$$3 \cdot x : 3 = 12 : 3$$
$$x = 4$$

CSOPORTMUNKA

Vizsgáljátok a kétkarú mérleg működését!
Kisebb tárgyak (tolltartó, ceruza, radír) segítségével egyensúlyozzátok ki!
Ha sikerült, írjatok fel egyenlőségeket! Például: Ági tolltartója + 1 radír = 3 ceruza + 2 toll.

5. PÉLDA

Oldjuk meg mérlegelv segítségével az alábbi egyenletet!
$1 - 4x = 10 - x$

Megoldás

$1 - 4x = 10 - x$	$/+x$	Mindkét oldalhoz adjunk hozzá x-et.
$1 - 3x = 10$	$/-1$	Mindkét oldalból vonjunk ki 1-et.
$-3x = 9$	$/:(-3)$	Mindkét oldalt osszuk el (-3)-mal.
$x = 3$		

FELADATOK

1. Oldd meg mérlegelv segítségével az egyenleteket!
a) $6x - 2 = 5x + 7$; *b)* $4x + 2 = 2x + 22$; *c)* $8x - 1 = 4x + 29$; *d)* $-7 + 8x = 8 - 7x$.

2. Végezd el az összevonásokat, zárójelfelbontásokat, majd a mérlegelv felhasználásával oldd meg az egyenleteket!
a) $6x + 4 - 7x - 2 = 6x + 1 + 2x - 3$; *b)* $22 - 28x + 56 + 60x = 8x - 24 + 46 + 12x$;
c) $21(x - 1) + 9 = 9(x - 1) + 9$; *d)* $8(x + 12) - 6 = 6(2x - 1) + 6$.

3. Zárójelfelbontás és összevonás után alkalmazd a mérlegelvet az egyenletek megoldásához!
a) $6(3 - 2x) + 20 = 10(x - 3) - 10$;
b) $6(a - 4) + 5(2 - a) = 3(-a - 1) - 3(a - 2)$;
c) $2(2 - 3x) + 3(2 - 2x) = 6(2x - 3) - 3(12x + 3)$;
d) $5(2 - b) + 10(b - 2) - 2(2{,}5b + 5)=3(3b - 15)$.

4. Zárójelfelbontás után végezd el a lehetséges összevonásokat, és oldd meg az egyenleteket!
a) $2 \cdot (4x + 1) + 7 \cdot (8x + 2) = 12 \cdot (x + 6) - 4 \cdot (x + 2) - 6$;
b) $6 - (x + 2) - 3 \cdot (2x - 4) = 8 \cdot (4 - x) + 3 \cdot (x - 4)$;
c) $3 \cdot (2x + 1) + 12 \cdot (3x - 2) = 6 \cdot (3x - 1) + 3 \cdot (x - 4) + 11$;
d) $10 - 5 \cdot (2 - 2x) + 2 \cdot (x + 4) = 2 \cdot (2 - 3x) - 4 \cdot (6 - x)$.

5. A csempéket húszasával dobozolják. A csempéket tartalmazó papírdoboz üresen 0,5 kg és egy doboz csempe ugyanolyan nehéz, mint 5 csempe és 8 kg. Hány kg egy csempe?

6. Egy szám hatszorosából 4-et kivonva ugyanazt kapjuk, mintha az ötszöröséhez 10-et hozzáadunk. Melyik ez a szám?

7. Panni és Orsi matricákat gyűjt. Panni matricái négyszeresénél 10-zel több ugyanannyi, mint Orsi matricái hatszorosánál 22-vel kevesebb. Hány matricát gyűjtöttek a lányok külön-külön?

V. 9. AZONOSSÁG, ELLENTMONDÁS, EGYENLETEK MEGOLDÁSA

1. PÉLDA

A lányok száma az osztálylétszám harmadánál kettővel több. Hány fős az osztály, ha a fiúk kilencen vannak?

Megoldás

Az osztálylétszámot jelöljük x-szel!

A feladat első mondata szerint a lányok száma $= \frac{1}{3} \cdot x + 2$

A feladat második mondata szerint a lányok száma $= x - 9$

Az egyenlet ennek a két kifejezésnek az egyenlőségét írja le: $\frac{1}{3} \cdot x + 2 = x - 9$

Megoldjuk az egyenletet:

$$\frac{1}{3} \cdot x + 2 = x - 9 \qquad /-2$$

$$\frac{1}{3} \cdot x = x - 11 \qquad /-x$$

$$-\frac{2}{3} \cdot x = -11 \qquad /\cdot 3$$

$$-2 \cdot x = -33 \qquad /:(-2)$$

$$x = \frac{33}{2} = 16\frac{1}{2} = 16{,}5$$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy a felírt egyenletet jól oldottuk meg.

Az $x = \frac{33}{2}$ mégsem megoldása a feladatnak, hiszen x az osztály tanulóinak számát jelöli, és ez csak pozitív egész szám lehet, ami azt jelenti, hogy az egyenlet alaphalmaza a pozitív egész számok halmaza. Ennek az egyenletnek nincs megoldása az egyenlet alaphalmazán, rövidebben mondva nincs megoldása.

Az alaphalmaz azon elemeinek összessége, amelyeket az egyenletbe helyettesítve igaz kijelentést kapunk, az egyenlet **igazsághalmaza**. Egyenletet megoldani annyit jelent, mint meghatározni az igazsághalmazát.

Az 1. példában szereplő egyenletnek nincs megoldása, mert 16,5 tanuló nem lehet egy osztályban.

2. PÉLDA

Oldjuk meg egyidejűleg, hasonló lépésekkel a következő két egyenletet:

$2 \cdot (x - 3) + 1 = 2 \cdot x - 5$; $\qquad 2 \cdot (x - 3) + 2 = 2 \cdot x - 5$!

A megoldás közben figyeljük meg a megoldáshoz vezető lépéseket.

Megoldás

Felbontjuk a zárójelet és összevonunk:

$2 \cdot (x - 3) + 1 = 2 \cdot x - 5$	$2 \cdot (x - 3) + 2 = 2 \cdot x - 5$
$2 \cdot x - 6 + 1 = 2 \cdot x - 5$	$2 \cdot x - 6 + 2 = 2 \cdot x - 5$
$2 \cdot x - 5 = 2 \cdot x - 5$	$2 \cdot x - 4 = 2 \cdot x - 5$
A két oldal azonos; bármilyen számot helyettesítünk x helyére, az egyenlőség teljesül. Az ilyen egyenletet **azonosságnak** nevezzük.	A jobb oldal 1-gyel kisebb, mint a baloldal. Ez semmilyen x esetén nem teljesül. Az egyenletnek nincs megoldása. Más szavakkal, az egyenletmegoldás során **ellentmondásra** jutunk.
Azonosság: olyan egyenlet, amelynek igazsághalmaza megegyezik az alaphalmazzal.	Olyan egyenlet amelynek igazsághalmaza az alaphalmaz egyik elemére sem teljesül.

3. PÉLDA

Oldjuk meg az alábbi törtkifejezéseket tartalmazó egyenleteket!

a) $\frac{x-2}{3} + x = 6$ *b)* $\frac{2}{3} \cdot (x - 5) = 3 \cdot x + 1$

Megoldás

a) $\frac{x-2}{3} + x = 6$ /$\cdot$ 3 (így nem lesz tört az egyenletben)

$x - 2 + 3 \cdot x = 18$ /összevonás

$4 \cdot x - 2 = 18$ /+ 2

$4 \cdot x = 20$ /: 4

$x = 5$

Ellenőrzés: $\frac{5-2}{3} + 5 = 6$

b) $\frac{2}{3} \cdot (x - 5) = 3 \cdot x + 1$ /zárójelfelbontás

$\frac{2}{3} \cdot x - \frac{10}{3} = 3 \cdot x + 1$ /$\cdot$ 3

$2x - 10 = 9x + 3$ /+ 10

$2x = 9x + 13$ /− 9x

$-7x = 13$ /: (−7)

$x = -\frac{13}{7}$

Ellenőrzés: bal oldal: $\frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{13}{7} - 5\right) = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{48}{7}\right) = -\frac{96}{21} = -\frac{32}{7}$

jobb oldal: $3 \cdot \left(-\frac{13}{7}\right) + 1 = -\frac{39}{7} + 1 = -\frac{32}{7}$

AZONOSSÁG, ELLENTMONDÁS, EGYENLETEK MEGOLDÁSA

4. PÉLDA

Oldjuk meg a $2(x-1)+3(x+2)-5+x=3x+11$ egyenletet!

Megoldás

Írjuk ki a láthatatlan szorzásjeleket a megoldás lépéseinek megkönnyítéséhez.

$$
\begin{aligned}
2\cdot(x-1)+3\cdot(x+2)-5+x&=3\cdot x+11 &&/\text{zárójelfelbontás}\\
2\cdot x-2+3\cdot x+6-5+x&=3\cdot x+11 &&/\text{össszevonás}\\
6x-1&=3x+11 &&/+1\\
6x&=3x+12 &&/-3x\\
3x&=12 &&/:3\\
x&=4
\end{aligned}
$$

Ellenőrzéssel meggyőződhetünk a megoldás helyességéről.

FELADATOK

1. Hány megoldása van az alábbi egyenleteknek?

a) $6(2+x)=36(x-5)+39$;
b) $10(2x-3)+5=15+20(x+1)$;
c) $9-6(x-3)=12x-21$;
d) $2\cdot(x+7)-2\cdot x=7$;
e) $7=2\cdot x+14-x$;
f) $-14=2\cdot(x-7)-2\cdot x$;
g) $-5=3\cdot x+1-\frac{2}{3}\cdot x$;
h) $0=3\cdot x+1-\frac{2}{3}(x-5)$.

2. Melyik egyenletnek van megoldása az egész számok halmazán? Az egyenletek megoldása után válaszolj a kérdésre!

a) $\frac{4x-2}{3}=5x-4$; *b)* $\frac{4x+2}{3}=2x+22$;
c) $4+\frac{2x}{5}=2x$; *d)* $\frac{3}{2}\cdot(5x+12)=7x$;
e) $\frac{7x-1}{5}=\frac{4x+10}{4}$.

3. Egy szám kétszereséből kivontam nyolcat. Ugyanakkora számot kaptam, mint a számnál hárommal kisebb szám kétszerese. Melyik számra gondoltam?

4. Egy számot hárommal csökkentettem, majd vettem a hatodrészét. Ugyanazt a számot kaptam, mint a szám kétszeresénél 5-tel nagyobb szám. Melyik ez a szám?

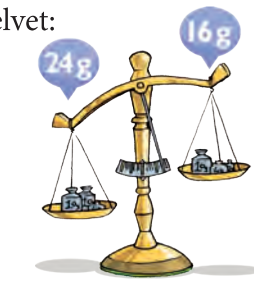
5. Gondoltam egy számra. A kilencszereséhez hozzáadtam nyolcat. Így ugyanakkora számot kaptam, mint amikor a szám feléhez adtam hozzá másfelet. Melyik számra gondoltam?

6. Egy régi házban lakunk, ahol a négyzet alapú szobám magassága éppen 0,8-szerese az oldalának. A szoba 12 élének hossza összesen 44,8 méter.
a) Milyen magas a szobám?
b) Mekkora a szobám alapterülete?

7. Anna meghirdette a használt játékát, de nem jelentkezett vevő, úgyhogy 20%-ot engedett az árból. Sajnos így sem jelentkezett senki, de amikor ezt tovább csökkentette 1500 Ft-tal, akkor a kapott 4900 Ft-os áron már talált vevőt. Mennyiért kezdte hirdetni Anna a játékát?

10. EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA MÉRLEGELVVEL

Vizsgáljuk meg, hogy egyenlőtlenség megoldásakor is alkalmazhatjuk-e a mérlegelvet:



A mérleg jelzi, hogy a bal oldali tömeg nagyobb, mint a jobb oldali.

Ha mindkét serpenyőből kiveszünk 10 g-ot, nem változik a mérleg állása:

$$24\text{ g} > 16\text{ g} \qquad /-10\text{ g}$$
$$14\text{ g} > 6\text{ g}$$

Ha mindkét serpenyő tartalmát megfelezzük, nem változik a mérleg állása:

$$14\text{ g} > 6\text{ g} \qquad /:2$$
$$7\text{ g} > 3\text{ g}$$

1. PÉLDA

Képzeletbeli mérlegre tettük a 2012-es olimpia 8 magyar aranyérmét és néhány mérősúlyt, az ábrán látható módon. Mekkora lehet egy aranyérem tömege?

Megoldás

2 kg + 5 aranyérem > 3 kg + 3 aranyérem / leveszünk mindkét serpenyőből 2 db 1 kg-os tömeget
5 aranyérem > 1 kg + 3 aranyérem / leveszünk mindkét serpenyőből 3 aranyérmet
2 aranyérem > 1 kg
1 aranyérem > 50 dkg

1 londoni aranyérem tömege 50 dkg-nál nagyobb. (A valóságban 550 g.)

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogyan állna a mérleg nyelve az 1. példában, ha a riói olimpia 8 aranyérmét tennénk a mérlegre, az eredetihez hasonló elrendezésben.

CSOPORTMUNKA

Ismételjétek át néhány példán keresztül, mikor marad és mikor változik a relációs jel iránya!

$4 < 5 \quad /\cdot 2$ $8 < 10$	$-3 < -1 \quad /\cdot 3$ $-9 < -3$	$-2 < 1 \quad /\cdot 4$ $-8 < 4$
$4 < 5 \quad /:2$ $2 < 2{,}5$	$-3 < -1 \quad /:3$ $-1 < -\frac{1}{3}$	$-2 < 1 \quad /:4$ $-\frac{1}{2} < \frac{1}{4}$
$4 < 5 \quad /\cdot(-2)$ $-8 > -10$	$-3 < -1 \quad /\cdot(-3)$ $9 > 3$	$-2 < 1 \quad /\cdot(-4)$ $8 > -4$
$4 < 5 \quad /:(-2)$ $-2 > -2{,}5$	$-3 < -1 \quad /:(-3)$ $1 > \frac{1}{3}$	$-2 < 1 \quad /:(-4)$ $\frac{1}{2} > -\frac{1}{4}$

Látható, hogy **a relációs jel megfordul, ha negatív számmal szorzunk, vagy osztunk.** Egyenlőtlenségek megoldása során erre fokozottan kell ügyelni!

Összegezve:

Az egyenlőtlenségek megoldása során is alkalmazhatjuk a mérlegelvet, figyelve az alábbiakra.

Az egyenlőtlenség mindkét oldalához ugyanazt a számot hozzáadva, vagy mindkét oldalából ugyanazt a számot kivonva, a relációs jel nem változik meg.

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a pozitív számmal szorozzuk, vagy osztjuk, akkor a relációs jel nem változik meg.

Ha az egyenlőtlenség mindkét oldalát ugyanazzal a negatív számmal szorozzuk, vagy osztjuk, akkor a relációs jel megfordul.

2. PÉLDA

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget: $7 \cdot x - 5 > 5 \cdot x + 7$!

Megoldás

Azt keressük, hogy mely x értékek esetén nagyobb a bal oldal, mint a jobb.

Első megoldás: próbálgatással. Kiszámítjuk a bal és jobb oldalt néhány helyettesítési értéknél:

	$x = 3$	$x = 4$	$x = 5$	$x = 6$	$x = 7$	$x = 8$	$x = 9$
bal: $7 \cdot x - 5$	16	23	30	37	44	51	58
jobb: $5 \cdot x + 7$	22	27	32	37	42	47	52

Látható, hogy x növelésével mindkét oldal növekszik, de a bal oldal nagyobb mértékben. Ha $x = 6$, akkor a két oldal egyenlő, $x < 6$ esetén a bal oldal kisebb, $x > 6$ esetén pedig a jobb oldal.

Második megoldás: **mérlegelv** alkalmazásával:

$$
\begin{aligned}
7 \cdot x - 5 &> 5 \cdot x + 7 && /+5 \\
7 \cdot x &> 5 \cdot x + 12 && /-5 \cdot x \\
2 \cdot x &> 12 && /:2 \\
x &> 6
\end{aligned}
$$

Az egyenlőtlenség megoldása: $x > 6$. Ennek végtelen sok szám felel meg. Mindegyiket nem lehet ellenőrizni. Ellenőrzéskor kiszámítjuk a bal és jobb oldal értékét néhány 6-nál kisebb és 6-nál nagyobb helyen.

10. EGYENLŐTLENSÉGEK MEGOLDÁSA MÉRLEGELVVEL

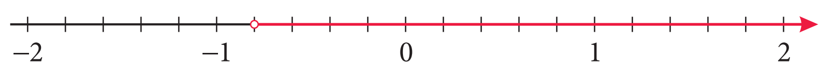
3. PÉLDA

Ábrázoljuk számegyenesen a $\frac{3(x-2)}{2} + 8 < 7 + 4x$ egyenlőtlenség megoldását!

Megoldás

A mérlegelv segítségével oldjuk meg az egyenlőtlenséget!

$$\begin{aligned} \frac{3(x-2)}{2} + 8 &< 7 + 4x && /\cdot 2 \\ 3(x-2) + 16 &< 14 + 8x && /\text{zárójelfelbontás} \\ 3x - 6 + 16 &< 14 + 8x && /\text{összevonás} \\ 3x + 10 &< 14 + 8x && /-10 \\ 3x &< 4 + 8x && /-8x \\ -5x &< 4 && /:(-5) \\ x &> -\frac{4}{5} \end{aligned}$$



A számegyenesen történő ábrázolásnál figyeljünk arra, hogy az $x = -\frac{4}{5}$ nem tartozik hozzá a megoldáshalmazhoz.

FELADATOK

1. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $2a < 6$; *b)* $2a < a + 6$;
c) $2a + 3 < a + 6$; *d)* $2a + 3 < 4a + 6$;
e) $12 \geq 4b$; *f)* $12 \geq 6 + 4b$;
g) $12 + 2b \geq 6 + 4b$; *h)* $12 - 2b \geq 6 - 4b$.

2. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $4x > 7$; *b)* $4x > -7$;
c) $-4x > 7$; *d)* $-4x > -7$;
e) $2y + 5 \leq 17$; *f)* $2y - 5 \leq 17$;
g) $-2y + 5 \leq 17$; *h)* $-2y - 5 \leq 17$.

3. Oldd meg az egyenlőtlenségeket!

a) $3(a + 2) > 6a - 5(a + 1)$;
b) $9(b - 3) > 3(b - 3) + 12$;
c) $4\left(c - \frac{3}{4}\right) < 2\left(c - \frac{2}{4}\right) + \frac{6}{4}$;
d) $\frac{7}{2}d - \frac{3}{4} < \frac{2}{4}d + \frac{5}{7}$.

4. Írd fel egyenlőtlenséggel az alábbi állításokat! Oldd meg az egész számok halmazán, mely egész számokra teljesülnek az alábbi egyenlőtlenségek!

a) Egy szám ötszöröse kisebb, mint a kétszeresénél 6-tel nagyobb szám.
b) Egy szám felénél 10-zel nagyobb szám nagyobb, mint a kétszeresénél 5-tel nagyobb szám.
c) Egy szám harmada kisebb, mint a felénél 2-vel nagyobb szám.
d) Egy szám ellentettjénél 4-gyel kisebb szám nem nagyobb, mint a számnál 6-tal nagyobb szám.

5. A húst is tartalmazó napi menü ára 880 Ft, a vegetáriánus menü pedig 780 Ft. Május 2-án az összes bevétel 127 440 Ft volt.

a) Legfeljebb hány adag menüt adtak el?
b) Legalább hány adag menüt adtak el?
c) Ha összesen 148 adag menü kelt el, akkor hány húsos és hány vegetáriánus menüt adtak el?

V. 11. SZÖVEGES FELADATOK MEGOLDÁSA EGYENLETTEL

Ismételjük át a tavaly megfogalmazott alapelveket! Ha szöveges feladatot egyenlettel szeretnél megoldani, akkor célszerű megfogadni az alábbi tanácsokat:

- Írd fel, mit fogsz ismeretlennek választani, és mivel fogod jelölni!
- Lehetőleg csak egy ismeretlent használj!
- Készíts olyan ábrát, amelynek segítségével összefüggéseket állapíthatsz meg!
- Írj fel algebrai kifejezéseket a szövegben levő összefüggések alapján, és ezek segítségével írd fel az egyenletet!
- A megoldásaidat a szövegbe behelyettesítve ellenőrizd!

Nem szükségszerű minden esetben egyenletekkel dolgoznunk. Sokszor könnyebb következtetésekkel megfejteni a választ. Az ilyen megoldások „szebbek", de a megoldás leírása nem mindig egyszerű.

A szöveges feladatok megoldásában akkor lehetsz sikeres, ha sok feladatot oldasz meg.
Gyakoroljátok a szöveges feladatok megoldását közösen!

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párban!

1. Csenge és Mátyás együtt 42 évesek. Csenge kétszer annyi idős, mint Mátyás. Hány évesek külön-külön?

2. Dávid 8 évvel idősebb, mint az öccse, Gergő. Ketten együtt 34 évesek. Hány éves Dávid?

3. Anya 25 éves volt, amikor Csenge megszületett. Most 8 év híján négyszer annyi idős, mint Csenge. Hány éves most Csenge?

4. Apa 4 évvel idősebb, mint anya. Dávid 23 évvel fiatalabb, mint anya. Apa, anya és Dávid életkorának összege 80 év. Hány évesek külön-külön?

5. Anya és apa együtt 60, anya és Lili együtt 32, apa és Lili együtt 34 évesek. Hány évesek külön-külön?

6. Gondoltam egy számra. A háromszorosából elvettem 4-et, a különbséget elosztottam 5-tel, a hányadoshoz hozzáadtam 2-t, így 3-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

7. A téglalap egyik oldala 16 cm-rel rövidebb, a másik oldala 24 cm-rel hosszabb, mint annak a négyzetnek az oldala, amelynek a területe 16 m^2. Mekkorák a téglalap oldalai?

8. Gondoltam egy számra. Ha 40-ből elveszem a kétszeresét, a szám hatszorosát kapom. Melyik számra gondoltam?

9. Gondoltam egy számra. Ha a hétszereséből elveszek 10-et, épp a szám harmadát kapom. Melyik számra gondoltam?

10. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 10. Ha ebből a számból elvesszük a számjegyeinek felcserélésével kapott számot, 54-et kapunk. Melyik ez a kétjegyű szám?

11. Gondoltam egy számra. A hatodánál 4-gyel kisebb szám egyenlő a kétszeresénél 7-tel nagyobb számmal. Melyik számra gondoltam?

12. Gondoltam egy kétjegyű számra, amely számjegyeinek összege 8. Ha a szám számjegyeit felcseréljük, a kapott szám 3-mal nagyobb, mint a gondolt szám négyszerese. Melyik számra gondoltam?

13. Az egyenlő szárú háromszög egyik szöge 68°. Hány fokosak a belső szögei?

14. Az egyenlő szárú háromszög egyik külső szöge 150°. Hány fokosak a belső szögei?

15. Egy négyszög külső szögeinek aránya 3 : 4 : 6 : 7. Mekkorák a négyszög belső szögei?

Százalékszámítás

A százalékszámítás sokszor előfordul mindennapjainkban, ezért fontos tudni, hogyan számíthatjuk ki a keresett mennyiséget, számot.

A fogalmak:
Százalékalap vagy röviden alap, amelyet A_0-val jelölünk.
Százalékláb (százalék), amelyet p%-kal jelölünk.
Százalékérték jelöljük A-val.

A: A százalékértéket megkapjuk, ha az alapot megszorozzuk a százalékláb századrészével.
Következtetéssel: Kiszámítjuk az 1%-ot, és abból következtetünk a p%-ra.

B: Ha a százaléklábat keressük, azaz „hány százalék?", akkor meghatározzuk mennyi a százalékérték, és elosztjuk az alappal.
Következtetéssel: Kiszámítjuk, hogy a százalékérték hányadrésze az alapnak, és ezt megszorozzuk 100-zal.

C: Ha az alapot keressük, akkor a százalékértéket elosztjuk a százalékláb századrészével.
Következtetéssel: A százalékértékből visszakövetkeztetünk az 1%-ra, majd ennek 100-szorosa adja az alapot.

Összetettebb feladatok esetén mindig újra meg kell határozni, hogy mi az alap vagy százalékérték, százalékláb, és a fentiek alapján számolni.

Betűk használata

Egyenletek megoldásakor betűkifejezésekkel dolgozunk. Amikor betűkkel végzünk műveleteket, új kifejezéseket, fogalmakat is használunk.

Egytagú kifejezés: $2a$; $\frac{5}{2}xy$; $-3a^2$.

Együttható: az egytagú betűkifejezés számszorzója. Az előző példákban: 2; $\frac{5}{2}$; -3.

Egynemű kifejezés olyan egytagúak, amelyek csak számszorzókban térnek el: $2x$; $-6x$; $\frac{3}{4}x$.

Betűkifejezések helyettesítési értéke: Adott szám vagy számok behelyettesítése után kapott számérték. Például: $T = a \cdot b$ helyettesítési értéke $a = 6$; $b = 2$ esetén $T = a \cdot b = 6 \cdot 2 = 12$.
A betűkifejezésekkel hasonlóan végezhetünk műveleteket, mint számokkal. *Csak az egynemű kifejezések vonhatók össze.*

Zárójelfelbontásnál a zárójelben lévő mindegyik tagot meg kell szorozni a megadott szorzóval.
Figyelj a láthatatlan szorzásjelre!

ÖSSZEFOGLALÁS

Egyenletek, egyenlőtlenségek

A mérlegelv egy általános egyenletmegoldási módszer.

Lényege:

- *Az egyenlet két oldalán álló kifejezést ugyanannyival növeljük, vagy csökkentjük.*
- *Az egyenlet két oldalán álló kifejezésnek ugyanannyiszorosát vagy ugyanannyiad részét vesszük.*

Ezeket a lépéseket ismételve megkapjuk az egyenlet megoldását.

Egyenlőtlenségeknél is használható a mérlegelv, azzal a módosítással, hogyha *negatív számmal osztunk vagy szorzunk, akkor megfordul a relációs jel (egyenlőtlenség) iránya.*

Egyenletek megoldását jól használhatjuk szöveges feladatok megoldásakor.
Ha szöveges feladatot egyenlettel szeretnél megoldani, akkor célszerű megfogadni az alábbi tanácsokat:

- *Írd fel, mit fogsz ismeretlennel jelölni, és lehetőleg csak egy ismeretlent használj.*
- *Készíts olyan ábrát, amelynek segítségével összefüggéseket állapíthatsz meg.*
- *A szövegben levő összefüggések alapján írj fel algebrai kifejezéseket, és ezek segítségével írd fel az egyenletet.*
- *A megoldásaidat a szövegbe behelyettesítve ellenőrizd.*

FELADATOK

1. A Nagy család havi összjövedelme 380 000 Ft. Élelmiszerre 120 000 Ft-ot költöttek. A maradék 20%-át közlekedésre kellett kiadniuk, 25 000 Ft-ot lakástakarékba fektettek. A maradék pénz 85%-a gáz-, villany-, vízdíj volt. Az ezután megmaradt pénzt nyaralásra tették félre.

a) Hány Ft-ot szántak közlekedésre?
b) A rezsiköltség hány százaléka az összjövedelmüknek?
c) A havi jövedelem hány százalékát teszik félre a nyaralásra?

2. A Föld vízkészletének 3%-a édesvíz, aminek legnagyobb részét az Északi- és Déli-sarkvidékeken található jéghegyek teszik ki, tehát a ténylegesen hozzáférhető mennyiség az összes vízkészlet 0,6%-a. Kevés használható édesvíz van tehát a Földön, takarékoskodnunk kell vele. Egy új találmány segítségével csökkenteni tudjuk a kézmosáshoz használt víz mennyiségét. Az újítással $\frac{12\ \text{liter}}{\text{perc}}$ helyett csak 7 liter folyik a csapból percenként.

a) Hány százalékkal kevesebb vizet használunk el így egy 10 perces zuhanyozás alatt?
e) Egy négytagú városi család napi vízfogyasztása kb. 0,35 m^3 lenne az újítás bevezetése után. Hány m^3 vizet használnak el a találmány nélkül havonta?

3. Melyek az egynemű kifejezések a következő kifejezések között?

$-5ab^2$; $2ab$; $\frac{1}{8}a^2b$; $23ab$; $4a^2b$; $-8ba$; $\frac{5}{9}ba^2$; $\frac{a^2b}{6}$.

4. Határozd meg a kifejezések értékét, ha $a = 3$, $b = -5$!

a) $a^2 b$; *b)* $-\frac{2}{5}(ab)^2$.

5. Bontsd fel a zárójeleket és végezd el a lehetséges összevonásokat!

a) $(11a - 13b + 5c) + (-15a + 7b - 2c)$; *b)* $(17a - 37b - 2c) - (16a + 15c - 24b)$;

c) $8a - 4 - 3(a - 5) + 6(2a - 1)$; *d)* $4a - 11b - (5a - 12b) - 4(2a - b)$;

e) $\left(5x - 4y\right) - 5\left(3x - 4y\right) + \left(3y - 5x\right)$.

6. Oldd meg tetszőleges módszerrel az alábbi egyenleteket!

a) $2 \cdot (2x + 5) - 5 = 23$; *b)* $(2x - 8) : 9 + 4 = 6$.

7. Oldd meg az alábbi egyenleteket!

a) $2 \cdot (x - 1) + 3 = 5x - 29$; *b)* $5 \cdot (2x + 1) - 4 \cdot (3x - 2) + 8 = 3(x - 9) + 10$;

c) $\frac{x + 1}{7} = \frac{x - 2}{2}$; *d)* $\frac{x}{2} + \frac{x}{5} - 3 = \frac{3x}{10} - 9$;

e) $\frac{2x - 1}{4} + \frac{3}{2} = 8 - \frac{x}{8}$.

8. Oldd meg mérlegelv segítségével!

a) $23(x - 1) + 3 = 6x - 10$; *b)* $\frac{1}{2}x + \frac{3}{10} + \frac{5}{4} = 5 - \frac{3}{5}x$;

c) $\frac{2}{5}x = 7 - x$; *d)* $\frac{2x}{3} + \frac{x}{6} - \frac{x}{12} + 10 = 3 - x$.

9. Oldd meg a következő egyenletet!

$$x - [x - (x - 4) - 3] - 2 = 1$$

10. Oldd meg a természetes számok halmazán a következő egyenleteket:

a) $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 0$; *b)* $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 6$;

c) $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 24$; *d)* $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 30$.

11. Miért nincs megoldása a valós számokon a következő egyenleteknek?

a) $(3x - 2)^2 + (2x - 3)^2 = 0$; *b)* $(5x - 2)^2 + (6x - 2)^2 = 0$.

12. Oldd meg a következő egyenleteket!

a) $(x - 100)x = 6x$; *b)* $(x + 11)x = 9x$.

13. Elkezdjük összeadni 1-től kezdve a pozitív egész számokat. Hány darabot kell összeadni, hogy ez az összeg

a) 21; *b)* 66; *c)* 100 legyen?

14. Oldd meg mérlegelv segítségével az alábbi egyenlőtlenségeket! A megoldáshalmazt ábrázold számegyenesen!

a) $2 \cdot (x-1) + 3 < 5x - 29$;
b) $5 \cdot (2x+1) - 4 \cdot (3x-2) + 8 \geq 3(x-9) + 10$;
c) $\frac{2x-1}{4} + \frac{3}{2} \geq 8 - \frac{x}{8}$;
d) $\frac{6-5x}{3} + \frac{2x+1}{6} < \frac{4x+8}{2}$.

15. János bácsi felszerelést akar venni a vízilabdacsapat tagjainak. Összesen 148 000 forintja van a sportkörnek. Egy vízilabda 5600 Ft, egy meleg köntös pedig 8000 Ft. Válaszd ki azt az egyenlőtlenséget, amelyik leírja, hogy milyen összefüggés áll fenn a rendelkezésre álló pénz és a vásárolt labdák, köntösök száma között!
v = a vásárolt vízilabdák száma; k = a vásárolt köntösök száma

A) $8000v + 5600k \leq 148\,000$
B) $5600 + v + 800 + k \leq 148\,000$
C) $5600v \cdot 8000k \leq 148\,000$
D) $5600v + 8000k \leq 148\,000$

16. Marcinak már csak 140 Mb szabad memóriája van a telefonján. Egy fénykép 2 Mb és egy zeneszám 0,3 Mb helyet foglal el. Válaszd ki azt az egyenlőtlenséget, amely leírja, hogy hány fényképet és zeneszámot tárolhat még a telefonján!
f = fényképek száma; z = zenék száma

A) $2f + 0{,}3z \geq 140$ *B)* $2f + 0{,}3z \leq 140$ *C)* $2f + 0{,}3z < 140$ *D)* $2f + 0{,}3z > 140$

17. Írj egy feladatot, amelynek a megoldása $2x + 25 \leq 100$!

18. Egy háromszög egyik oldalának hossza 90%-a a középső nagyságú oldalnak, míg a harmadik oldal hossza 130%-a a középsőnek.
Mekkorák a háromszög oldalai, ha a kerülete 9,6 cm?

19. Egy téglalap területét 25%-kal megnöveljük, ekkor egy olyan négyzetet kapunk, melynek kerülete 60 cm. Mekkora a téglalap területe?

20. Oldd meg az egyenleteket és az egyenlőtlenségeket!

a) $9(2a+5) - 40 = 7(3a-1) + a$;
b) $9(2a+5) - 40 \leq 7(3a-1) + a$;
c) $4(b-5) - 3(2b-5) = 2(3b-1) - 27$;
d) $4(b-5) - 3(2b-5) > 2(3b-1) - 27$.

21. – Gondoltam egy számra – közli somolyogva Jancsi. – Ha a négyszereséből elveszek 6-ot, a különbséget elosztom 2-vel, és a hányadoshoz hozzáadok 5-öt, éppen 0-t kapok.
– Akkor nyertem – szól Juliska –, az én számom nagyobb, hisz a háromszorosa 5-tel nagyobb, mint a fele.
Melyik gyerek melyik számra gondolt?

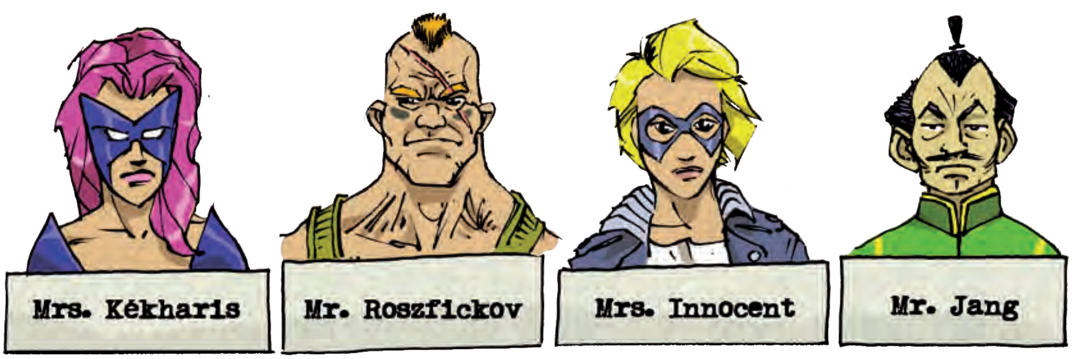
22. A sarki boltban egy csoki és egy jégkrém 210 Ft-ba, egy jégkrém és egy üdítő 280 Ft-ba, egy csoki és egy üdítő pedig 230 forintba kerül. Mennyibe kerül a csoki, a jégkrém és az üdítő külön-külön?

23. Egy szimmetrikus trapéz egy száron fekvő két szögének a különbsége 120°. Mekkorák a trapéz szögei?

24. Péter, Pál és Panka hármas ikrek. Péter születési súlya 40 grammal több, mint Pankáé, de 60 grammal kevesebb, mint Pál súlya. Mikor mindhármukat egyszerre mérték meg, a kijelző 8750 grammot mutatott. Hány grammal születtek a gyerekek?

25. A rombusz egyik szöge háromszor akkora, mint a szomszédos szöge. Mekkorák a rombusz szögei?

26. A Rugalmas laborban holtan találták reggel 9-kor Dr. Agyvillámot, és valaki elvitte annak a végtelenül rugalmas anyagnak a leírását, amelyen a tudós éppen dolgozott. A halottkém megállapította, hogy a test hőmérséklete a megtaláláskor 28 C°-os volt, és tudjuk, hogy a halál beállta után, a kezdetben 36 C°-os test hőmérséklete óránként 2 C°-kal csökken. A biztonsági kamera négy ember képét rögzítette a labor előtti folyosón.
A négy lehetséges elkövető Mr. Roszfickov, Mr. Jang, Mrs. Kékharis és Mrs. Innocent.



– Mr. Roszfickovot 11 órakor tartóztatták fel a rendőrök az országhatáron, egy vasúti kocsiban. A határ 1100 km-re volt a Rugalmas labortól és a vonat maximális sebessége 160 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ lehetett.
– Mr. Jangot a labortól 240 km-re kapták el egy kerékpáron, délelőtt 10-kor. A kerékpárral legfeljebb 40 km-t tudott megtenni óránként.
– Mrs. Kékharis motorozott. Őt délelőtt 10:30-kor tartóztatták fel az autópályán. A motorkerékpárral legfeljebb 140 km-t tehetett meg óránként és a labortól 850 km-re kapták el.
– Mrs. Innocent autóval távozott. A hegyi úton szaladt bele egy rendőrségi útzárba, 11-kor. A szerpentinen legfeljebb 120 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel haladhatott, és éppen 600 km-re volt a labortól.

a) Mikor távozhatott a laborból Mr. Roszfickov?
b) Mikor távozhatott a laborból Mr. Jang?
c) Mikor távozhatott a laborból Mrs. Kékharis?
d) Mikor távozhatott a laborból Mrs. Innocent?
e) Mikor követték el a bűntényt?
f) Ki lehetett az elkövető?

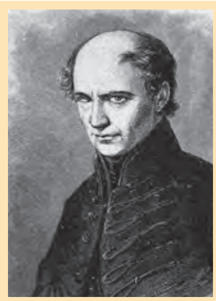
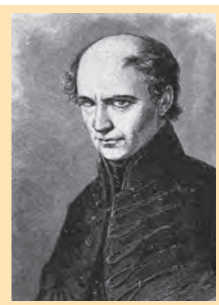
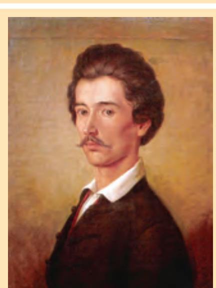
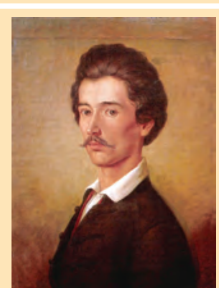
V. 12. ÖSSZEFOGLALÁS

27. A téglalap egyik oldalát a négyszeresére, a másik oldalát a harmadára változtattuk. Hányszorosa az így kapott téglalap területe az eredeti téglalap területének?

28. Gondoltunk egy pozitív páros számot. A gondolt számig összeadjuk a pozitív páratlan számokat és az összeget 31-gyel növeljük. Az így kapott szám pontosan annyi, mintha a pozitív páros számokat adnánk össze a gondolt számig. Melyik számra gondoltunk?

29. Két zacskóban levő golyók aránya 3 : 5. Ha az egyik zacskóból átteszünk 4 golyót a másikba, akkor mindkettőben azonos lesz a golyók száma. Hány golyó volt eredetileg az egyes zacskókban?

30. Nagy költőinkhez egy-egy pozitív egész számot rendeltünk. Melyikhez melyiket, ha a táblázatban a sorok és oszlopok összegét adtuk meg?

			29
			25
			33
25	31	31	

VI. GEOMETRIA

– Az előző útra nagyon sokan jelentkeztek, de sajnos csak két diák jöhetett velem Alexandriába. Nem kell azonban elkeserednetek, mivel a mostani kalandunk is hasonló korba indul. Úti célunk ezúttal Szürakusza, ahol Arkhimédészt láthatják a szerencsések, aki … Matyi és Zozó! – kiáltotta Judit néni vásári kikiáltóként elnyújtva a hangját. – Fiúk! Ha megérkezünk, ne ijedjetek meg a zajoktól! Kr. e. 213-ban épp ostromolták Szürakuszát! – mondta a tanárnő, s alig néhány pillanat múlva már valóban maguk előtt látták a csatát.

A várfalon sürgölődők harsányan nevettek, amikor a római hajókról kilőtt kő jóval a falak előtt, ártalmatlanul hullott a vízbe.

– Itt jön Arkhimédész. Mutassuk meg a rómaiaknak a hajítógépét! Tekerjetek a kötélen még kettőt, aztán álljatok hátrébb! – vezényelt egy díszes egyenruhájú katona.

A nehéz kő magasra ívelt, majd telibe találta az egyik hajó árbocát. Recsegve-ropogva dőlt el. Az evezőknél ülő rabszolgáknak igencsak igyekezniük kellett, ha biztonságos távolságba akarták juttatni a hajó maradékát.

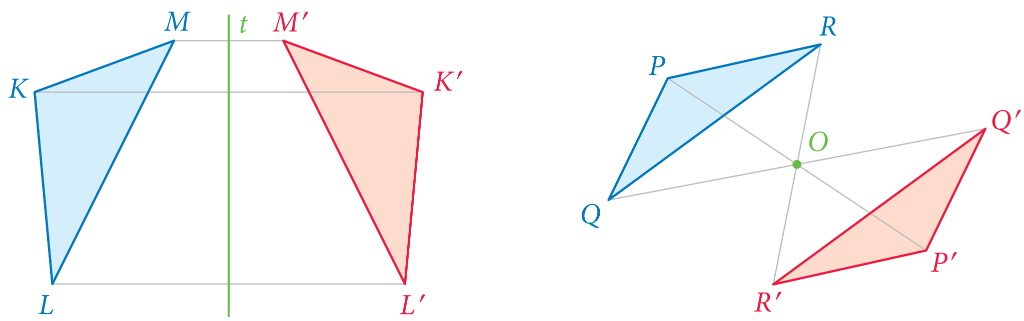
– Remélem, örülsz és büszke vagy a sikereinkre, Arkhimédész. Szerencsére jól működnek a terveid alapján épített gépek– fordult oda a tudóshoz a parancsnok.

– Örülök, de nem a szerencse működteti a gépeimet. A matematika és a fizika törvényeinek engedelmeskednek, de ez csak játék! A gömbről és a kúpról írt munkámra büszkébb vagyok, mint erre a gépre.

– Csinálhatnánk mi is hajítógépet technikaórán – lelkesült fel Zozó. – Sokkal izgalmasabb lenne, mint a múltkori feladat, amikor rakott krumplit kellett főzni.

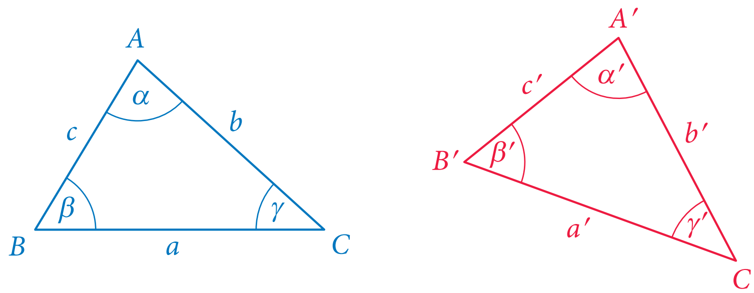
VI. 1. EGYBEVÁGÓ HÁROMSZÖGEK

A tengelyes tükrözés és a középpontos tükrözés kapcsán megismerkedtünk az egybevágóság fogalmával. Megállapítottuk, hogy mind a két transzformáció egybevágóság, ezért mondhatjuk, hogy a KLM háromszög egybevágó a $K'L'M'$ háromszöggel, illetve a PQR háromszög egybevágó a $P'Q'R'$ háromszöggel.



Rövid jelöléssel: $KLM\triangle \cong K'L'M'\triangle$, $PQR\triangle \cong P'Q'R'\triangle$.

Az ABC és az $A'B'C'$ háromszög között nincs sem tengelyes, sem középpontos tükrös kapcsolat, mégis egybevágónak gondoljuk őket.



Felsoroljuk azokat az alapeseteket, amikor két háromszögről kijelenthetjük, hogy egybevágók. A megfogalmazások az ábrán látható ABC és $A'B'C'$ háromszögekre vonatkoznak.

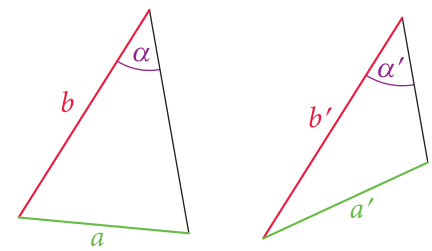
I. *a)* Ha két háromszögben, $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.
II. *a)* Ha két háromszögben $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.
III. *a)* Ha két háromszögben $a = a'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.
IV. *a)* Ha két háromszögben $a = a'$, $b = b'$, és $a > b$ esetén $\alpha = \alpha'$, akkor $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

Igaz a négy állítás megfordítása is.

I. *b)* Ha $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$, akkor $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$.
II. *b)* Ha $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$, akkor $a = a'$, $b = b'$, $\gamma = \gamma'$.
III. *b)* Ha $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$, akkor $a = a'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.
IV. *b)* Ha $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$, akkor $a = a'$, $b = b'$, és $a > b$ esetén $\alpha = \alpha'$.

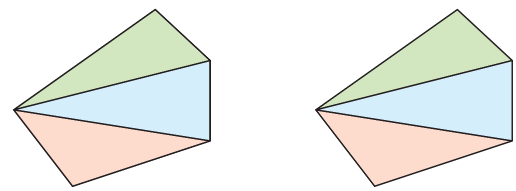
A II. *a)* esetben két-két oldal és a közbezárt szög, a IV. *a)* esetben két-két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög szerepel. Felvetődik a kérdés, hogy miért nem fogalmaztuk meg a harmadik lehetőséget is, amelyikben két-két oldal és a kisebbikkel szemközti szög szerepel.

Ha ezek a feltételek teljesülnek, akkor a két háromszög nem feltétlenül egybevágó, ezért ezt az esetet nem vehetjük a háromszögek egybevágóságának alapesetei közé.



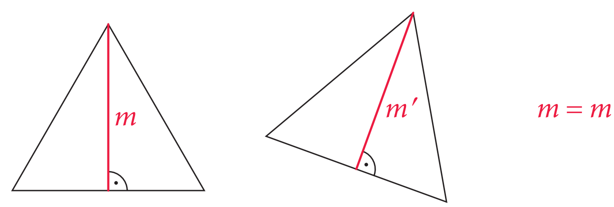
Az ábra mutat két háromszöget, amelyben $a = a'$, $b = b'$, $\alpha = \alpha'$, és a két háromszög nem egybevágó. A magyarázat az, hogy most $a < b$, vagyis az α a kisebb oldallal szemben található.

A sokszögek egybevágóságának eldöntéséhez vizsgáljuk meg a megfelelő háromszögeket! Az ábrán látható két sokszög azért egybevágó, mert a megfelelő háromszögpárok egybevágók.



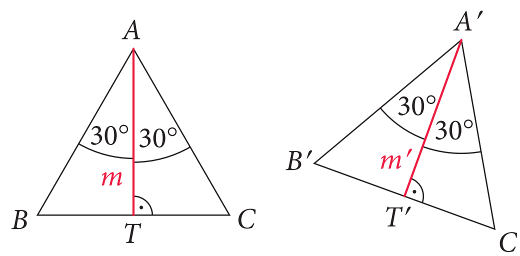
1. PÉLDA

A rajzunkon két szabályos háromszög látható. Mindkettőnek ugyanakkora a magassága. Egybevágó-e a két háromszög?



Megoldás

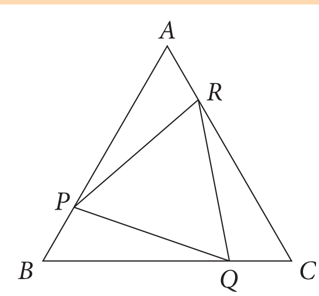
Szabályos háromszögben a magasság szögfelező is, ezért az A-nál lévő 60°-os szöget két 30°-os szögre vágja a magasság.



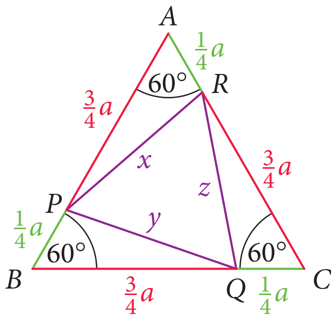
Az ATC és $A'T'C'$ háromszögekre teljesülnek a III. *a)* feltételei, azaz egy-egy oldaluk azonos hosszúságú ($m = m'$), és a rajta fekvő két-két szög is páronként egyenlő (90° és 30°). Ezek alapján $ATC\triangle \cong A'T'C'\triangle$. Hasonlóan igazolhatjuk, hogy $BTC\triangle \cong B'T'C'\triangle$. Mivel az ABC és az $A'B'C'$ háromszögek megfelelő részei egybevágók, ezért $ABC\triangle \cong A'B'C'\triangle$.

2. PÉLDA

Az ABC szabályos háromszög oldalain bejelöltük az ábrán látható P, Q, R negyedelőpontokat. Mutassuk meg, hogy a PQR háromszög is szabályos háromszög!



Megoldás



Mivel az ABC háromszög szabályos, ezért az A, B, C csúcsoknál 60°-os szögeket találunk. Legyen a szabályos háromszög oldalának hossza a! Mivel a P, Q, R pontok negyedelőpontok, ezért $AP = BQ = CR = \frac{3}{4}a$, $PB = QC = RA = \frac{1}{4}a$.

Az APR, BQP, CRQ háromszögekre teljesülnek a II. *a)* feltételei, azaz két-két oldaluk páronként egyenlő hosszú (mindegyiknek van $\frac{3}{4}a$ és $\frac{1}{4}a$ hosszúságú oldala), és a közbezárt szögük is egyenlő (60°-os).

Ezek alapján $APR\triangle \cong BQP\triangle \cong CRQ\triangle$.

Ha egybevágók, akkor használhatjuk az I. *b)* állítást. Vagyis minden megfelelő oldalpárjuk hossza egyenlő, azaz $x = y = z$.

Ez azt jelenti, hogy a PQR valóban szabályos háromszög.

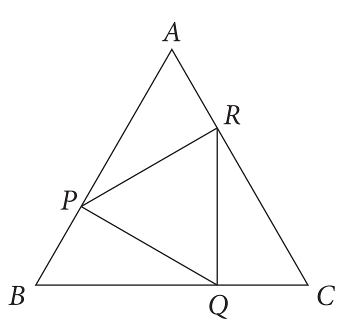
FELADATOK

1. Rajzoltunk két négyzetet, amelyek átlója egyenlő hosszúságú. Egybevágó-e a két négyzet?

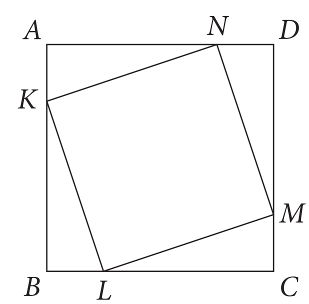
2. Rajzolj egy $ABCD$ paralelogrammát és húzd meg a két átlóját! A metszéspont legyen E. Írj föl annyi egybevágó háromszöget, ahányat csak találsz az ábrán!

3. Rajzoltunk két egyenlő szárú háromszöget, amelyeknek az alaphoz tartozó magassága egyenlő. Egybevágó-e a két háromszög?

4. Az ABC szabályos háromszög oldalain bejelöltük az ábrán látható P, Q, R harmadolópontokat. Mutasd meg, hogy a PQR háromszög is szabályos háromszög!



5. Az $ABCD$ négyzet oldalain bejelöltük az ábrán látható K, L, M, N negyedelőpontokat. Mutasd meg, hogy a $KLMN$ négyszög is négyzet!



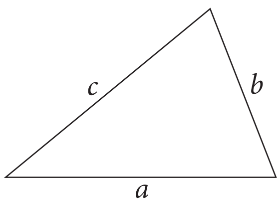
6. Az ABC szabályos háromszög AB oldalára kifelé az $AEDB$, AC oldalára kifelé az $ACFG$ négyzetet rajzoltuk. Mutasd meg, hogy $CE = BG$!

7. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójára kifelé az $AEDB$, AC oldalára kifelé az $ACFG$, BC oldalára kifelé a $BHJC$ négyzetet rajzoltuk. Mutasd meg, hogy $CE = BG$ és $CD = AH$!

8. Igazold, hogy a négyzetet a két átlója négy egybevágó háromszögre vágja!

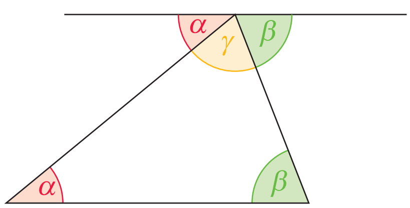
2. ÖSSZEFÜGGÉSEK A HÁROMSZÖG OLDALAI, SZÖGEI KÖZÖTT

Két pontot egyenes és görbe vonalakkal is összeköthetünk. Tudjuk, hogy az összekötő vonalak közül az egyenes vonal a legrövidebb.



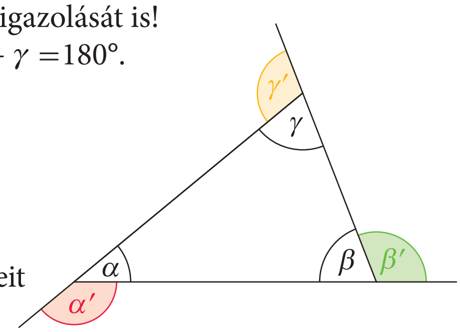
Ennek következménye háromszögekre nézve a **háromszög-egyenlőtlenség. A háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.**

A rajz jelöléseit használva: $b + c > a$, $a + c > b$, $a + b > c$.



A háromszög belső szögeinek összege 180°.

Az ábra segít felidézni az állítás igazolását is!
A jelöléseket használva: $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Az ábra a háromszög külső szögeit mutatja.

1. PÉLDA

Határozzuk meg a háromszög külső szögeinek összegét!

Megoldás

A háromszög bármely belső szögének és a mellette fekvő külső szögének az összege 180°.
A rajz jelöléseit használva: $\alpha + \alpha' = 180°$, $\beta + \beta' = 180°$, $\gamma + \gamma' = 180°$.
Ezek összege: $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 3 \cdot 180°$.
Vegyük el mindkét oldalról az $\alpha + \beta + \gamma = 180°$-ot!
Ekkor ezt kapjuk: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$.

A példa eredménye egy fontos megállapítás: **A háromszög külső szögeinek összege 360°.**

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ és $\alpha + \alpha' = 180°$, ezért: $\alpha' = \beta + \gamma$.
Hasonlóan kapjuk, hogy $\beta' = \alpha + \gamma$,
$\gamma' = \alpha + \beta$.

Vagyis **a háromszög egy-egy külső szöge akkora, mint a vele nem szomszédos két belső szög összege.**

2. PÉLDA

Egy háromszög két belső szöge: $\alpha = 32°46'$, $\beta = 63°25'$. Mekkorák a hiányzó belső és külső szögek?

Megoldás

Mivel $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, ezért $\gamma = 180° - 32°46' - 63°25' = 83°49'$.
Mivel $\alpha + \alpha' = 180°$, ezért $\alpha' = 180° - 32°46' = 147°14'$.
Mivel $\beta + \beta' = 180°$, ezért $\beta' = 180° - 63°25' = 116°35'$.
Mivel $\gamma + \gamma' = 180°$, ezért $\gamma' = 180° - 83°49' = 96°11'$.

Ellenőrzésként: $\alpha' + \beta' + \gamma' = 147°14' + 116°35' + 96°11' = 360°$.

Vonalzó és szögmérő segítségével a háromszögek oldalai és szögei között további összefüggéseket is felfedezhetünk. Mi is megfogalmaztunk néhányat, de a bizonyításoktól most eltekintettünk.

I. *a)* Ha egy háromszögben két oldal hossza egyenlő, akkor a velük szemközti szögek is egyenlők.
II. *a)* Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van.

Ezen állítások megfordítása is igaz.

I. *b)* Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor az ezekkel szemközti oldalak hossza is egyenlő.
II. *b)* Bármely háromszögben két szög közül a nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van.

FELADATOK

1. Létezik-e olyan háromszög, amelynek oldalhosszai az alábbiak?
a) 12 cm, 13 cm, 14 cm;
b) 17 dm, 17 dm, 33 dm;
c) 240 mm, 12 cm, 3,6 dm;
d) 0,28 m, 12 cm, 420 mm.

2. Három település távolságát egy térkép segítségével légvonalban megbecsültük. Selyebtől Monaj 3 km-re, Lak pedig 7 km-re található. A becsült adatok alapján milyen messze lehet Lak és Monaj egymástól? Nézz utána, hogy hol találhatók ezek a települések!

3. A térképen *A* és *B* pont között, valamint *B* és *C* pont között is 2 cm a távolság. A három pont a térképen egy egyenesre illeszkedik. A valóságban azonban az *A*-ból *B*-be vezető egyenes út hosszabb, mint a *B*-ből *C*-be vezető. Hogyan lehetséges ez?

4. Add meg a háromszög hiányzó belső szögét!
a) 34°, 67°; *b)* 88°, 35°;
c) 42°29′, 101°51′; *d)* 78°34′, 28°43′.

5. Add meg a háromszög harmadik szögéhez tartozó külső szöget!
a) 56°, 104°; *b)* 22°29′12″, 41°51′54″;
c) 48°, 13°; *d)* 81°31′17″, 45°47′49″.

6. Rakd növekvő sorrendbe a háromszög *a*, *b* és *c* oldalát, ha
a) $\alpha = 38°43'$, $\beta = 86°23'$;
b) $\alpha = 68°23'$, $\beta = 96°48'$!

7. Rakd növekvő sorrendbe a háromszög *a*, *b* és *c* oldalát, ha
a) $\alpha = 97°31'$, $\beta' = 126°50'$;
b) $\alpha' = 78°38'$, $\beta' = 143°40'$!

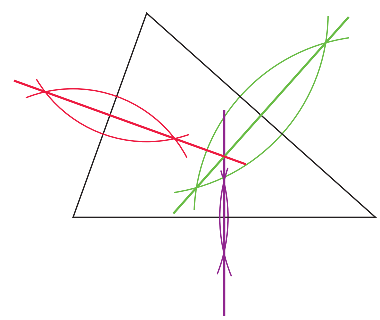
8. Egyenlő szárú háromszögről van-e szó, ha
a) $\alpha = 38°48'$, $\beta' = 77°36'$;
b) $\alpha = 62°23'$, $\beta' = 117°37'$?

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban! Jelöljetek be két pontot egy papírlapon! Hogyan tudnátok a két pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegesét egy hajtásvonallal létrehozni?
Egy papírlapon három hajtással jelöljetek ki egy háromszöget! Hajtsátok meg a háromszög mindhárom oldalának felezőmerőlegesét! (A csúcsok egymásra illesztésében segíthet, ha a körző hegyével mindkét csúcsot egyszerre átszúrjátok.) Mit tapasztaltok? Milyen helyzetű ez a három hajtásvonal? Fogalmazzátok meg a sejtéseteket!

1. PÉLDA

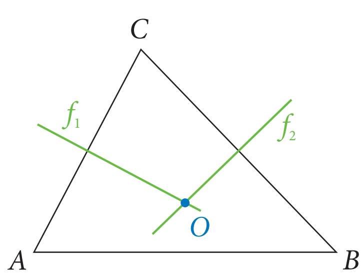
Szerkesszük meg a háromszög három oldalának felezőmerőlegesét!
Mi a sejtésünk az így kapott három egyenesről?

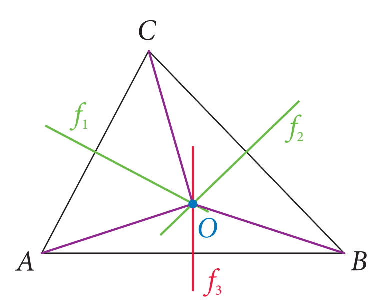


Megoldás

Az ábra mutatja a szerkesztést:
Az így kapott három egyenes, a szerkesztett ábra szerint, egy pontban metszi egymást.

A papírhajtogatás és a megszerkesztett ábra is azt sejteti, hogy a háromszög három oldalának felezőmerőlegese egy pontban metszi egymást.
Igazoljuk a sejtésünket!
Rajzoljuk meg a háromszög két oldalának felezőmerőlegesét, és a metszéspontjukat nevezzük el O-nak!
Tudjuk, hogy csak a szakasz felezőmerőlegesének a pontjai rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egyenlő távolságra vannak a szakasz két végétől.





Mivel O illeszkedik az f_1-re, ezért $BO = CO$. Mivel O illeszkedik az f_2-re, ezért $AO = CO$.
Vagyis $BO = AO$.
Ez azt jelenti, hogy O illeszkedik az f_3-ra is, tehát a három felezőmerőleges valóban egy pontra illeszkedik.

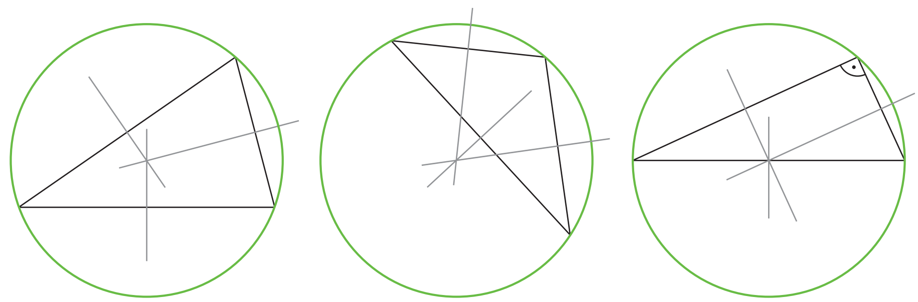
Ezzel bebizonyítottuk, hogy **a háromszög három oldalának felezőmerőlegese egy pontban metszi egymást.**

A bizonyítás során azt is láttuk, hogy $AO = BO = CO$. Vagyis van olyan O középpontú kör, amelyre a háromszög mindhárom csúcsa illeszkedik.

A háromszög köré írt körének nevezzük azt a kört, amelyre a háromszög mindhárom csúcsa illeszkedik.

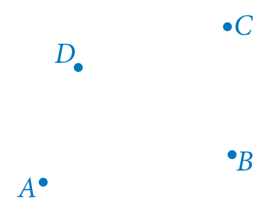
VI. 3. A HÁROMSZÖG ÉS A KÖRÉ ÍRT KÖRE

A rajzok mutatják, hogy a köré írt kör középpontja lehet a háromszögön belül, kívül, és eshet a háromszög határvonalára is.

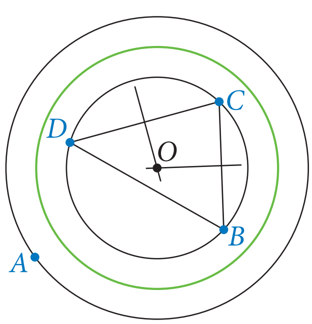


2. PÉLDA

A vázlatrajz négy fa helyét mutatja egy parkban (amelyek nincsenek egy egyenesen és nincsenek egy körön). A park üzemeltetője olyan kör alakú sétányt szeretne építtetni, amelytől mind a négy fa egyenlő távolságra van. Tervezzünk egy ilyen utat!



Megoldás



Válasszuk például a *B*, *C* és *D* pontokat! A *BCD* háromszög köré írt körét meg tudjuk szerkeszteni. Mivel mindhárom oldal felezőmerőlegese egy pontban, a köré írt kör középpontjában metszi egymást, ezért már két felezőmerőleges kijelöli a kör *O* középpontját.
Az *O* középpontú, $OB = OC = OD$ sugarú körre három kijelölt pont illeszkedik, az *O* középpontú, *OA* sugarúra pedig egy. Rajzoljunk kört az *O* középpont köré az $OA + OB$ szakasz felével! Ez egy megfelelő kör, ez lehet a sétány helye.

FELADATOK

1. Szerkessz a füzetedbe egy 3 cm oldalú szabályos háromszöget! Szerkeszd meg a köré írt körét is! Mérd meg, hogy milyen messze van a kör középpontja az oldalaktól és a csúcsoktól! Mit tapasztalsz?

2. Egy egyenlő szárú háromszög szárai 2 cm hosszúak. A köré írt körének sugara szintén 2 cm hosszú.
a) Mekkorák a háromszög szögei?
b) Milyen messze van a kör középpontja a háromszög alapjától?

3. Szerkeszd meg azt a háromszöget, amelynek egyik oldala 3 cm, a köré írt kör sugara 2 cm hosszú, az adott oldalon fekvő egyik szöge pedig 60°-os!

4. Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek alapja 3 cm, a köré írt kör sugara pedig 2 cm hosszú!

5. Szerkessz egyenlő szárú háromszöget, amelynek szára 4 cm, a köré írt kör sugara pedig 2,5 cm hosszú!

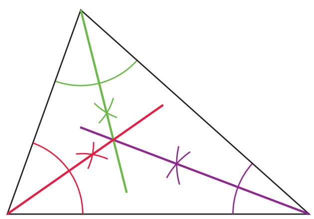
4. A HÁROMSZÖG ÉS A BEÍRT KÖRE

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban! Vágjatok ki papírból egy nagy háromszöget! Illesszétek egymásra a háromszög oldalait a csúcsain átmenő hajtással! Mik lesznek ezek a hajtásvonalak a háromszögben? Mit tapasztaltok? Milyen helyzetű ez a három hajtásvonal? Fogalmazzátok meg a sejtéseteket!

1. PÉLDA

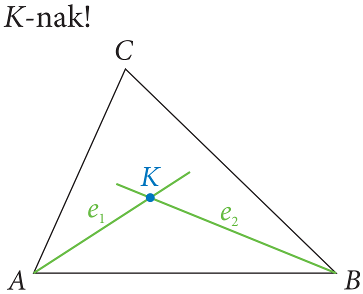
Szerkesszük meg a háromszög három szögfelezőjét! Mi a sejtésünk az így kapott három egyenesről?

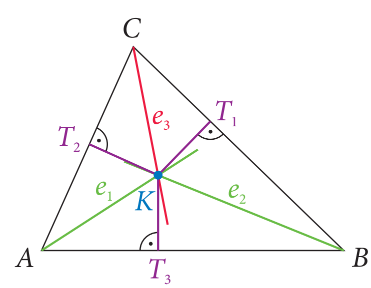


Megoldás

Az ábra mutatja a szerkesztést:
Az így kapott három egyenes a szerkesztett ábrán egy pontban metszi egymást.

A papírhajtogatás és ez az ábra is azt sejteti, hogy a háromszög három szögfelezője egy pontban metszi egymást.
Lássuk be a sejtésünket! Rajzoljuk meg a háromszög két belső szögének szögfelezőjét, és a metszéspontjukat nevezzük el *K*-nak!

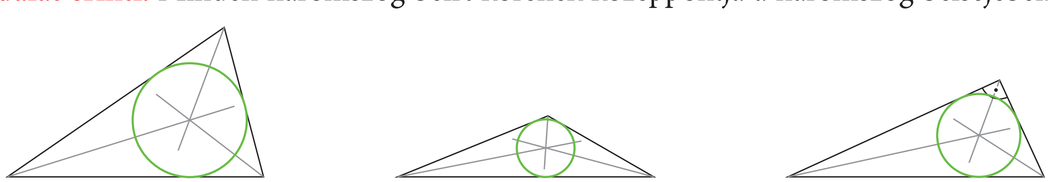




Tudjuk, hogy a háromszög pontjai közül csak a szögfelező pontjai rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy egyenlő távolságra vannak a szög két szárától.
Mivel K illeszkedik az e_1-re, ezért $T_3K = T_2K$. Mivel K illeszkedik az e_2-re, ezért $T_3K = T_1K$.
Vagyis $T_1K = T_2K$.
Ez azt jelenti, hogy K illeszkedik az e_3-ra is, vagyis a három szögfelező valóban egy pontra illeszkedik.

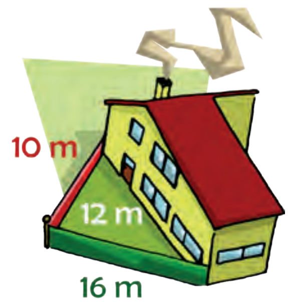
Beláttuk, hogy **a háromszög három szögfelezője egy pontban metszi egymást.**

A $T_1K = T_2K = T_3K$ egyenlőségekből következik, hogy van olyan K középpontú kör, amely a háromszög mindhárom oldalát érinti. **A háromszög beírt körének nevezzük azt a kört, amely a háromszög mindhárom oldalát érinti.** Minden háromszög beírt körének középpontja a háromszög belsejében található.



2. PÉLDA

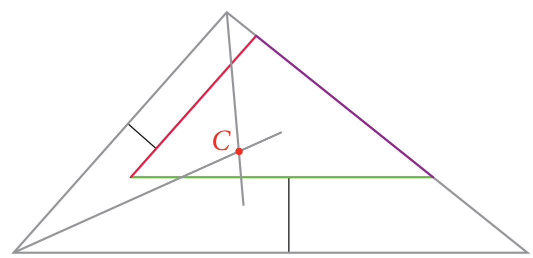
Blöki a háromszög alakú udvaron elásott egy csontot. A csont a piros kerítéshez 2 méterrel, a zöld kerítéshez pedig 4 méterrel közelebb van, mint a házhoz. A piros kerítés 10 méter, a zöld kerítés 16 méter, a ház 12 méter hosszú. Szerkesszük meg a csont helyét! Ami a valóságban 4 méter az a rajzon 1 cm legyen!



Megoldás

A háromszög alakú udvar oldalainak hossza 10 m, 12 m és 16 m. A szöveg szerint ezt egy 2,5 cm, 3 cm és 4 cm oldalú háromszöggel kell szemléltetnünk.
Ezt a háromszöget megszerkesztjük!

Ha gondolatban a piros kerítést 2 méterrel (a rajzunkon 0,5 cm-rel), a zöld kerítést pedig 4 méterrel (a rajzunkon 1 cm-rel) kijjebb tennénk, akkor a csont mindhárom oldaltól egyenlő távolságra lenne. Vagyis a csont az elképzelt, megnagyobbított udvar beírt körének középpontjában van.
Az ábra alapján a szerkesztés kivitelezhető.
Mivel mindhárom szögfelező egy pontban metszi egymást, ezért már két szögfelező metszéspontja megadja a csont C-vel jelölt helyét.



FELADATOK

1. Melyik igaz, melyik hamis?

a) A szabályos háromszög beírt és köré írt körének középpontja egybeesik.

b) Van olyan háromszög, hogy a két nevezetes körének középpontja közül az egyik a háromszögön belül, a másik a háromszögön kívül van.

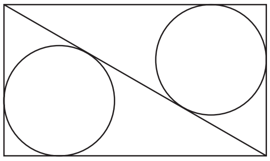
c) A tompaszögű háromszögek esetén mindkét kör középpontja a háromszögön kívül helyezkedik el.

d) Ha egy háromszög hegyesszögű, akkor mindkét kör középpontja a háromszögön belül található.

e) A háromszög beírt körének középpontja mindig a háromszög belsejében van.

2. Egy egyenlő szárú háromszög alapja 3 cm, a beírt körének sugara pedig 1 cm hosszú. Szerkeszd meg a háromszöget!

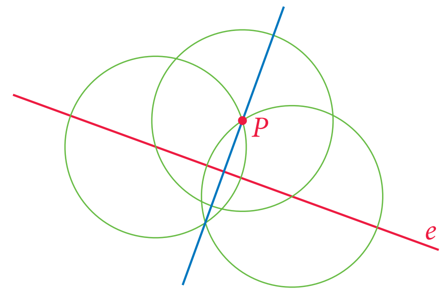
3. Szerkeszd meg a füzetedben ezt az ábrát! A téglalap rövid oldala 2,5 cm, az átlója 5 cm hosszúságú legyen!



Mekkorák a szögei azoknak a háromszögeknek, amelyeknek egyik oldala a téglalap valamelyik oldalával azonos, a harmadik csúcsa pedig az ezt az oldalt érintő kör középpontjában van?

4. Egy 20 cm oldalú, négyzet alakú szalvétát egy 2,5 cm-es zöld sáv határol. A négyzet narancssárga átlói által kialakított négy háromszögben egy-egy citromsárga körgyűrű látható, melyek a két átlót és a zöld sávot érintik. A körgyűrű szélessége 2,5 cm. Az elmondottak alapján szerkeszd meg a szalvéta mintáját egy 4 cm oldalú négyzetbe!

5. MAGASSÁGVONALAK A HÁROMSZÖGBEN



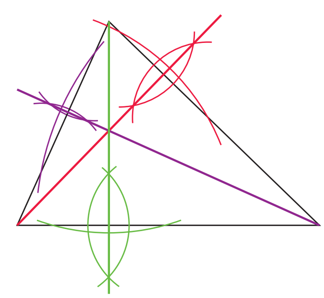
A háromszög magasságával már korábban, a terület meghatározásánál megismerkedtünk.
A háromszög magasságát úgy kapjuk, hogy az egyik csúcsából merőlegest állítunk a szemközti oldalegyenesre.
Az így kapott egyenes a **magasságvonal**, aminek a csúcs és az oldalegyenes között lévő darabja a **magasságszakasz** (röviden **magasság**).
Mielőtt megvizsgáljuk a három magasságvonal helyzetét, elevenítsük fel, hogy hogyan kell egy e egyenesre egy rá nem illeszkedő P pontból merőlegest szerkeszteni!

1. PÉLDA

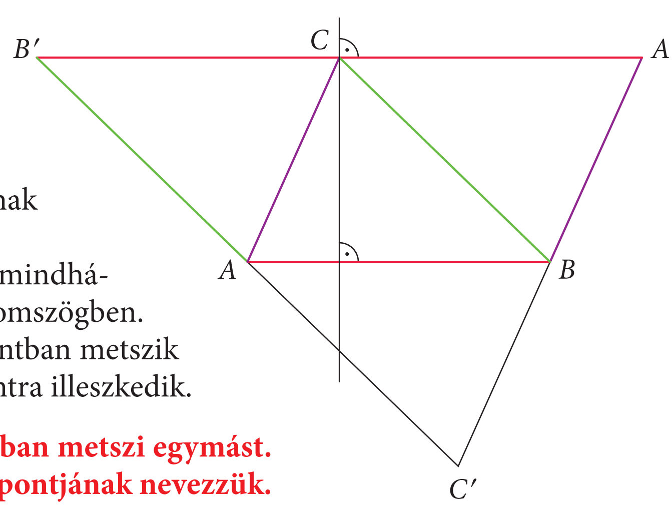
Szerkesszük meg a háromszög három magasságvonalát! Mi a sejtésünk az így kapott három egyenesről?

Megoldás

Mindhárom csúcsból merőlegest állítunk a szemközti oldalegyenesre.
Az ábránkon a három megszerkesztett egyenes egy pontban metszi egymást.
Lehetséges, hogy ez nem véletlen! Az a sejtésünk, hogy a háromszög három magasságvonala mindig egy pontban metszi egymást.



Az ABC háromszög mindhárom csúcsán át húzzunk párhuzamost a szemközti oldalegyenessel! E három egyenessel megkaptuk az $A'B'C'$ háromszöget. Mivel párhuzamosokat húztunk, ezért $ABCB'$ és $ABA'C$ paralelogramma. A paralelogrammák szemközti oldalai egyenlő hosszúak, ezért $AB = CA'$, valamint $AB = B'C$.
Ebből következik, hogy $CA' = B'C$, vagyis $A'B'$ oldalnak C a felezőpontja.
Az eddigiek alapján beláttuk, hogy az ABC háromszög C csúcsából induló magasságvonal egybeesik az $A'B'C'$ háromszög $A'B'$ oldalának felezőmerőlegesével.
Hasonlóan belátható, hogy az ABC háromszög mindhárom magassága felezőmerőleges az $A'B'C'$ háromszögben.
A felezőmerőlegesekről már tudjuk, hogy egy pontban metszik egymást, ezért a három magasságvonal is egy pontra illeszkedik.



A háromszög három magasságvonala egy pontban metszi egymást.
A közös metszéspontot a háromszög magasságpontjának nevezzük.

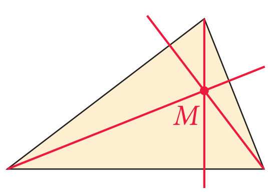
VI. 5. MAGASSÁGVONALAK A HÁROMSZÖGBEN

2. PÉLDA

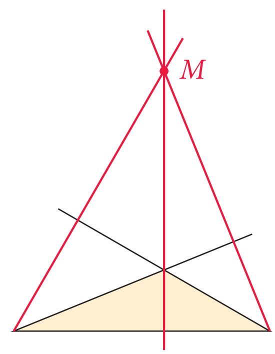
Vizsgáljuk meg, hogy hol található a háromszög magasságpontja hegyesszögű, tompaszögű és derékszögű háromszög esetén!

Megoldás

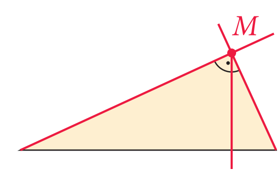
Hegyesszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszög belsejében van.



Tompaszögű háromszög esetén a magasságpont a háromszögön kívül található.

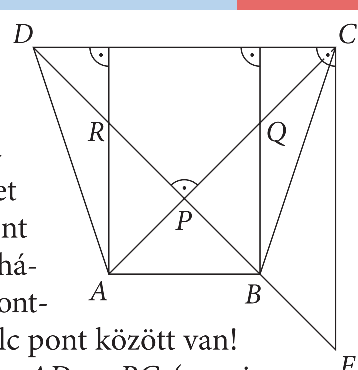


A derékszögű háromszögben a két befogó egyben magasság is, vagyis a derékszögű csúcs lesz a magasságpont.



FELADATOK

1. Adj meg az ábrán látható nyolc pont közül hármat, amely nem derékszögű háromszöget alkot, és a három pont által meghatározott háromszög magasságpontja is a megadott nyolc pont között van! Az $ABCD$ trapézban $AD = BC$ (vagyis húrtrapéz). Keress több megoldást!



2. Az ABC hegyesszögű háromszög magasságpontja M. Hol van az ABM, BCM és CAM háromszögek magasságpontja? Készíts ábrát a füzetedbe!

3. Mekkora szöget zár be egymással a háromszög 74°-os és 38°-os szögének csúcsából induló két magasságvonal?

4. Az ABC derékszögű háromszög 30°-os szögének szögfelezője D pontban metszi a derékszögű csúcsból induló magasságvonalat. Határozd meg az ADC háromszög szögeinek nagyságát!

5. Egy hegyesszögű háromszög egyik szöge 70°-os. Mekkora szöget zár be egymással a másik két csúcsából induló magasságvonal?

6. Melyik igaz, melyik hamis?

a) A magasságpont mindig a háromszög belsejében található.

b) A derékszögű háromszögeknek csak egy magasságuk van.

c) A háromszögek magasságpontja egyenlő távolságra van az oldalegyenesektől.

d) Minden háromszögnek van olyan magasságvonala, amelyik metszi a szemközti oldalszakaszt.

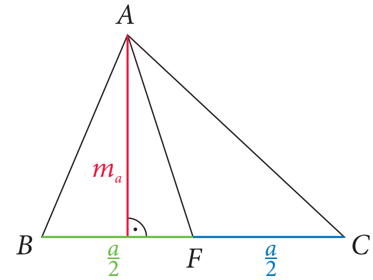
6. SÚLYVONALAK ÉS KÖZÉPVONALAK A HÁROMSZÖGBEN

Kössük össze a háromszög valamely csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával! Az így kapott egyenes a **háromszög súlyvonala.** A két pont által meghatározott szakaszt, illetve a szakasz hosszát is nevezhetjük súlyvonalnak.

1. PÉLDA

Mutassuk meg, hogy a súlyvonal felezi a háromszög területét!

Megoldás



A *BFA* és a *CFA* háromszögnek is m_a az *A* csúcsból induló magasságának a hossza, $\frac{a}{2}$ pedig az ezzel szemközti oldalának a hossza.

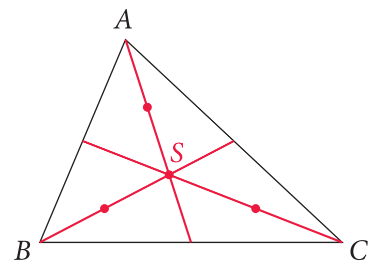
Vagyis a területük: $t_{BFA} = t_{CFA} = \frac{\frac{a}{2} \cdot m_a}{2} = \frac{a \cdot m_a}{4}$, ami valóban az eredeti háromszög területének a fele.

A fenti megállapítás a magyarázata annak, hogy ha például egy kartonból kivágott háromszöget egyensúlyozni szeretnénk, akkor a vonalzó élét a súlyvonalra illesztve tehetjük ezt meg.

2. PÉLDA

Szerkesszük meg a háromszög három súlyvonalát! Fogalmazzunk meg érdekességeket, sejtéseket a szerkesztett ábra alapján!

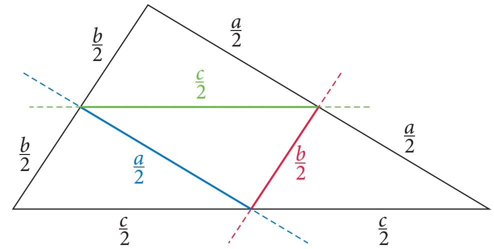
Megoldás



Az ábra azt mutatja, hogy a három súlyvonal egy pontban metszi egymást.
Méréssel ellenőrizhetjük, hogy ez a közös pont mindig a súlyvonalnak az oldalhoz közelebbi harmadolópontjában van.

Az előző példában tett észrevételeink bizonyításával a következő években fogunk foglalkozni.

Bizonyítható, hogy a háromszögek súlyvonalai egy pontban metszik egymást. Ezt a metszéspontot a háromszög súlypontjának nevezzük. A súlypont mindig a súlyvonalnak az oldalhoz közelebbi harmadolópontjában van.



A háromszög két oldalának felezőpontját összekötő egyenest a **háromszög középvonalának nevezzük.** Emellett a két felezőpont által meghatározott szakaszt, illetve a szakasznak a hosszát is nevezhetjük középvonalnak.

Bizonyítható, hogy a háromszög középvonala párhuzamos a vele szemközti oldallal, továbbá a hossza fele ennek az oldalhossznak.

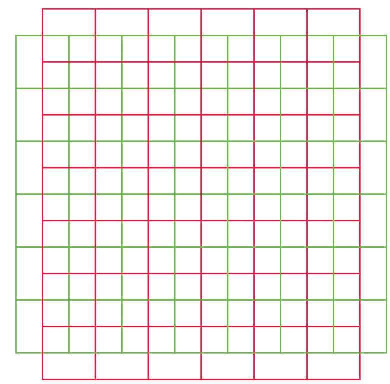
VI. 6. SÚLYVONALAK ÉS KÖZÉPVONALAK A HÁROMSZÖGBEN

Megismerkedtünk a háromszög öt nevezetes vonalával: oldalfelező merőlegesek, szögfelezők, magasságvonalak, súlyvonalak, középvonalak. Ezek mindegyike egyenes vonal. A következő játékban neked kell létrehoznod a „nyerő vonalat”, ami nem feltétlenül lesz egy egyenes!

JÁTÉK

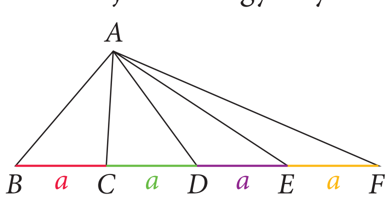
A játékot a mellékelt táblán ketten játszhatjátok. Elsőként érdemes lehet nagyobb méretben megrajzolni a táblát magatoknak. Az egyik játékos a piros, a másik a zöld rácsot használja!

A játékosok célja, hogy a saját rácsukon az egymással szemben fekvő, legtávolabbi oldal egy-egy tetszőleges rácspontját összekössék egy vonallal. A játékosok két szomszédos rácspont közé felváltva húznak egy-egy szakaszt, de mindenki csak a saját rácsára rajzolhat. (Érdemes két különböző színű ceruzát használni.) A már megrajzolt vonaldarabok bármikor összeköthetők a játék során, de az ellenfél vonaldarabjait nem szabad átvágni! A nyertes az lesz, akinek előbb sikerül megrajzolni a nyerő vonalat.



FELADATOK

1. *a)* Hány darab háromszöget látsz az ábrán?
b) Add meg azokat a háromszögeket, amelyekben berajzoltunk egy súlyvonalat!

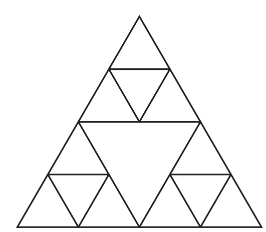


2. Az ABC háromszögben a CP, az APC háromszögben pedig az AQ a súlyvonal. Az APQ háromszög területe 503,75 cm². Mekkora az ABC háromszög területe?

3. Az ABC háromszögben S a súlypont. Tudjuk, hogy az ASB háromszög területe 45 cm². Mekkora az ABC háromszög területe?

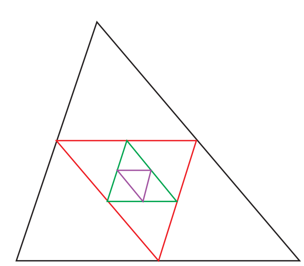
4. Egy háromszögbe berajzoltunk egy súlyvonalat, majd berajzoltuk azt a középvonalat is, amelyik az előbbi súlyvonalat metszi. Milyen négyszöget alkot az így berajzolt két szakasz négy végpontja?

5. Milyen hosszú vonallal rajzolható meg az ábra, ha a nagy szabályos háromszög oldalhossza 20 cm?

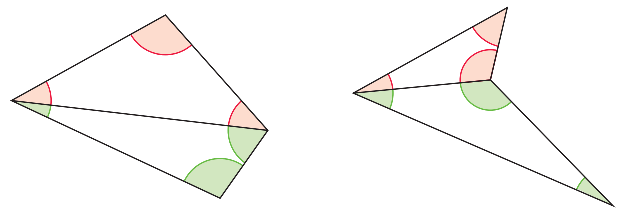


6. Az egyenlő szárú háromszög egyik szárával párhuzamos, 5 cm hosszúságú középvonal a háromszög kerületét egy 19 cm-es és egy 9 cm-es darabra vágja. Mekkorák a háromszög oldalai?

7. Az ábra úgy készült, hogy mindig a háromszög oldalainak a felezőpontjait kötöttük össze. Ha a legnagyobb háromszög kerülete 104 cm, akkor mekkora a legkisebb háromszög kerülete?



A konvex és a konkáv négyszögben is van olyan átló, amely a négyszöget két háromszögre vágja.
A két háromszög belső szögei lefedik a négyszög belső szögeit, és a négyszög belső szögei is lefedik a háromszög belső szögeit.
Mivel mindkét háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért **a négyszögek belső szögeinek összege 360°.**

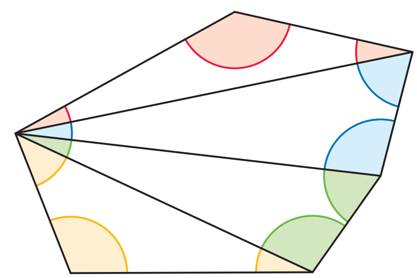


1. PÉLDA

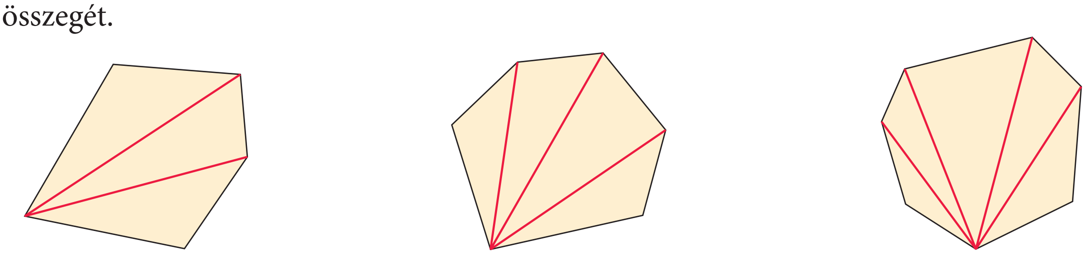
Határozzuk meg egy konvex hatszög belső szögeinek összegét!

Megoldás

A hatszög egy csúcsából induló átlói négy háromszögre vágják a hatszöget. A négyszögeknél is használt indoklással mondhatjuk, hogy a konvex hatszög belső szögeinek összege:
$4 \cdot 180° = 720°$.



Hasonlóan gondolkodhatunk minden konvex sokszög esetén, így mindig meghatározhatjuk a belső szögek összegét.



Ötszög: $3 \cdot 180° = 540°$. Hatszög: $4 \cdot 180° = 720°$. Hétszög: $5 \cdot 180° = 900°$.

A konvex sokszög belső szögeinek összegét úgy számítjuk ki, hogy a 180°-ot annyival szorozzuk, ahány háromszögre vágja a sokszöget az egy csúcsból húzott összes átló.

A sokszögnek ugyanannyi szöge és csúcsa van, mint ahány oldala. Minden sokszögben hárommal kevesebb átlót húzhatunk egy csúcsból, mint amennyi a csúcsok száma, mert a kiválasztott csúcsba és a két szomszédos csúcsba nem húzhatunk átlót.

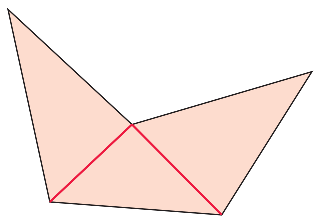
Az n oldalú sokszögben egy csúcsból $n – 3$ átló húzható. A háromszögnek nincs átlója.

A konvex sokszögeket az egy csúcsból induló átlói háromszögekre vágják. Ezek száma kettővel kevesebb, mint a sokszög oldalainak a száma. Az $n - 3$ átló mindegyike levág egy-egy háromszöget, és a végén még marad egy. Ez összesen $n - 3 + 1 = n - 2$.

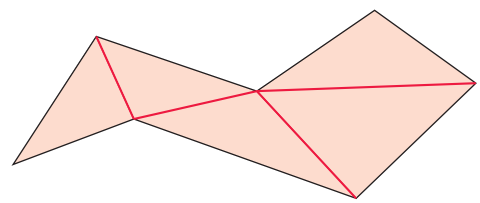
Ha a konvex sokszög csúcsainak száma n, akkor **az egy csúcsból induló átlói $n - 2$ darab háromszögre vágják.** Ez azt jelenti, hogy **a konvex sokszögek belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$.**

VI. 7. SOKSZÖGEK SZÖGEI ÉS ÁTLÓI

A konkáv sokszögeket is felvághatjuk háromszögekre, de nem feltétlenül egy csúcsból induló átlókkal. Bizonyítható, hogy az n oldalú sokszögeket átlók segítségével $n - 2$ darab háromszögre lehet vágni. Az ábrán látható két konkáv sokszög erre mutat egy-egy példát.



Ötszög: $3 \cdot 180° = 540°$.

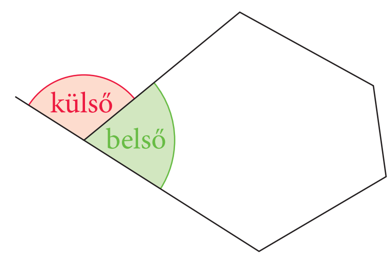


Hétszög: $5 \cdot 180° = 900°$.

Így belátható, hogy a konkáv sokszögek belső szögeinek összege is $(n - 2) \cdot 180°$.

Sokszögek esetén is beszélhetünk külső szögekről.

A konvex sokszög egy külső szöge a mellette fekvő belső szöggel együtt 180°-os.



2. PÉLDA

Határozzuk meg a konvex négyszögek külső szögeinek összegét!

Megoldás

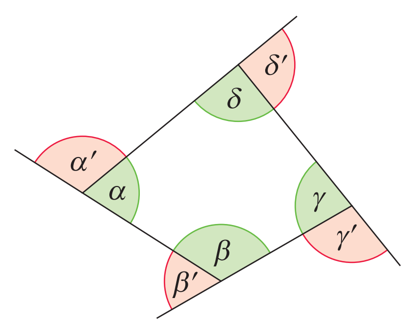
A rajz jelöléseit használva:

$\alpha + \alpha' = 180°$, $\beta + \beta' = 180°$, $\gamma + \gamma' = 180°$, $\delta + \delta' = 180°$.

Ezek összege: $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' + \delta + \delta' = 720°$.

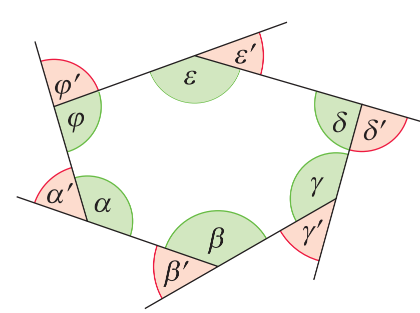
Vegyünk el mindkét oldalból 360°-ot, és használjuk fel, hogy a belső szögek összege 360°, azaz $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$!

Ekkor a külső szögek összegét kapjuk: $\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360°$.



A konvex négyszögek külső szögeinek összege 360°.

A háromszögek és a konvex négyszögek külső szögeinek összege is 360°. Az előző példában látott gondolatmenetet követve megmutatható lenne, hogy **minden konvex sokszögben 360° a külső szögek összege.**



3. PÉLDA

Hány átlója van a konvex nyolcszögnek? Számoljuk össze!

Megoldás

A nyolcszög egy csúcsából öt átlót húzhatunk. Ha minden csúcsnál összeadjuk az átlók számát, akkor $8 \cdot 5 = 40$ darabot kapunk. Ekkor azonban minden átlót mindkét végénél megszámoltuk, ezért a kapott szám felét kell vennünk.

A konvex nyolcszögnek tehát $\frac{8 \cdot 5}{2} = 20$ átlója van.

A példában látottak alapján bármely tetszőleges konvex sokszögben meghatározhatjuk az átlók számát.

Az *n* oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.

FELADATOK

1. Egy ötszög belső szögeinek nagysága: 112°, 99°, 113°25', 128°56'. Add meg a külső szögek nagyságát és összegét!

2. Egy négyszög egyik szöge 62°, a másik kétszer akkora, a harmadik és a negyedik szöge között pedig 10° az eltérés. Mekkorák a négyszög belső és külső szögei?

3. A következő kérdések konvex tizenkétszögre vonatkoznak.

a) Hány átló húzható egy csúcsból?

b) Hány háromszögre vágják az egy csúcsból húzható átlói?

c) Hány darab átlója van összesen?

d) Mennyi a belső szögeinek összege?

e) Mennyi a külső szögeinek összege?

4. Határozd meg az oldalak számát abban a konvex sokszögben, amelyben

a) egy csúcsból 17 átló húzható;

b) az egy csúcsból húzott átlók 100 darab háromszöget hoznak létre;

b) összesen 44 átló van;

c) a belső szögek összege 3240°;

e) a külső szögek összege 540°!

5. Készíts táblázatot, amelyben a szabályos sokszögek belső szögének nagysága szerepel! Táblázatodban a szabályos sokszögek oldalainak száma 3-tól 12-ig szerepeljen!

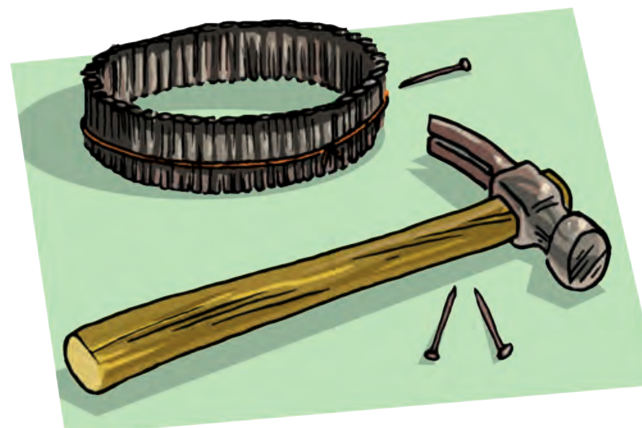
6. Hány oldalú az a konvex sokszög, amelyben a belső szögek összege hétszer akkora, mint a külső szögek összege?

Oktogon (Budapest)

Pentagon (Washington)

VI. 8. A KÖR KERÜLETE

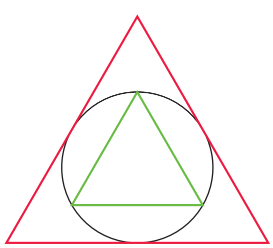
Ha egy sokszög kerületét kell meghatároznunk, akkor egyszerűen meg kell mérnünk az oldalak hosszát, majd e hosszak összeadásával meg tudjuk oldani a feladatot. A kör kerületének meghatározásánál ezt nem tehetjük meg, mivel nincsenek oldalai.
Szúrjunk egy körvonalra szögeket, és ezek mentén feszítsünk ki egy cérnaszálat!
Ha a szögeket elég sűrűn helyeztük el, akkor az így kifeszített cérnaszál hossza jól megközelíti a kör kerületét. Természetesen a kör kerületénél a cérna hossza valamennyivel mindig kisebb lesz.



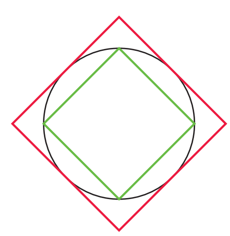
1. PÉLDA

Szerkesszünk egy 1 cm sugarú körbe szabályos háromszöget, négyzetet és szabályos hatszöget! Aztán szerkesszünk olyan szabályos háromszöget, négyzetet és szabályos hatszöget, amelyek oldalai érintik az 1 cm sugarú körvonalat! Határozzuk meg a sokszögek kerületét! Ha kell, akkor mérhetünk is!

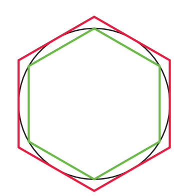
Megoldás



$k_3 \approx 3 \cdot 1{,}7 = 5{,}1$ cm
$K_3 \approx 3 \cdot 3{,}5 = 10{,}5$ cm



$k_4 \approx 4 \cdot 1{,}4 = 5{,}6$ cm
$K_4 = 4 \cdot 2 = 8$ cm



$k_6 \approx 6 \cdot 1 = 6$ cm
$K_6 \approx 6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$ cm

2. PÉLDA

Méréseinket felhasználva adjunk becslést az 1 cm sugarú kör k kerületére!

Megoldás

Az ábráink és méréseink alapján: $k_3 < k_4 < k_6 < k < K_6 < K_4 < K_3$.

A kör kerülete minden beírt sokszög kerületénél nagyobb és minden köré írt sokszög kerületénél kisebb. Minél több oldala van a vizsgált szabályos sokszögnek, annál pontosabban közelíti a kerülete a kör kerületét. Ha további méréseket és számításokat végeznénk, még pontosabban látnánk, hogy a kör kerülete egy kicsit nagyobb, mint az átmérő 3-szorosa. De mennyivel nagyobb?

8. A KÖR KERÜLETE

Jelöljük π-vel a kör kerületének és az átmérő hosszának arányát!

Számítógéppel már nagyon nagy pontossággal meghatározható a π értéke. A π tizedesjegyei nem ismétlődnek periodikusan, első néhány jegye a következő: $\pi \approx 3{,}14159265\ldots$

A kör kerülete: $K = d \cdot \pi = 2 \cdot r \cdot \pi$, ahol d a kör átmérőjének a hosszát, r a kör sugarának a hosszát jelöli.

További érdekességek a π-ről

A kör kerületének és átmérőjének arányát *Euler* 1739-ben tett javaslata alapján π-vel jelöljük. Ez a periféria (kerület) görög szó kezdőbetűje. A π-nek számos, elődeink által használt, közelítő értékét ismerjük.
Az egyiptomi *Rhind-papirusz* (Kr. e. 2000–1700) szerint a π-t $4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}$-nek, azaz megközelítőleg 3,16-nak vették. Mezopotámiában a 3 és a $\frac{25}{8}$ közelítés volt használatos, de a Bibliában is a 3 közelítő értékre tett utalást találunk (Királyok első könyve 7. rész, 23. vers). Találtak olyan indiai forrást, amelyek a π^2-et 10-nek vették. A kínai *Cu Csung-cse* 12 288 és 24 576 oldalú szabályos sokszögek segítségével a $3{,}1415926 < \pi < 3{,}1415927$ értéket kapta. Ez évszázadokon át a legjobb becslés volt. *Ludolph van Ceulen* (1540–1610) holland matematikus 35 tizedesjeggyel közelítette meg a π-*t.*
Napjaink modern eszközeivel a π-nek már több mint 8 billiárd jegyét meghatározták! A világhálón további érdekességeket is találhatsz a témával kapcsolatban.

FELADATOK

1. Mekkora a kör kerülete, ha a sugara
a) 3 mm; *b)* 15 cm; *c)* 0,6 dm; *d)* 1,25 m?

2. Mennyit fordul egy 60 cm átmérőjű kerék egy 120 m-es úton?

3. Ha a Föld sugarát 6370 km-nek vesszük, akkor milyen hosszú az Egyenlítő?

4. Egy 24 méter sugarú, kör alakú parkban ketten sétálnak egymás mellett. Az egyik sétáló a 24 méter sugarú, kör alakú járda külső szélén halad, a másik tőle 1 méterrel beljebb. Mennyivel ment többet a külső köríven haladó ember egy teljes kör megtétele alatt? Számolás előtt tippelj!

5. Budapesten, az Erzsébet téren látható óriáskerékről azt olvashattuk, hogy 65 méter magas. Mekkora utat tesz meg az óriáskerék utasa egy fordulat alatt?

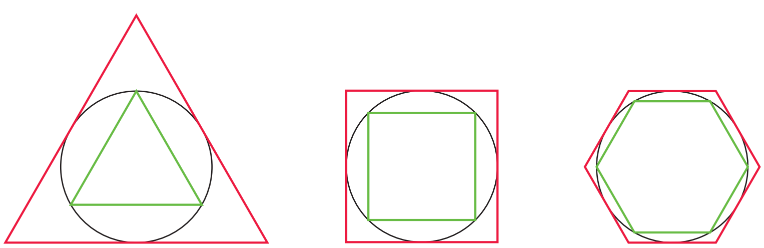
A KÖR TERÜLETE

Korábban már láttuk, hogy a sokszögek területét meg tudjuk határozni háromszögekre vágás segítségével. Megmérjük a háromszög ehhez szükséges szakaszainak hosszát, majd kiszámítjuk a területüket. E mérőszámok összege adja a sokszög területét. A körlap nem vágható háromszögekre, ezért más utat kell keresnünk a kör területének meghatározásához.

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok párokban!
Rajzoljatok egy 10 egység sugarú kört egy négyzethálóra! Számoljátok össze a körlap belsejében található egész négyzetek számát! Adjátok hozzá a nem egész négyzeteket is! Természetesen ezeknél csak becsléssel dolgozhattok. Érdemes olyan töredékeket keresnetek, amelyek együtt közel egy négyzetet tesznek ki. Célszerű-e az összeszámlálásnál az egész körlapot figyelnetek? Szerintetek mekkora a rajzolt kör területe? Egyeztessétek, hogy a többi pár milyen eredményre jutott!

Közelíthetnénk a kör területét is a beírt és a köré írt szabályos sokszögek területével. Használjuk azokat az ábrákat, amelyeket a kör kerületének közelítésénél rajzoltunk! A körök sugara most is 1 cm legyen!



$t_3 \approx 1{,}299\ \text{cm}^2$
$T_3 \approx 5{,}196\ \text{cm}^2$

$t_4 = 2\ \text{cm}^2$
$T_4 = 4\ \text{cm}^2$

$t_6 = 2{,}598\ \text{cm}^2$
$T_6 \approx 3{,}464\ \text{cm}^2$

A megfelelő sokszögek területe felsőbb matematikai módszerekkel meghatározható. Most csak az eredményeket közöltük.

A kör területe minden beírt sokszög területénél nagyobb és minden köré írt sokszög területénél kisebb. Minél több oldala van a vizsgált szabályos sokszögnek, a területe annál pontosabban közelíti a kör területét. Az ábráink és a számításaink alapján: $t_3 < t_4 < t_6 < t < T_6 < T_4 < T_3$.

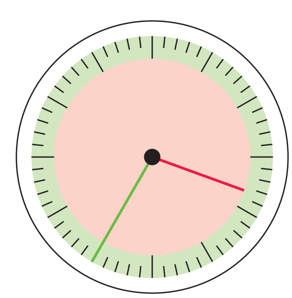
A további mérések, számítások azt mutatják, hogy a kör területének és a sugár négyzetének aránya – a kerületnél tapasztalt módon – 3-nál egy kicsit nagyobb szám. A négyzetrácson tett becslésünk alapján a 10 cm sugarú kör területe közel van a 314 cm²-hez, ami körülbelül a π százszorosa.

A kör területe a sugár négyzetének π-szerese, azaz: $T = r^2 \cdot \pi$.

1. PÉLDA

Egy falióra nagymutatója 8 cm, a kismutatója 6,2 cm hosszú. Mennyivel nagyobb területet söpör végig a nagymutató, mint a kismutató, ha mindkettőnél egy fordulatot figyelünk?

Megoldás

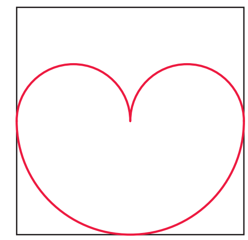


A nagymutatóhoz tartozó kör területe:
$t_1 = 8^2 \cdot \pi = 64\pi\ (\text{cm}^2)$.
A kismutatóhoz tartozó kör területe:
$t_2 = 6{,}2^2 \cdot \pi = 38{,}44\pi\ (\text{cm}^2)$.
A két terület eltérése:
$t_1 - t_2 = 64\pi - 38{,}44\pi =$
$= 25{,}56\pi \approx 80{,}3\ (\text{cm}^2)$.

9. A KÖR TERÜLETE

2. PÉLDA

Négyzet alakú kartonlapokból az ábrán látható mintát kell kivágni. A minta egy nagy félkörből és két egybevágó kisebb félkörből áll. A négyzetlapok hány százaléka lesz hulladék?



Megoldás

Legyen a kis félkörök sugara r! A két félkör területének összege: $t_1 = r^2\pi$.

A nagy félkör sugara $2r$. Területe: $t_2 = \frac{(2r)^2\pi}{2} = \frac{4r^2\pi}{2} = 2r^2\pi$.

A minta területe: $t = t_1 + t_2 = r^2\pi + 2r^2\pi = 3r^2\pi$.

A négyzet oldalhossza $4r$, ezért a területe: $T = (4r)^2 = 16r^2$.

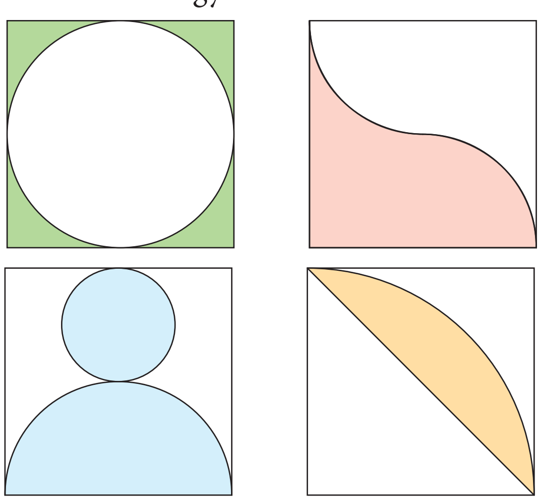
A hulladék és a négyzet területének aránya: $\frac{T-t}{T} = \frac{16r^2 - 3r^2\pi}{16r^2} = \frac{16-3\pi}{16} \approx 0,411$.

Vagyis a négyzetlapok kb. 41,1%-a lesz hulladék.

FELADATOK

1. Mekkora a kör területe, ha a sugara
a) 5 mm; *b)* 18 cm; *c)* 0,4 dm; *d)* 2,75 m?

2. Számítsd ki az ábrákon színessel jelölt területeket! A négyzetek oldalhossza 4 cm.



3. Mekkora területet fednek a 20, 24, 30 és 36 cm átmérőjű fedők?

π versek

A π tizedesjegyeit nem könnyű megjegyezni. Léteznek azonban olyan emlékezést segítő versek, mondatok, amelyek szavai annyi betűt tartalmaznak, mint sorban a π számjegyei. Példaként álljon itt Hajós György professzor 1952-ből származó π verse, amely 30 tizedesjegyet ad meg:

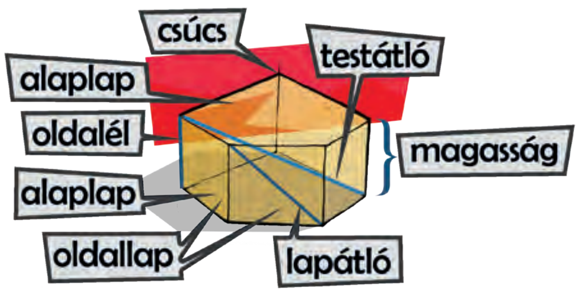
Bír-e, érez-e ember nyugalmat,
Ha lelkét nehéz bús emlék zaklatja.
Szüntelen felhőbe burkolózó idő az,
Ami változni ámha akarna se tudhat,
Mert azt nem írhatja már le halandó kívánsága.

Készíts te is hasonló mondatot! Keress további π verseket a világhálón!

4. Egy 28 cm átmérőjű körből a lehető legnagyobb négyzetlapot vágtuk ki. A körlap hány százaléka lett hulladék?

5. Képzelj el egy 1 km sugarú kört! Hány százalékot veszít a területéből, ha sugarát 1 m-rel csökkented? Számolás előtt tippelj!

VI. 10. A HASÁB FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA



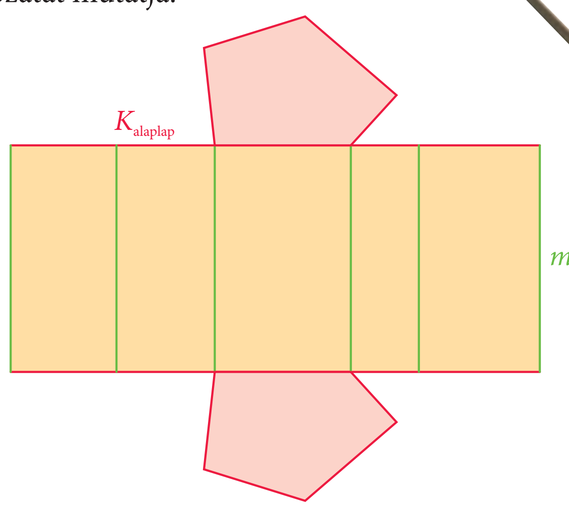
A képen látható dobozok, tárgyak közös jellemzője, hogy két egybevágó, párhuzamos sokszöglap és téglalapok határolják. Az ilyen testek neve **hasáb**.
A két egybevágó sokszög az **alaplap**, a téglalapok az **oldallapok**, az alaplapok távolsága pedig a **hasáb magassága**. A nem szomszédos csúcsokat összekötő szakaszok a hasáb átlói: **lapátlók** – amelyek egy lap síkjában vannak – és **testátlók**.

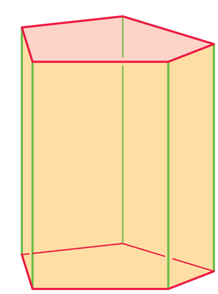
A téglatest téglalap alapú, a kocka és a négyzetes oszlop pedig négyzet alapú hasáb.

A hasáb felszínét a határoló sokszöglapok területének összege adja.

Az ábra egy ötszög alapú hasáb hálózatát mutatja.
Az oldallapok együtt egy nagy téglalapot alkotnak. Ez a hasáb **palástja**. A kiterített palást egyik oldala egyenlő a hasáb alaplapjának kerületével, a másik oldala pedig a hasáb magasságával.
A hasáb felszínére tett megállapításainkat röviden így írhatjuk le:

$$A = 2 \cdot T_{alaplap} + T_{palást} =$$
$$= 2 \cdot T_{alaplap} + K_{alaplap} \cdot m.$$





1. PÉLDA

A hobbiboltban festhető dobozokat lehet vásárolni. Flóra mind a négy barátnőjének és magának is vett egyet-egyet. A termék ismertetője szerint a csillag alakú díszdoboz alapterülete 40 cm², magassága pedig 5 cm. Méréssel az is kiderült, hogy a csillag alakú alaplap mindegyik oldala 3 cm-es. Hány cm² felületet kell Flórának befesteni?

Megoldás

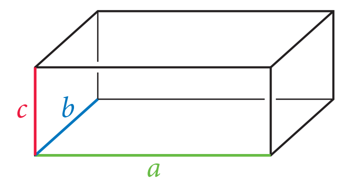
A termék ismertetője szerint a doboz alaplapjának területe: $T_{alaplap} = 40$ cm², a magassága: $m = 5$ cm.

A mérés felhasználásával az alaplap kerülete: $K_{alaplap} = 10 \cdot 3 = 30$ (cm).

A hasáb felszínképlete alapján: $A = 2 \cdot T_{alaplap} + K_{alaplap} \cdot m = 2 \cdot 40 + 30 \cdot 5 = 230$ (cm²).

Vagyis öt ilyen doboz felülete $5 \cdot 230$ (cm²) = 1150 (cm²).

Ha a hasáb alakú dobozokat, edényeket tárolásra használjuk, akkor szükségünk van a térfogatuk meghatározására is.
A téglatest térfogatát már ismerjük: $V = abc$.
A téglatest olyan hasáb, amelynek az alaplapja egy téglalap.
Alaplapjának területe: $T_{alaplap} = ab$, a hasáb magassága pedig $m = c$.
Vagyis a téglatest térfogata: $V = T_{alaplap} \cdot m$.
Igazolható, hogy minden **hasáb térfogata: $V = T_{alaplap} \cdot m$.**
Ennek bizonyításától mi most eltekintünk.



2. PÉLDA

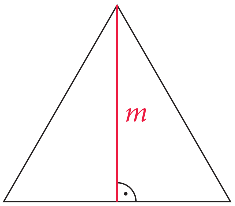
Mekkora a képen látható szabályos hatszög alapú dobozok térfogata, ha az alapélük hossza 3 cm, a magasságuk pedig 1,5 cm?

Megoldás

A hasáb térfogatképletében szerepel az alaplap területe. Először ezt kell meghatároznunk! A hatszöget hat egybevágó szabályos háromszögre vághatjuk, ezért a feladatunk egy 3 cm oldalú szabályos háromszög területének a meghatározása. A háromszög területének megállapításához szükségünk van a háromszög magasságára is, amit jelenleg még csak méréssel tudunk meghatározni. Szerkesszük meg a háromszöget és mérjük meg a magasságát!
A mérés eredménye: 2,6 cm.

Ezek alapján a hatszög területe: $T_{alaplap} = 6 \cdot \frac{3 \cdot 2{,}6}{2} = 23{,}4\ (\text{cm}^2)$.

A doboz térfogata: $V = T_{alaplap} \cdot m = 23{,}4 \cdot 1{,}5 = 35{,}1\ (\text{cm}^3)$.



3. PÉLDA

Egy szabályos hatszög alapú pohár alapéle 3 cm. (Az adat a pohár belső részére vonatkozik.) Hogyan lehetne egy arany pecsétgyűrű térfogatát meghatározni?

Megoldás

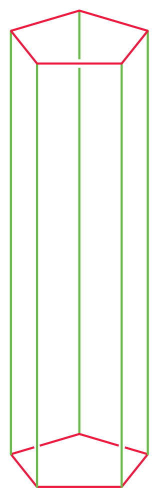
Öntsünk a pohárba annyi vizet, hogy ha majd beletesszük a gyűrűt, akkor a víz teljesen ellepje. Az előző példa alapján már tudjuk, hogy a pohár alapterülete 23,4 cm². Mérjük meg, mennyivel emelkedik a vízszint, ha beletesszük a gyűrűt! Jelöljük ezt h-val! A gyűrű térfogata a h magasságú, 23,4 cm² alapterületű hasáb térfogatával lesz egyenlő: $V_{gyűrű} = 23{,}4 \cdot h\ (\text{cm}^3)$.

VI. 10. A HASÁB FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA

FELADATOK

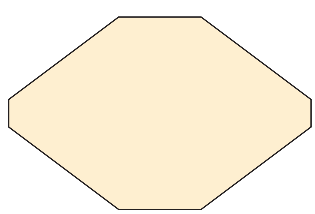
1. Rendezd táblázatba a hasábok csúcsainak, éleinek, lapjainak számát! A hasábok alaplapjai legyenek háromszögek, négyszögek, …, nyolcszögek!

2. Az ábra a szabályos ötszög alapú hasáb élvázát szemlélteti. Határozd meg, összesen hányszor hosszabbak a zöld élek, mint a pirosak, ha a test magassága az alapél hosszának ötszörösével egyenlő!

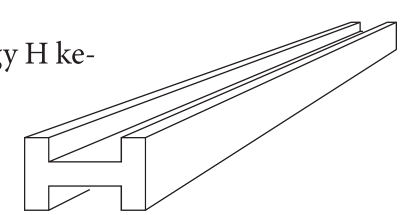


3. Egy hasáb alaplapjának a területe 30 cm^2, kerülete 22 cm. A hasáb magassága 24 cm. Számítsd ki a hasáb felszínét és térfogatát!

4. A rajz egy 12 cm magas hasáb alaplapjának vázlatát mutatja. Ezt a nyolcszöget egy 11 cm-szer 7 cm-es téglalapból négy egybevágó derékszögű háromszög levágásával kaptuk. A nyolcszög oldalai 1 cm, 5 cm és 3 cm hosszúak. Mekkora a hasáb felszíne és térfogata?



5. Az ábrán egy H keresztmetszetű 2 méteres vasrudat látsz. A rúd alapja 3 db $3 \cdot 1$ cm-es téglalapból áll. Mennyi festékre lesz szükség a rúd befestéséhez, ha a festék használati utasítása szerint 1 m^2 lefestéséhez 200 gramm szükséges?

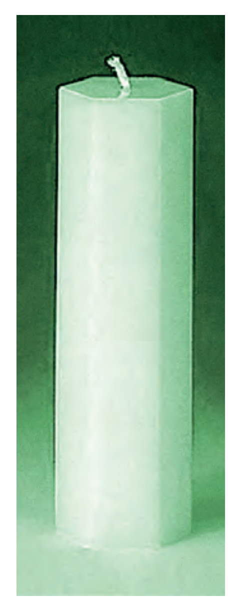


6. Egy meghámozott krumpli térfogata 0,4 dm^3. Az aprítógép 35 db 1 cm-szer 1 cm-szer 6 cm-es hasábot vág ki belőle. A krumpli többi részéből püré készül. A burgonya hány százalékából lesz püré?

7. A gyertyaöntő mester egyedi gyertyákat is készít.

a) Hány cm^3 viaszt használ 34 darab 20 cm magas, hasáb alakú gyertyához, ha ezek alaplapja egy 18 cm^2 területű szabályos hatszög?

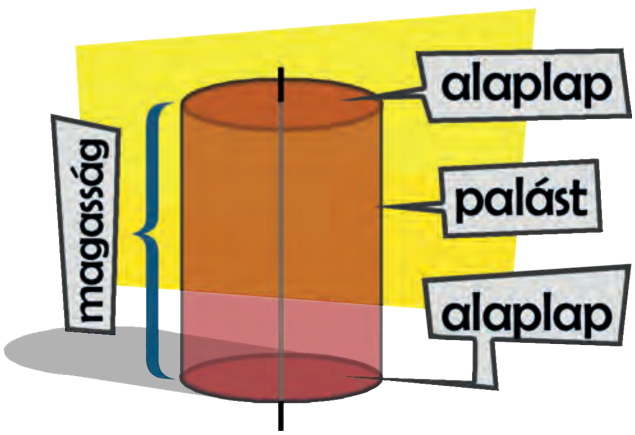
b) Hogyan változna a gyertyaöntéshez felhasznált anyagmennyiség, ha az alaplapot az előző megrendelés adatai alapján, de a hatszög minden második csúcsát összekötve határoznánk meg?

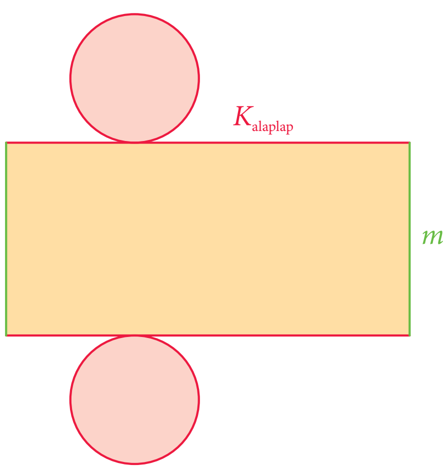


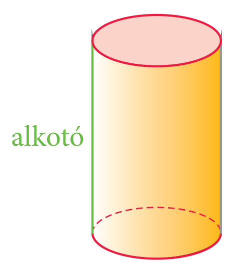
8. Egy vízlevezető árok keresztmetszete olyan trapéz, amelynek az egyik párhuzamos oldala 80 cm, a másik 160 cm, a magassága pedig 60 cm. Hány hektoliter víz fér el benne, ha a hossza 850 méter?

11. A HENGER FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA

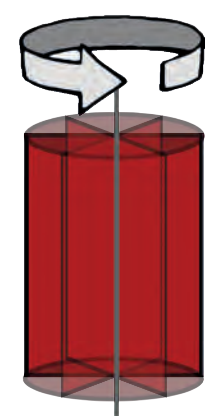
A képen látható tárgyak közös jellemzője, hogy két egybevágó, párhuzamos körlap és egy görbült lap határolja mindegyiket. Az ilyen testek neve **henger.**







A két egybevágó kör az **alaplap**, az alaplapok távolsága a **henger magassága.**
A henger felszínét nem csak síklapok határolják, ezért a felszínét kiterített állapotban tudjuk meghatározni.
A henger oldala kiterítve egy téglalapot alkot. Ez a henger **palástja**. E téglalap egyik oldala a henger alapkörének kerületével, másik oldala pedig a henger magasságával egyenlő. A henger palástját a kiterítés előtt egy magasság mentén vágjuk szét. Ezt a magasságot **alkotó**nak is nevezzük.



Ha egy téglalapot az egyik szimmetriatengelye körül megforgatunk, akkor a téglalap egy hengert ír le a térben. A tengellyel párhuzamos oldal alkotja forgás közben a henger palástját. Innen ered az **alkotó** elnevezés.

A henger alapkörének sugara legyen r. Ezt a **henger sugará**nak is nevezzük.
Tudjuk, hogy $T_{alaplap} = r^2\pi$, $K_{alaplap} = 2r\pi$.

A henger felszíne: $A = 2 \cdot T_{alaplap} + T_{palást} = 2 \cdot T_{alaplap} + K_{alaplap} \cdot m.$

Felhasználva a $T_{alaplap}$ és a $K_{alaplap}$ képletét, a henger felszínére kapjuk, hogy:

$A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot m.$

A kapott képletet kiemeléssel a következő alakra is hozhatjuk: $A = 2r\pi(r + m)$.

A HENGER FELSZÍNE ÉS TÉRFOGATA

1. PÉLDA

Szeretnénk papírból egy 3 cm sugarú és 5 cm magasságú hengert készíteni. Az összeállításához ragasztószalagot fogunk használni. Mekkora területű papír szükséges a henger elkészítéséhez?

Megoldás

Ahhoz, hogy a felhasználandó papír területét megkapjuk, a henger felszínét kell kiszámítanunk: $A = 2r\pi(r + m) = 2 \cdot 3 \cdot \pi(3 + 5) = 48 \cdot \pi \approx 150{,}8$ (cm^2).

A mindennapokban szükségünk van a henger alakú edények, dobozok térfogatára is.

Igazolható, hogy a hasáboknál használt képlet a hengerekre is igaz, vagyis **a hengerek térfogata:**

$$V = T_{\text{alaplap}} \cdot m.$$

Mivel $T_{\text{alaplap}} = r^2\pi$, ezért a **henger térfogatképlete:**

$$V = r^2\pi \cdot m.$$

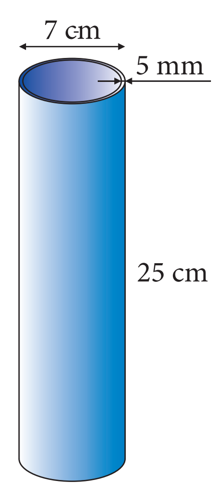
A képlet igazolásától most is eltekintünk.

2. PÉLDA

Egy henger alakú üvegváza 25 cm magas, a sugara a külső falig 3,5 cm. Az üveg vastagsága mindenütt 5 mm. Tudjuk, hogy 1 cm^3 üveg 2,6 gramm.

a) Hány liter víz fér a vázába?

b) Mekkora a váza tömege?



Megoldás

a) Mivel a váza vastagsága mindenütt 0,5 cm, ezért a belső, henger alakú üres rész magassága 24,5 cm, a sugara pedig 3 cm. A váza belső térfogata így:

$V_1 = 3^2 \cdot \pi \cdot 24{,}5 \approx 692{,}72$ (cm^3).

Mivel 1000 cm^3 = 1 liter, ezért a vázába kb. 0,69 liter vizet lehet tölteni.

b) Számoljuk ki a váza térfogatát úgy, mintha belül nem lenne üres!

$V_2 = 3{,}5^2 \cdot \pi \cdot 25 \approx 962{,}11$ (cm^3).

Az üveg térfogata: $V = V_2 - V_1 = 962{,}11 - 692{,}72 = 269{,}39$ (cm^3).
A váza tömege: $269{,}39 \cdot 2{,}6 \approx 700$ (g).
Tehát a váza kb. 0,7 kg-os.

FELADATOK

1. Számítsd ki a henger felszínét és térfogatát, ha
a) $r = 2{,}5$ cm, $m = 4$ cm;
b) $r = 7$ cm, $m = 4{,}2$ cm!

2. Egy 12 cm-szer 5 cm-es téglalapot mindkét szimmetriatengelye mentén megforgatva két hengert kapunk. Tippeld meg, hogy melyik hengernek lesz nagyobb a felszíne, térfogata! Ellenőrizd számolással tippjeidet!

3. Egy henger alakú konzervdoboz átmérője 8 cm, magassága 12 cm.

a) Milyen méretű és mekkora területű címke tervezhető a palástjára?
b) Mekkora a doboz űrtartalma?

4. Julcsi szereti, ha a hulladékot újrahasznosíthatja, ezért kitalálta, hogy az üres csemegekukoricás konzervdobozokból ajándék ceruzatartókat készít. A dobozok palástját saját tervezésű mintákkal fogja díszíteni, de előtte az egészet lealapozza egy színnel. A dobozok átmérője és magassága is 8 cm. Mekkora felületet kell Julcsinak alapozni, ha 12 ceruzatartót szeretne készíteni?

5. Egy 22 cm hosszú cső belső átmérője 4 cm, külső átmérője pedig 6 cm. Mennyit emelkedne a vízszint, ha ezt a csövet egy 55 cm-szer 38 cm-es alapterületű akváriumba tennénk? (Az akváriumban lévő víz teljesen ellepné a csövet.)

6. A szoba kifestéséhez festőhengert használunk. Legkevesebb hányszor fog fordulni a henger egy 4 méterszer 3 méteres falfelületen, ha a henger sugara 4 cm, a szélessége pedig 20 cm?

ÖSSZEFOGLALÁS

Húsz pontban összefoglaljuk a fejezet legfontosabb tudnivalóit:

1. A háromszög bármely két oldalhosszának összege nagyobb, mint a harmadik oldal hossza.
2. A háromszög belső szögeinek összege 180°, külső szögeinek összege pedig 360°.
3. A háromszög egy-egy külső szöge akkora, mint a vele nem szomszédos két belső szög összege.
4. Ha egy háromszögben két oldal hossza egyenlő, akkor a velük szemközti szögek is egyenlők. Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor az ezekkel szemközti oldalak hossza is egyenlő.
5. Bármely háromszögben két oldal közül a hosszabb oldallal szemben nagyobb szög van. Bármely háromszögben két szög közül a nagyobb szöggel szemben hosszabb oldal van.
6. A háromszög három oldalának felezőmerőlegese egy pontban, a háromszög köré írt körének középpontjában metszi egymást.
7. A háromszög három szögfelezője egy pontban, a háromszög beírt körének középpontjában metszi egymást.
8. A háromszög három magasságvonala egy pontban, a magasságpontban metszi egymást.
9. A háromszög súlyvonalai egy pontban, a súlypontban metszik egymást. A súlypont mindig a súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontjában van.
10. A háromszög középvonala párhuzamos a vele szemközti oldallal, hossza pedig fele ennek az oldalhossznak.
11. Az n oldalú sokszögben egy csúcsból $n - 3$ átló húzható.
12. Az n oldalú konvex sokszögben az egy csúcsból induló átlók $n - 2$ darab háromszöget hoznak létre.
13. A konvex sokszögek belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180°$.
14. Minden konvex sokszögben a külső szögek összege 360°.
15. Az n oldalú konvex sokszög átlóinak száma: $\frac{n(n-3)}{2}$.
16. A kör kerülete: $K = 2 \cdot r \cdot \pi$, területe pedig: $T = r^2 \cdot \pi$.
17. A hasáb felszíne: $A = 2 \cdot T_{alaplap} + K_{alaplap} \cdot m$.
18. A hasáb térfogata: $V = T_{alaplap} \cdot m$.
19. A henger felszínképlete: $A = 2 \cdot r^2\pi + 2r\pi \cdot m = 2r\pi(r + m)$.
20. A henger térfogatképlete: $V = r^2\pi m$

FELADATOK

Az első 16 feladatnál pontosan egy helyes választ adtunk meg. Keresd meg a megfelelőt!

1. Egy háromszög egyik oldalának hossza 13,2 cm, egy másiké pedig 16,8 cm. Melyik nem lehet a harmadik oldal hossza a megadottak közül?
(A) 290 mm; (B) 2,1 dm; (C) 36 mm; (D) 13,2 cm; (E) 16,8 cm.

2. Hány oldalú az a sokszög, amelyben a külső szögek összege egyenlő a belső szögek összegével?
(A) 3; (B) 4; (C) 5; (D) 6; (E) 8.

3. Felsoroltunk néhányat egy háromszög belső és külső szögei közül. Melyik a kakukktojás?
(A) 30°; (B) 80°; (C) 90°; (D) 120°; (E) 150°.

4. Ha egy háromszögben az egyik belső szög 42°, az egyik külső szög pedig 111°, akkor a háromszög
(A) derékszögű;
(B) egyenlő szárú;
(C) tompaszögű;
(D) nem létezik;
(E) szabályos.

5. Egy egyenlő szárú (nem szabályos) háromszögbe berajzoltuk az öt nevezetes vonal mindegyikét. Hány egyenest rajzoltunk?
(A) 12; (B) 13; (C) 14; (D) 15; (E) Az előzőek egyike sem.

6. Melyik állítás igaz az egyenlő szárú (nem szabályos) háromszög alapjának egyik csúcsából induló súlyvonalra, szögfelezőre és magasságra?
(A) Egyik sem felezi a háromszög területét.
(B) Egyik sem merőleges a szemközti oldalegyenesre.
(C) Közülük mindig a szögfelező a legrövidebb.
(D) Közülük mindig a súlyvonal a legrövidebb.
(E) Közülük mindig a magasság a legrövidebb.

7. Ha egy háromszög három középvonalának hossza 33 cm, akkor a háromszög kerülete
(A) 16,5 cm; (B) 33 cm; (C) 66 cm; (D) 99 cm; (E) 132 cm.

8. Hány oldalú az a sokszög, amelyben egy csúcsból összesen 1000 átló húzható?
(A) 997; (B) 998; (C) 1001; (D) 1002; (E) 1003.

9. Hány oldalú az a sokszög, amelyben a belső szögek összege 2340°?
(A) 11; (B) 12; (C) 13; (D) 14; (E) 15.

10. Hány átlója van a 20 oldalú konvex sokszögnek?

(A) 170; (B) 180; (C) 200; (D) 220; (E) 230.

11. Hány oldalú az a sokszög, amelynek összesen 44 átlója van?

(A) 924; (B) 902; (C) 12; (D) 11; (E) Az előzőek egyike sem.

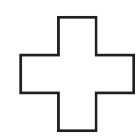
12. Két kör kerületének összege 6π. Mennyi a két sugár hosszának összege?

(A) 3; (B) 5; (C) 6; (D) π; (E) Nem adható meg egyértelműen.

13. Az egyik kör sugarának hossza *r*, a másik kör sugarának hossza *R*. Tudjuk, továbbá hogy $r^2 + R^2 = \frac{109}{16}$. Mekkora a két kör területének az összege?

(A) Ilyen körök nincsenek.
(B) Nem adható meg egyértelműen.
(C) 6,8125.
(D) $6{,}8125\pi$.
(E) $\frac{327}{16}$.

14. Az ábrán egy 31 dm magas oszlop keresztmetszete látható. Az alaplap minden éle egyenlő hosszúságú, és deciméterben mérve egész szám. Melyik lehet a megadott értékek közül az oszlop térfogata?



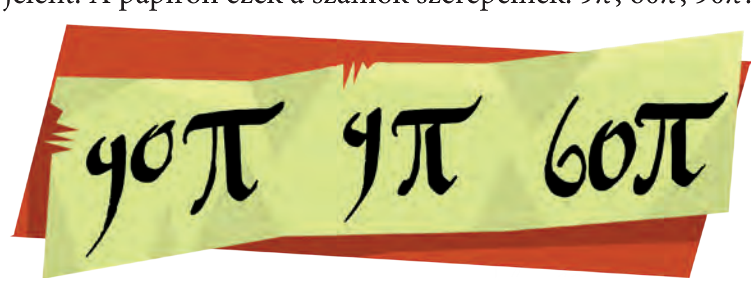
(A) 150 dm^3; (B) 620 dm^3; (C) 279 dm^3; (D) 124 dm^3; (E) 2790 dm^3.

15. Egy hasáb alaplapja 16 cm kerületű és 12 cm^2 területű. Mekkora a magassága, ha a felszíne 248 cm^2?

(A) 14 cm; (B) 18 cm; (C) 14,75 cm; (D) 15,5 cm; (E) $\frac{58}{3}$ cm.

16. Felírtuk egy henger alapkörének területét, palástjának területét és a térfogatát egy papírra, de elfelejtettük, hogy melyik szám mit jelent. A papíron ezek a számok szerepelnek: 9π, 60π, 90π. A megadottak közül melyik lehet jó?

(A) $r = 3$, $m = 30$;
(B) $r = 3$, $m = 20$;
(C) $r = 9$, $m = 6$;
(D) $r = 3$, $m = 10$;
(E) $r = 9$, $m = 10$.



17. Egy háromszögnek van egy 18 cm-es és egy 12 cm-es oldala. Milyen határok között változhat a harmadik oldal hossza?

18. Mekkora lehet egy háromszög:
a) belső szöge; *b)* külső szöge?

19. Egy háromszögnek van 19°-os és 61°-os belső szöge. Mekkora a harmadik csúcsnál található külső szöge?

20. Egyenlő szárú háromszögnek az egyik szöge
a) 72°-os; *b)* 92°-os.
Mekkorák a hiányzó szögek?

21. Egy egyenlő szárú derékszögű háromszögnek az egyik oldala 5 cm hosszúságú. Rajzold le a háromszöget!

22. Rakd növekedő sorrendbe a háromszög oldalhosszait, ha a szögei:
a) $\alpha = 43°$, $\beta = 98°$; *b)* $\alpha = 103°$, $\beta = 23°$!

23. Rakd növekedő sorrendbe a háromszög szögeit, ha az oldalhosszai:
a) $a = 15$ cm, $b = 20$ cm, $c = 14$ cm; *b)* $a = 28$ cm, $b = 18$ cm, $c = 25$ cm!

24. Lehetséges-e, hogy a háromszög beírt, köré írt körének középpontja és a magasságpontja egybeesik?

25. Egy nyomtatott A betű szárai 12 cm hosszúságúak. A szárak felezőpontjait egy 4 cm hosszúságú szakasz köti össze. Milyen széles ez a betű?

26. Egy kettes létra szárai 180 cm-esek. A létrát 120 cm szélesre kinyitottuk. A szárak felezőpontjait összekötő lánc ekkor teljesen kifeszül. Milyen hosszú ez a lánc?

27. Rajzolj egy szabályos hatszöget! Rajzold meg az összes átlóját! Készíts leltárt, hogy a különböző hosszúságú átlókból hány darab van!

28. Egy konvex sokszögnek 1001 oldala van.
a) Hány átló húzható egy csúcsából?
b) Hány háromszögre vágja az egy csúcsból húzott összes átló?
c) Mekkora a belső szögeinek az összege?
d) Mekkora a külső szögeinek az összege?
e) Hány átlója van összesen?

29. Egy labdarúgótornára 12 csapat érkezett. Minden csapat mindegyik másik csapattal pontosan egy mérkőzést fog játszani.
a) Hány mérkőzés vár egy-egy csapatra? *b)* Hány mérkőzés lesz összesen?

30. A tér közepén egy kör alakú virágágyást alakítottak ki, melynek 12 méter az átmérője.
a) Mekkora hosszúságú szegélyt kell a kialakításnál a helyszínre szállítani?
b) Mekkora területű részt fognak virággal beültetni?

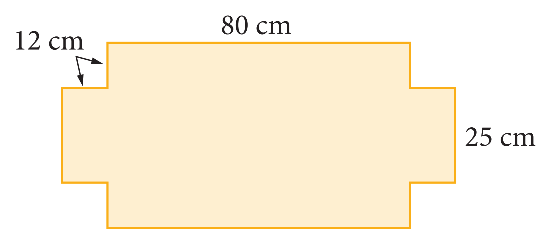
31. A 100 forintos pénzérmék átmérője 23,8 mm, a 200 forintosoké pedig 28,3 mm. Az asztalon hever mindkét érméből 1000-1000 Ft egymás mellett. Melyik és mennyivel foglal el több helyet az asztalon?

32. A 100 forintos pénzérmék átmérője 23,8 mm, a 200 forintosoké pedig 28,3 mm. A 100 forintosok vastagsága 2,2 mm, a 200 forintosoké 2 mm. Add meg a térfogatuk különbségét!

33. A pénzérméket henger alakban, rolnizva csomagolják. Ötven darab 100 forintost és ötven darab 200 forintost szeretnénk rolnizni. Az így kapott két henger közül melyiknek és mennyivel nagyobb a felszíne?

34. Egy henger alakú befőttes üvegnek a belső átmérője 8 cm. Miután a gyümölcsöt megettük, 4 cm magasan áll benne a gyümölcsszirup. Hány deciliter folyadékot jelent ez?

35. Egy 2 mm vastag vaslemezből kivágták a képen látható sokszöget.
a) Mekkora a sokszög alakú lemez térfogata?
b) Mekkora a lemez tömege, ha tudjuk, hogy 1 m^3 vas 7860 kg?



36. A tangram nevű játék 7 darab színes elemét 8 mm vastag fából készítették. Az elemeket a képen látható módon egy 10 cm-es négyzet alakba lehet rendezni. A négyzet átlóját vegyük 14,2 cm hosszúságúnak.
a) Hány különböző térfogatú elemből áll a játék? Add meg ezeket a térfogatokat!
b) Hány különböző felszínű elemből áll a játék? Add meg ezeket a felszíneket!

37. Egy 550 oldalas könyv 3 cm vastag a borítója nélkül. A lapjai 14 cm-szer 20 cm-es méretűek. Mekkora egy lap térfogata?

38. A képen látható geometriai testeket tartalmazó kirakójátékot óvodásoknak készítették. Az első sorban 6 cm, a második sorban 8 cm, a harmadik sorban 10 cm magas testek láthatók. Az első oszlopban az alaplap és a fedőlap is 3 cm oldalú négyzet, a második oszlopban 4 cm oldalú szabályos háromszög, a harmadik oszlopban pedig 3 cm átmérőjű kör. Add meg a kilenc test közül azok felszínét és térfogatát, amelyeket számítással meg tudsz határozni!

VII. FÜGGVÉNYEK, STATISZTIKA

– A következő csapat csak pár száz évet ugrik az időben – tájékoztatta a tanulókat Judit néni, majd néhány másodperc múlva kihirdette: – Helén és Dávid látogathatja meg Galileit. Néhányan ugyan elszontyolodtak egy kicsit, de aztán rögtön tervezgetni kezdték a jövő évi programot.
Csak egy villanás volt, és a két gyerek Itáliában találta magát. A Napnak még elég ereje volt, hogy kellemesen átmelegítse a ház köveit, úgyhogy mindketten elfoglalták helyüket az egyik ablakfülkében.
– Mondd csak, miért foglalkozol olyan felesleges dolgokkal, mint a játékkockák természete? – fordult Niccolini Galileihez.
– Azért, kedves barátom, mert sokan hódolnak e szenvedélynek, és kérdéseik kíváncsivá tettek. Ahogy egyre több választ tudok adni nekik, egyre jobban érzem, hogy egyáltalán nem feleslegesek az ezzel kapcsolatos kísérleteim: törvényeket vettem észre a véletlenek mögött.
– Akkor mindenki nyerni fog a kockajátékokon, ha megismeri a munkádat?
– Nem, kedves barátom. Nem tudom megjósolni a véletlent, csak megérteni és leírni a törvényeit. Ezek azonban nem olyan természetűek, mint az optika törvényei.
– Az algebra mely fejezetébe illenek az eredményeid?
– Egyikbe sem, szerintem ennek nincs neve, de úgy érzem nemsokára lesz. Lehet, hogy új tudományág van születőben.
– Az is véletlen volt, hogy éppen minket sorsoltak ki erre az útra? – kérdezte Helén.
– Természetesen – hümmögött Dávid, aki mindig jó volt infóból, és egy egész napot pepecselt a sorsolás előtti este az iskola számítógépén.

VII. 1. KÉT HALMAZ KÖZÖTTI HOZZÁRENDELÉSEK

1. PÉLDA

Keressük meg az *A* és *B* halmaz összetartozó elemeit!

a) *A* = {Hunyadi János; Dugovics Titusz; I. Károly; Nagy Lajos}
B = {az aranyforint atyja; a törökverő; a nándorfehérvári hős; a lovagkirály}

b) *A* = {A Reményhez; Mátyás anyja; A walesi bárdok; Szép Ilonka; Álmodó; Zsugori uram}
B = {Kányádi Sándor; Arany János; Csokonai Vitéz Mihály; Vörösmarty Mihály}

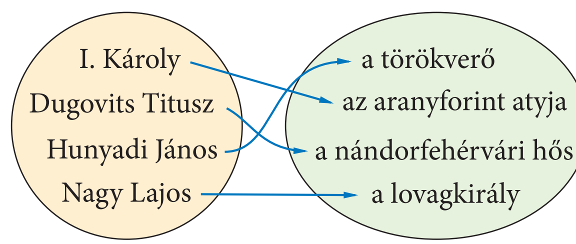
c) *A* = {tenger; óceán; földrész}
B = {Ázsia; Indiai-óceán; Amerika; Atlanti-óceán; Antarktisz; Vörös-tenger}

Megoldás

A példa megoldásához megfelelő szintű ismerettel kell rendelkeznünk más tantárgyakból is.

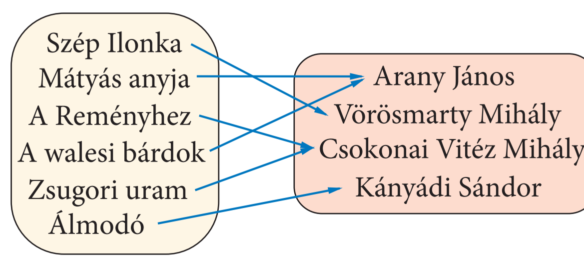
a) Magyar történelmi személyiségekhez rendeltünk őket jól leíró jelzőket:

Nagy Lajos király



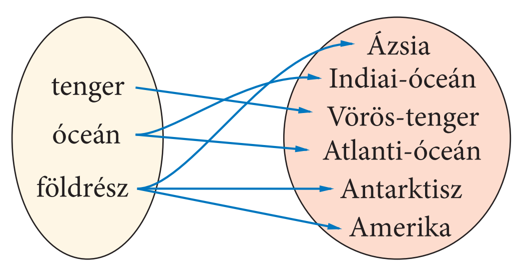
b) Magyar irodalmi alkotásokhoz rendeltünk szerzőket:

I. Edward és felesége



c) Földrajzi fogalmak és elnevezések között kerestünk összetartozókat:

Oroszlánhal



Nézzük meg, hogy miben egyezik és miben különbözik a három feladatrész!

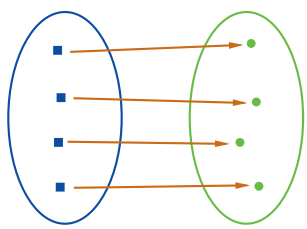
Közös bennük, hogy mindhárom esetben az *A* halmaz minden eleméhez találtunk *B*-beli elemeket, vagyis az *A* halmaz elemeihez **hozzárendeltük** a *B* halmaz elemeit. Az *A* halmazt **alaphalmaznak**, a *B* halmazt pedig **képhalmaznak** nevezzük.

Milyen különbségek vannak a hozzárendelések között?

1. KÉT HALMAZ KÖZÖTTI HOZZÁRENDELÉSEK

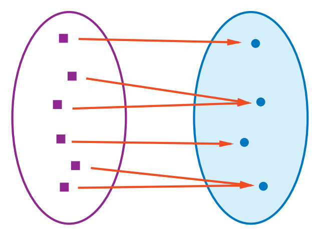
Az *a)* esetben minden *A*-beli elemhez egy *B*-beli elemet rendeltünk, és minden *A* halmazbeli elemhez különbözőt.

Alaphalmaz Képhalmaz



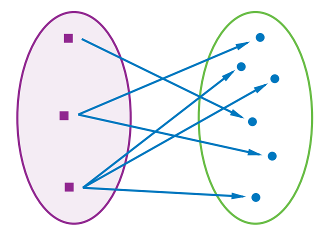
A *b)* esetben minden *A*-beli elemhez egy *B*-belit rendeltünk, de több *A* halmazbeli elemnek ugyanazt a *B* halmazbeli elemet feleltettük meg.

Alaphalmaz Képhalmaz



A *c)* esetben az *A* halmazbeli elemek között volt olyan (pl. földrész), amelyhez több *B*-beli elemet rendeltünk hozzá.

Alaphalmaz Képhalmaz



Az *a)* és *b)* esetben minden *A*-beli elemhez csak egyet rendeltünk hozzá a *B* halmazból. Ezt **egyértelmű hozzárendelésnek** nevezzük.
A *c)* esetben az *A* halmaz egy eleméhez több *B*-beli elemet is rendeltünk. Ezt **nem egyértelmű hozzárendelésnek** nevezzük.

Összefoglalva:
Ha két halmaz elemei között megfeleltetést létesítünk, akkor hozzárendelésről beszélünk.
Azt a halmazt, amelynek az elemeihez hozzárendelünk, alaphalmaznak nevezzük.
Azt a halmazt, amelynek az elemeit rendeljük hozzá, képhalmaznak nevezzük.

Egyértelmű hozzárendelést hozunk létre, ha minden alaphalmazbeli elemhez csak egy elemet rendelünk a képhalmazból.
Nem egyértelmű hozzárendelésről beszélünk, ha az alaphalmaz egy eleméhez több képhalmazbeli elemet rendeltünk hozzá.

FELADATOK

1. Egészítsd ki a mondatot!

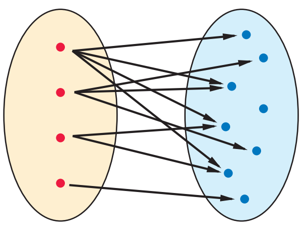
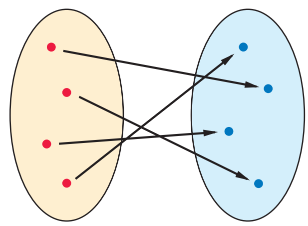
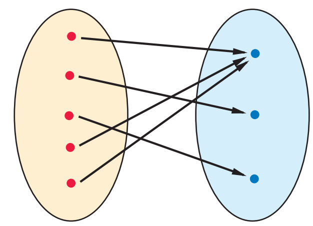
a) Egyértelmű hozzárendelést akkor hozunk létre, ha az alaphalmaz…………………………… eleméhez, ……………………………………………… képhalmazbeli elemet rendelünk hozzá.

b) Nem egyértelmű hozzárendelést adunk meg, ha van olyan alaphalmazbeli elem, amelyhez ……………… képhalmazbeli elemet rendelünk.

2. Adj meg olyan hozzárendeléseket, amelyekre teljesül, hogy alaphalmaza
a) az osztályodba járó gyerekek halmaza;
b) az iskolátok menzáján fogyasztható ételek halmaza;
c) az iskolai tantárgyak halmaza!

3. Párosítsd a hozzárendeléseket a diagramokkal! Döntsd el, melyik egyértelmű és melyik nem egyértelmű hozzárendelés!

a) Minden magyar emberhez hozzárendeljük a taj-számát.
b) Minden emberhez hozzárendeljük a születési dátumát.
c) Minden emberhez hozzárendeljük a barátait.

4. Melyik egyértelmű és melyik nem egyértelmű hozzárendelés az alábbi megfeleltetések közül?

a) Minden számhoz hozzárendeljük a nála eggyel nagyobb számot.
b) Minden számhoz hozzárendeljük a reciprokát.
c) Minden számhoz hozzárendeljük a számszomszédait.
d) Minden számhoz hozzárendeljük az abszolút értékét.
e) Minden számhoz hozzárendeljük a tizedét.
f) Minden egész számhoz 1-et rendelünk, ha páros, 0-t, ha páratlan.

5. Adj meg hozzárendelést az alábbi nevek és képek között! Párosítsd a névhalmaz elemeit a képhalmaz elemeivel! Melyik névhez nem találsz képet?




Bolyai János Erdős Pál Neumann János Sain Márton Varga Tamás

6. Az alábbi hozzárendelések közül melyek egyértelműek?

a) Alaphalmaz: az aktuális év dátumai január 1-től december 31-ig.
Képhalmaz: a hét napjai.
Hozzárendelés: Minden dátumhoz rendeljük hozzá a hét megfelelő napját!

b) Alaphalmaz: az iskolád diákjai.
Képhalmaz: az iskolád tanárai.
Hozzárendelés: Minden diákhoz rendeljük hozzá az őt tanító tanárokat!

c) Alaphalmaz: {szilárd; folyékony; légnemű}
Képhalmaz: {víz; tankönyv; levegő; jég; oxigén}
Hozzárendelés: Minden halmazállapothoz rendeljük hozzá a vele egyező halmazállapotú anyagot!

A hozzárendelések fajtái közül kitüntetett szerepe van az egyértelmű hozzárendelésnek. **Az egyértelmű hozzárendelést függvénynek nevezzük.**

A függvény megadása sokféle módon történhet, de **minden esetben meg kell adni**

- **az alaphalmazt,**
- **a képhalmazt,**
- **és a hozzárendelési szabályt.**

Megállapodás: Ha olyan feladattal találkozol, ahol nincs megadva az alaphalmaz és a képhalmaz, akkor az alaphalmaz és a képhalmaz is a tanult számok halmaza lesz.

Fontos!

Az **alaphalmaz azon elemeinek összességét**, amelyekhez hozzárendeltünk a képhalmazból elemeket, a **függvény értelmezési tartományának** nevezzük.

A **képhalmaz nem minden elemének kell** szerepelni a hozzárendelésben.

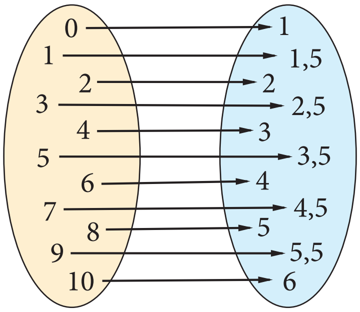
A képhalmaz azon elemeinek összességét, amelyeket hozzárendeltünk az alaphalmaz elemeihez, a **függvény értékkészletének** nevezzük.

Figyeljük meg, milyen módon adhatunk meg függvényeket!
Legyen az alaphalmaz a 10-nél nem nagyobb természetes számok halmaza, a képhalmaz pedig a racionális számok halmaza!

A hozzárendelés megadása történhet:

a) Szövegesen:
Például: Minden számhoz rendeljük hozzá a felénél 1-gyel nagyobb számot!

b) A megadott hozzárendelést ábrázolhatjuk Venn-diagramon:



c) A hozzárendelés megadható táblázattal is:

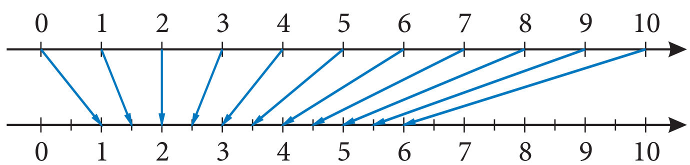
A elemei	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B elemei	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

d) Megadhatjuk a függvényt elemenkénti hozzárendeléssel is. Ebben az esetben úgynevezett **talpas nyíllal** jelöljük, hogy melyik elemhez mit rendelünk:
$1 \mapsto 1{,}5$; $2 \mapsto 2$; $3 \mapsto 2{,}5$; $4 \mapsto 3$; $5 \mapsto 3{,}5$; $6 \mapsto 4$; $7 \mapsto 4{,}5$; $8 \mapsto 5$; $9 \mapsto 5{,}5$; $10 \mapsto 6$.

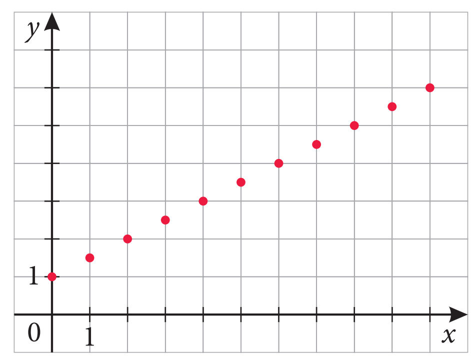
Az ezután következő megadási módok akkor használhatók, ha az alaphalmaz és a képhalmaz is számhalmaz.

e) Számpárok megadásával is megadhatjuk a hozzárendelést. A számpár első tagja az alaphalmaz eleme, a második tagja a képhalmaz eleme lesz:
(0; 1); (1; 1,5); (2; 2); (3; 2,5); (4; 3); (5; 3,5); (6; 4); (7; 4,5); (8; 5); (9; 5,5); (10; 6).

f) A hozzárendelést két párhuzamos számegyenes segítségével is ábrázolhatjuk. A hozzárendelést nyilak jelölik, amelyek az egyik számegyenes számaitól mutatnak a másik számegyenes megfelelő számai felé. Ezt nyíldiagramos ábrázolásnak nevezzük.



g) Ábrázolhatjuk a függvényt derékszögű koordináta-rendszerben úgy, hogy az ábrázolandó pont első jelzőszáma az alaphalmaz eleme, a pont második jelzőszáma pedig a képhalmaz megfelelő eleme legyen.
Az ilyen módon ábrázolt pontok összességét a **függvény grafikonjának** nevezzük. Az alaphalmaz elemeit az x tengelyen lévő számokból választjuk, a képhalmaz elemeit az y tengelyen lévő értékekből.
Vigyázz! A függvény nem egyenlő a grafikonjával, hisz a grafikon csupán a hozzárendelés egy megjelenítési formája.



h) Képlettel történő megadás. Ezt az alábbi módon jelöljük:

$$f: x \mapsto \frac{x}{2} + 1$$

Az f a függvény neve, a $x \mapsto \frac{x}{2} + 1$ képlet kiolvasása pedig: „x-hez hozzárendeljük az x per 2 meg 1-et".

A képlet egy szöveges utasítás matematikai leírása. Megmutatja, hogy milyen műveleteket végezzünk egy tetszőleges alaphalmazbeli számmal.

CSOPORTMUNKA

Gyűjtsétek össze, hogy a tanultak alapján milyen módon lehet függvényeket megadni! Minden lehetőséghez rajzoljatok vagy írjatok példát is!

2. FÜGGVÉNYEK MEGADÁSI MÓDJAI

FELADATOK

1. Válaszd ki az alábbi hozzárendelések közül a függvényeket! Az alaphalmazt A-val, a képhalmazt B-val jelöltük.

a) A = {iskoláskorú gyerekek}; B = {iskolák}
Minden iskoláskorú gyerekhez hozzárendeljük a saját iskoláját.

b) A = {állattulajdonosok}; B = {állatok}
Minden állattulajdonoshoz hozzárendeljük a háziállatát.

c) A = {házaspárok}; B = {évszámok}
Minden házaspárhoz hozzárendeljük az évet, amikor összeházasodtak.

d) A = {gyümölcsök}; B = {racionális számok}
Minden gyümölcshöz hozzárendeljük, hányféle vitamint tartalmaz.

2. Megadtuk egy függvény alaphalmazát, képhalmazát és hozzárendelési szabályát. Készítsd el a hozzárendelés táblázatát!

a) A = {10-nél kisebb nem negatív egész számok}
B = {természetes számok}
Hozzárendelési szabály: Minden A-beli számhoz rendeljük hozzá a háromszorosánál 2-vel nagyobb számot!

b) A = {20-nál kisebb prímszámok}
B = {egész számok}
Hozzárendelési szabály: Minden A-beli számhoz rendeljük hozzá az ellentettjét!

3. Elemenkénti hozzárendeléssel megadtuk egy függvény alaphalmazát, képhalmazát és a hozzárendelési szabályát. Add meg a hozzárendelést szövegesen és Venn-diagrammal is!

a) A = {–6-nál nagyobb negatív számok}
B = {racionális számok}
$-5 \mapsto -3{,}5$; $-4 \mapsto -3$; $-3 \mapsto -2{,}5$;
$-2 \mapsto -2$; $-1 \mapsto -1{,}5$.

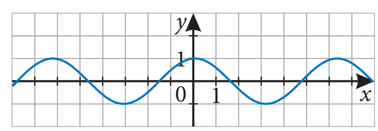
b) A = {–3 és 3 közötti egész számok}
B = {természetes számok}
$-3 \mapsto 3$; $-2 \mapsto 2$; $-1 \mapsto 1$; $0 \mapsto 0$;
$1 \mapsto 1$; $2 \mapsto 2$; $3 \mapsto 3$.

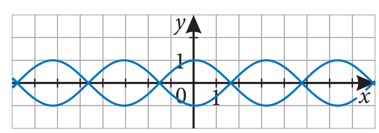
4. Készíts táblázatot az alábbi hozzárendelésekhez 8 db általad választott számmal, és ábrázold az alábbi függvényeket a koordinátarendszerben! Az alaphalmaz és a képhalmaz is a tanult számok halmaza.

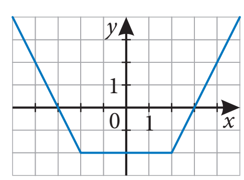
a) Minden számhoz rendeljük hozzá a nála eggyel nagyobb szám kétszeresét!

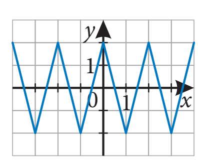
b) Minden számhoz rendeljük hozzá a negyedénél 2-vel nagyobb számot!

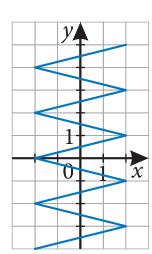
5. Válaszd ki a függvények grafikonjait az alábbi ábrák közül!

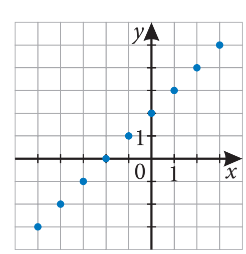
a)


b)


c)


d)


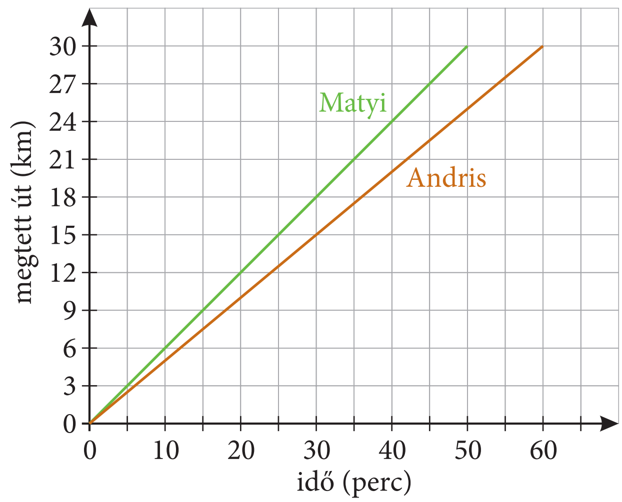
e)


f)


OLVASSUNK A GRAFIKONRÓL!

1. PÉLDA

Andris és Matyi bicikliversenyt rendeznek. Az erdei kirándulóösvényen tekernek végig. Aki előbb célba ér, az nyer. A grafikon a megtett utat mutatja az idő függvényében. Mit tudhatunk meg a grafikonról?



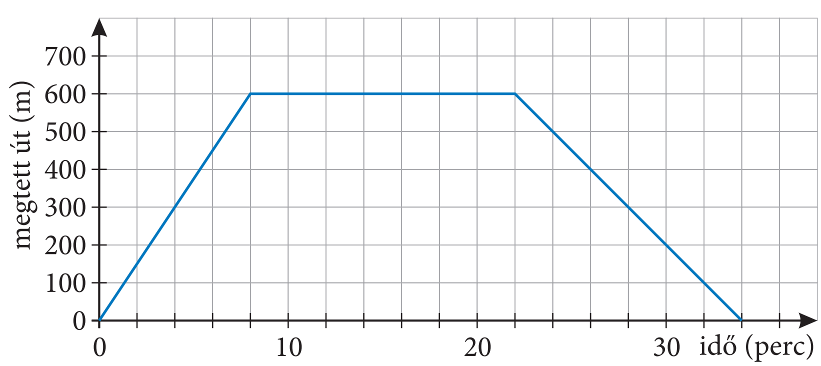
Megoldás

A vízszintes tengelyen az időt, a függőleges tengelyen a megtett utat ábrázoltuk. A megtett út tehát az idő függvényében változott.
A függőleges tengelyről leolvashatjuk, hogy a kirándulóösvény hossza 30 km volt, a grafikon vízszintes tengelyéről pedig az is megtudható, hogy Andris 60, Matyi pedig 50 perc alatt tekerte végig a pályát, így Matyi nyerte a versenyt. Azt, hogy Matyi volt a gyorsabb, onnan is láthatjuk, hogy az ő mozgásgrafikonja meredekebb, tehát az adott távolságot kevesebb idő alatt tette meg.

2. PÉLDA

Klári elsétált a közértbe, bevásárolt, majd hazament. A grafikon a Klári által megtett távolságot mutatja az idő függvényében.

a) Hány órára ért haza Klári, ha 15.10-kor indult otthonról?
b) Hány perc alatt ért a közértbe?
c) Hány percet töltött vásárlással?
d) Odafelé vagy hazafelé sétált gyorsabban?

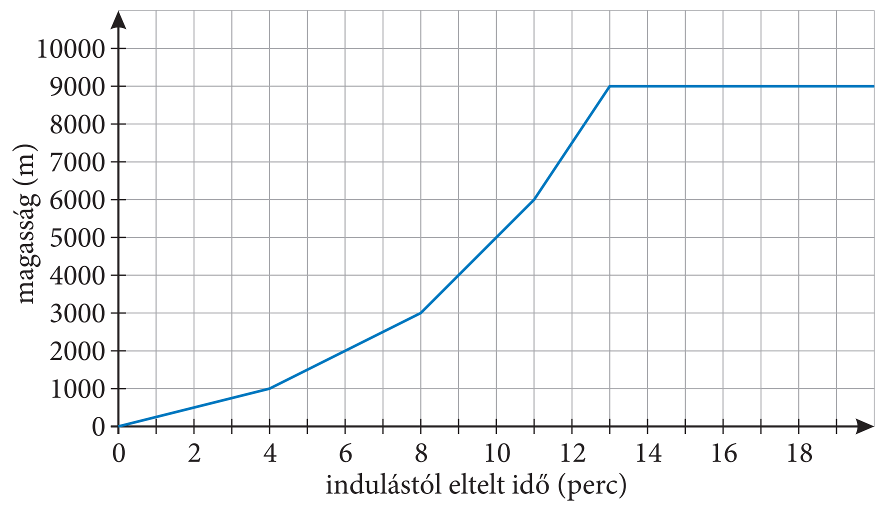


Megoldás

a) Klári 34 percet töltött távol, így 15.44-re ért haza.
b) 8 perc alatt odaért a közértbe. A közértbe érkezés a grafikon vízszintes részénél kezdődik. Ez jelöli, hogy Klári már nem ment tovább.
c) Klári 8–22 percig volt a boltban, így 14 perc alatt bevásárolt.
d) Odafelé gyorsabban sétált, hisz rövidebb idő alatt tette meg ugyanazt a távolságot, amit hazafelé is lesétált, amit abból is láthatunk, hogy ez a grafikon meredekebb.

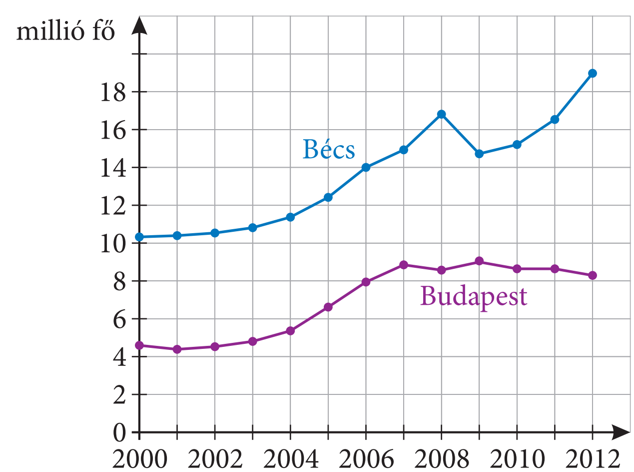
FELADATOK

1. Az utasszállító repülőgép magassági adatai alapján nyomon követhetjük, hogy az indulást követő egyes időpontokban milyen magasan szállt a repülőgép.



a) Hány perc alatt érte el a repülési magasságát a repülőgép?
b) Milyen magasan járt a gép az indulást követő 8. percben?
c) Hány métert emelkedett a gép a 4–8. perc között?
d) Melyik időintervallumban volt a legnagyobb a repülőgép emelkedési sebessége?
e) Hányadik percben volt 8000 m a repülési magassága?

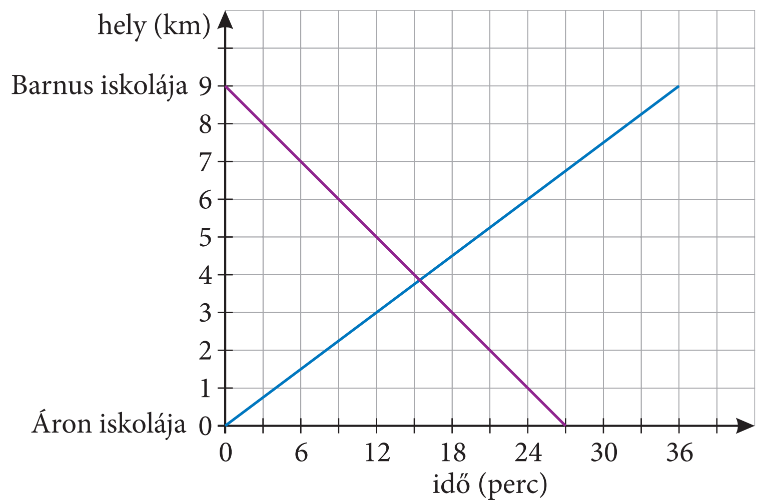
2. A következő ábrán a budapesti és a bécsi repülőtér éves utasforgalmát látod 2000 és 2012 között. Döntsd el a grafikon alapján, melyik igaz, illetve melyik hamis a következő állítások közül!



a) A bécsi reptéren mindig többen voltak, mint a budapestin.
b) A legnagyobb forgalmat mindkét repülőtér ugyanabban az évben érte el.
c) Volt olyan év, amikor a bécsi repülőtéren 10 millióval több ember fordult meg, mint a budapesti reptéren.
d) 2009-ben volt a legkisebb eltérés a két reptér forgalma között.
e) Ez alatt a 13 év alatt 70 milliónál több látogatója volt a budapesti repülőtérnek.

3. Piroska reggel 8-kor indult el a 12 km-re lakó nagymamához. Óránként átlagosan 3 km-t tett meg. 10 órakor letért az útról, hogy fél óra alatt virágot szedjen a nagyinak, majd folytatta az útját. Anyukájának 9-kor jutott eszébe, hogy elfelejtett kislányának szólni a gonosz farkasról, így 6 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel utána szaladt. Tudott-e beszélni az anyuka Piroskával még a virágszedés előtt? Grafikusan oldd meg a feladatot a füzetedben!

4. Áron és Barnus különböző iskolákba járnak, de pénteken mindkettőjüknek öt órája van. Tanítás után Barnusnak Áron iskolájában van zeneórája, Áronnak meg Barnus iskolájában van kosárlabdaedzése. Egyszerre indulnak, s mindketten biciklivel mennek egymás iskolájába. Válaszolj a kérdésekre a grafikon alapján!



a) Melyik grafikon jelöli Áron és melyik Barnus mozgását?
b) Melyik gyerek biciklizik gyorsabban? Miért?
c) Milyen messze van egymástól a két iskola?
d) A fiúk az indulástól számított hányadik percben találkoznak?
e) Hány perc alatt teszi meg az utat Áron?
f) Hány km utat tesz meg Barnus egy perc alatt?

5. Van a kertünkben egy 400 literes felfújható medence, azonban a kutyánk kirágta az oldalát. Egyenletesen folyt belőle a víz, és 2,5 óra múlva szomorúan láttuk, hogy a víz fele kifolyt és elszivárgott a földbe. Ábrázold a medencében levő víz mennyiségének csökkenését az eltelt idő függvényében!

6. Meggyújtottunk két gyertyát. Az egyik 24 cm hosszú, a másik ennél vastagabb, de csak 16 cm hosszúságú. A gyertyák egyenletesen égtek. A hosszabb gyertya magassága 6 óra alatt 9 cm-t, a rövidebbé 5 cm-t csökkent.
a) Ábrázold egy koordináta-rendszerben a gyertyák magasságát az eltelt idő függvényében!
b) Melyik gyertya ég el hamarabb?
c) Milyen hosszúak lesznek a gyertyák 2 óra elteltével?
d) Mennyi idő alatt ég el a hosszabb gyertya?
e) Mikor lesz a rövidebb gyertya 8,5 cm magas?

4. ÁBRÁZOLJUNK KÉPLET ALAPJÁN!

Gyakran találkozunk olyan feladatokkal, amelyek a függvényt képlettel adják meg, de szükségünk lehet a koordináta-rendszerben ábrázolt grafikonjára is.
Figyeljük meg, mit állapíthatunk meg a függvények grafikonjainak változásáról a szabályok változtatásával! Legyen az értelmezési tartomány minden példánkban a tanult számok halmaza!

1. PÉLDA

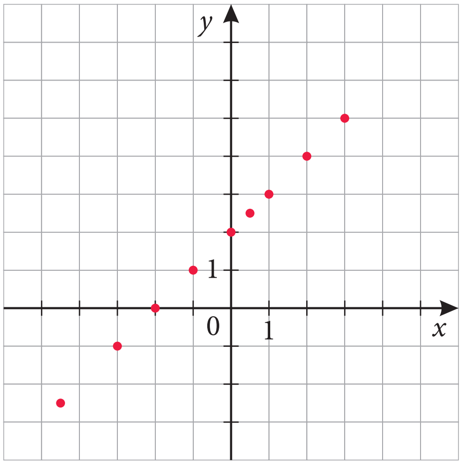
Rendeljük hozzá minden számhoz a nála kettővel nagyobb számot!
A hozzárendelési szabályt így adhatjuk meg képlettel: $f: x \mapsto x + 2$.

Megoldás

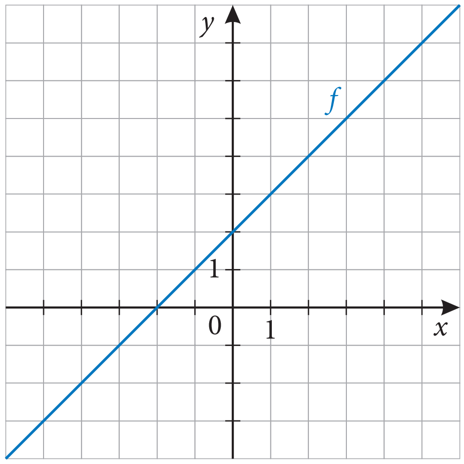
A képlet azt jelenti, hogy ha egy tetszőleges x tanult számot választunk, akkor a hozzárendelt érték $x + 2$ lesz, vagyis a nála kettővel nagyobb szám. A függvénynek „nevet" adtunk azzal, hogy a szabály elé f betűt írtunk, tehát ez lesz a függvény betűjele, „neve". Készítsünk táblázatot az összetartozó számpárokról!

x	0	1	−1	2	−2	3	−3	0,5	−4,5
$x + 2$	2	3	1	4	0	5	−1	2,5	−2,5

Ábrázoljuk az értékpárokat koordináta-rendszerben úgy, hogy az x szám a pont első, az $x + 2$ érték pedig a második koordináta legyen:



A grafikon nem a teljes hozzárendelés képét mutatja, mivel csak azt vizsgáltuk, hogyan helyezkednek el a grafikon pontjai néhány esetben.



Természetesen nem lehet minden tanult számot beírni a táblázatba, de a hozzárendelés grafikonját meg tudjuk rajzolni. Belátható, hogy a grafikon pontjai a berajzolt pontok által meghatározott egyenesen lesznek. Ezért az ilyen típusú hozzárendelést lineáris függvénynek nevezzük.

Látható, hogy a függvény értékkészlete a tanult számok halmaza.

VII. 4. ÁBRÁZOLJUNK KÉPLET ALAPJÁN!

2. PÉLDA

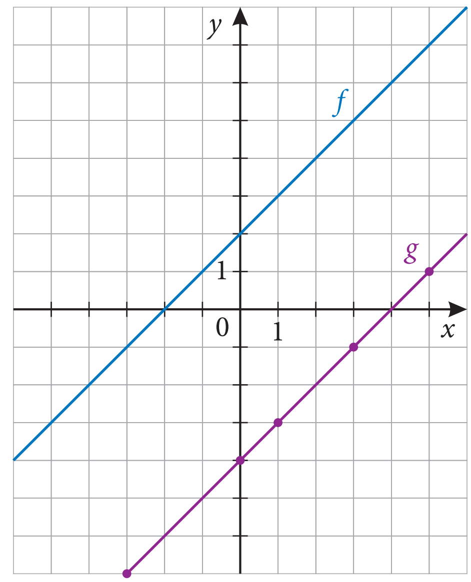
Ábrázoljuk a $g : x \mapsto x - 4$ függvényt! Milyen kapcsolat van az 1. példában ábrázolt és a most ábrázolt függvény között?

Megoldás

Most minden számhoz a nála néggyel kisebbet rendeljük hozzá. Táblázat nélkül is könnyen lehet összetartozó értékpárokat keresni, így néhány pont ábrázolása után megrajzolhatjuk a függvény grafikonját:

$(0; -4)$; $(1; -3)$; $(3; -1)$; $(-3; -7)$; $(5; 1)$.

A függvény grafikonja az előző grafikonnal párhuzamos egyenes, de 6 egységgel „lejjebb” csúsztatva, ezért a függvény értékkészlete ismét a tanult számok halmaza.



KUTATÓMUNKA

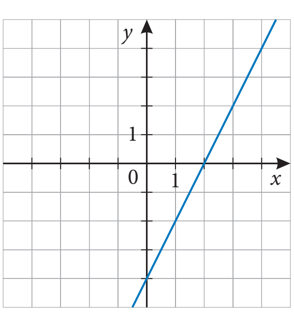
Nézzetek utána, honnan származik a *lineáris* elnevezés!

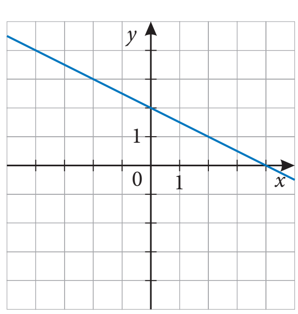
FELADATOK

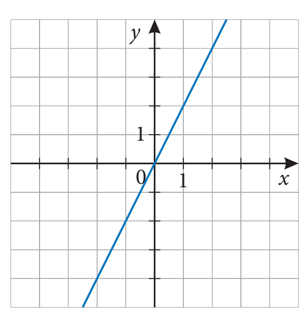
1. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi függvények grafikonjait!
a) $x \mapsto x$; *b)* $x \mapsto x + 3$; *c)* $x \mapsto x - 4$; *d)* $x \mapsto x + 5$.

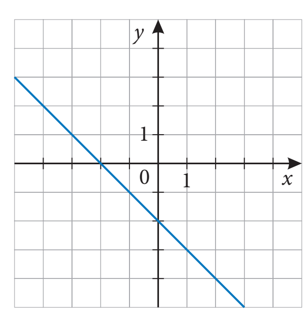
2. Ábrázold közös koordináta-rendszerben az alábbi függvények grafikonjait!
a) $x \mapsto x$; *b)* $x \mapsto 2x$; *c)* $x \mapsto -3x$; *d)* $x \mapsto \frac{1}{3}x$; *e)* $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$.

3. Melyik képlethez melyik grafikon tartozik?
a) $f : x \mapsto 2x$; *b)* $g : x \mapsto 2x - 4$; *c)* $h : x \mapsto -x - 2$; *d)* $l : x \mapsto -\frac{1}{2}x + 2$; *e)* $f : x \mapsto x$.







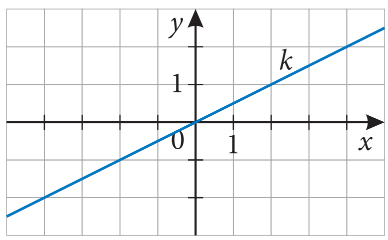


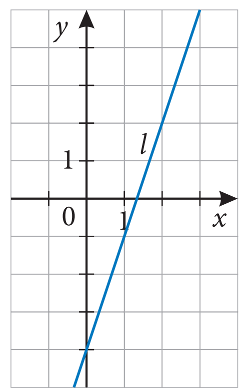
4. Megrajzoltuk néhány lineáris függvény grafikonját. Vizsgáljátok meg, milyen összefüggések állapíthatók meg a hozzárendelési szabály és a függvény grafikonja között!
Melyik számot rendeli hozzá a 0-hoz, azaz hol metszi a grafikon az y tengelyt?
Mennyit változik a függvény értéke, ha az x változó 1-gyel nő?

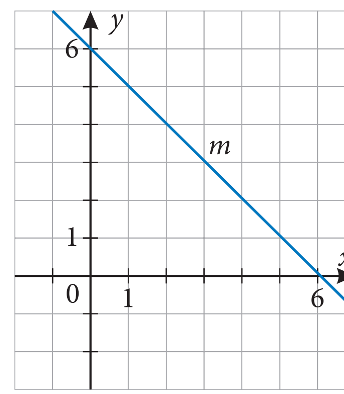
$k: x \mapsto \frac{1}{2}x;$

$l: x \mapsto 3x - 4;$

$m: x \mapsto -x + 6.$







5. Ábrázold az alábbi függvényeket, majd tükrözd az y tengelyre! Add meg az így kapott függvények hozzárendelési szabályát!
a) $f: x \mapsto x + 3;$ *b)* $g: x \mapsto -3x - 2;$ *c)* $h: x \mapsto \frac{2}{3}x.$

6. Add meg az alábbi pontok hiányzó koordinátáit, ha tudod, hogy a pontok rajta vannak az $f: x \mapsto -\frac{2}{3}x + 2$ függvény grafikonján!
$A(6; \ldots\ldots);$ $B(\ldots\ldots; 4);$ $C(0; \ldots\ldots);$ $D(\ldots\ldots; -4);$ $E(300; \ldots\ldots);$ $F(\ldots\ldots; -212).$

7. Ábrázold a $g: x \mapsto 3x - 1$ függvény grafikonját! Döntsd el, hogy hol helyezkednek el az alábbi pontok: a függvény alatt, a függvényen vagy a függvény felett!
$A(1; 2);$ $B(-3; -7);$ $C(4; 3);$ $D(-5; 5);$ $E(7; -2).$

8. Egyenletesen zuhog az eső. Az udvaron két egyforma méretű esővízgyűjtő dézsánk is van.

a) Az egyikben 5 perc alatt 0,5 cm-t emelkedik a vízszint. Ez a dézsa két és fél óra alatt tele lett, de addigra annyira megsüllyedt alatta a föld, hogy felborult, és az összes víz kiömlött belőle. Ábrázold grafikonon a hordóban levő víz mennyiségének változását az idő függvényében!

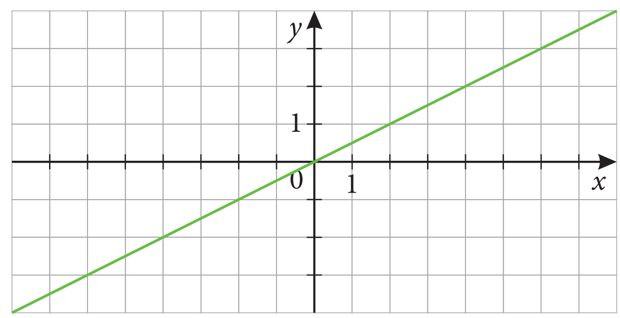
b) Vizsgáljuk meg a másik dézsát! A két dézsa közti különbség mindössze annyi, hogy ezen alul van egy kisebb lyuk, ahol folyamatosan elszivárog a víz, így 2 percenként 1 mm-rel csökken a víz szintje. Ábrázold grafikonon a hordóban levő víz mennyiségének változását az idő függvényében! Mennyi idő alatt telik meg ez a hordó?

VII. 5. KERESSÜNK SZABÁLYOKAT!

Vizsgáljuk meg, mi lehet a függvény hozzárendelési szabálya, illetve hogyan lehet ezt megállapítani, ha ismerjük a grafikonját!

1. PÉLDA

Adjuk meg képlettel a grafikon pontjai közötti összefüggést! Írjuk fel az itt látható függvények hozzárendelési szabályát!



Megoldás

Célszerű először rácspontokat keresni. Azokat a pontokat nevezzük rácspontoknak, amelyeknek mind a két koordinátája egész szám. Írjuk egy táblázatba a rácspontok koordinátáit úgy, hogy a felső sorba az első, az alsó sorba a második koordináta kerüljön!

A felső sorban lévő számok lesznek a független változó értékei, vagyis az x számok, az alsó sorban lévők pedig rendre a hozzájuk rendelt értékek, amelyet $f(x)$-szel szoktunk jelölni. Ezek között kell összefüggést megállapítanunk.

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
$f(x)$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

A függvény grafikonja egyenes. Észrevehetjük, hogy a hozzárendelt számok pontosan az x számok felével egyenlők. A hozzárendelést ezért így fogalmazhatjuk meg: Minden számnak vegyük a felét!

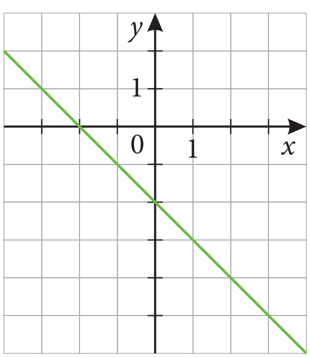
Ezt úgy is megkaphatjuk, ha a változó értékeit $\frac{1}{2}$-del szorozzuk.

Tehát a hozzárendelési szabály: $f: x \mapsto \frac{1}{2}x$.

Számolással ellenőrizhetjük, hogy a többi pont koordinátái is megfelelnek-e ennek a szabálynak.

2. PÉLDA

Döntsük el, függvényt ábrázol-e az alábbi hozzárendelés! Ha igen, írjuk fel képlettel a hozzárendelési szabályát!



Megoldás

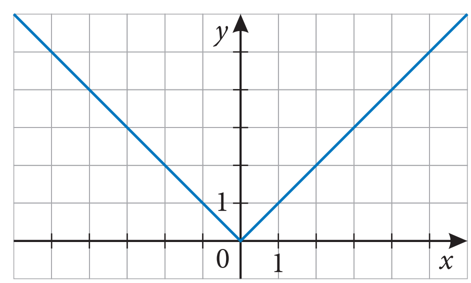
Igen, függvényt ábrázol, mert minden x értékhez egy számot rendel.
Haladjunk az előző feladatban használt lépések szerint! Keressünk rácspontokat!

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6

Bár most nehezebb megállapítani a szabályt, de észrevehetjük, ha az x értéke nő, akkor a hozzárendelt érték egyre csökken, és fordítva. Érdemes tehát az x ellentettjét vizsgálni. Így már látható, hogy minden hozzárendelt érték a megfelelő x érték ellentettjénél 2-vel kisebb.
Tehát a hozzárendelési szabály szövegesen: A tetszőleges x szám ellentettjét csökkentsük 2-vel!
Vagyis a hozzárendelés: $g : x \mapsto -x - 2$.
Ismét számolással ellenőrizhetjük, hogy a többi pont koordinátái is megfelelnek-e ennek a szabálynak.

3. PÉLDA

Függvényt ábrázol-e az alábbi grafikon? Milyen összefüggés írható fel a grafikon alapján?



Megoldás

Látható, hogy egy nem lineáris függvény szabályát keressük. Írjuk fel újra a rácspontok koordinátáit!

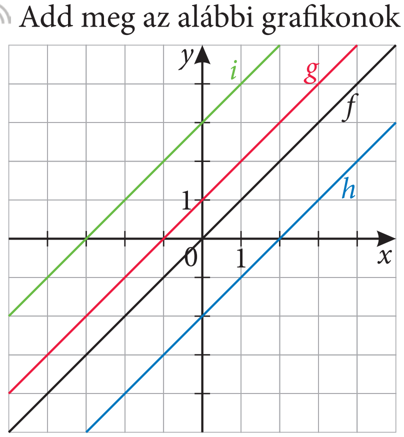
x	0	1	2	3	–1	–2	–3	–4	–5
$f(x)$	0	1	2	3	1	2	3	4	5

Olyan szabályt keresünk, ami minden nemnegatív számhoz magát a számot, a negatív számokhoz pedig az ellentettjét rendeli hozzá. Ezt már ismerjük: emlékeztethet bennünket az abszolút érték definíciójára.
Tehát a függvény képlete: $h : x \mapsto |x|$.
Számolással ellenőrizhetjük, hogy a többi pont koordinátái is megfelelnek-e ennek a szabálynak.

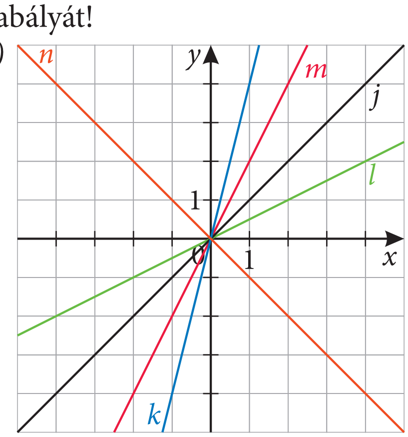
FELADATOK

1. Add meg az alábbi grafikonok hozzárendelési szabályát!

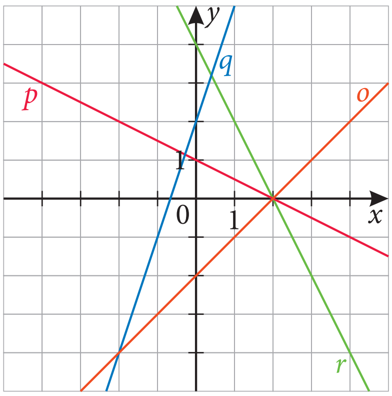
a)



b)



2. Keresd a párját!



$f: x \mapsto 3x + 2$

$g: x \mapsto -2x + 4$

$h: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 1$

$l: x \mapsto x - 2$

$k: x \mapsto 3x$

3. Egy lineáris függvény grafikonja átmegy a (2; 3) és a (3; 5) pontokon. Döntsd el az alábbi állításokról, melyik igaz és melyik hamis!
a) A függvény az $x = 2$-höz 3-at rendel. *b)* A függvény az $x = 5$-höz 3-at rendel.
c) A függvény az $x = 0$-hoz kevesebbet rendel, mint az $x = 2$-höz.

4. Adott a síkban két pont. Add meg annak a lineáris függvénynek a hozzárendelési szabályát, amely átmegy ezeken a pontokon!
a) $A(-2; 3)$; $B(2; -1)$;
b) $A(1; 4)$; $B(-1; 0)$;
c) $A(3; 2)$; $B(-6; -1)$.

5. Az alábbi táblázatban megadott számpárok egy kivételével egy lineáris függvény grafikonjának pontjai. Határozd meg a függvény hozzárendelési szabályát! Melyik pont a kakukktojás?

a)

x	−3	−2	−1	0
y	−5	−1	1	4

b)

x	0	2	4	8
y	5	4	2	1

6. Ábrázold az alábbi lineáris függvényeket, majd add meg a hozzárendelési szabályukat!
a) Az f függvény grafikonja átmegy az $A(5; -9)$ ponton és az y tengelyt a (-4) pontban metszi.
b) A g függvény a 2-höz 5-öt, a 6-hoz 7-et rendel.

7. A bankrabló észreveszi a 200 méterre álló rendőrt és elkezd rohanni. Hány perc alatt éri utol a rendőr a rablót, ha a rabló 10 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, a rendőr pedig 16 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebességgel fut? Oldd meg a feladatot grafikusan!

6. ÁTLAG, MÓDUSZ, MEDIÁN

Az előző évben már találkoztatok az átlag fogalmával, pontosabban a számtani átlaggal, amit úgy számítottunk ki, hogy összeadtuk az adatokat és elosztottuk az adatok számával. Ha például Matyinak négy darab ötöse, három négyese és egy hármasa volt, akkor a jegyei átlaga:

$$\overline{x} = \frac{5+5+5+5+4+4+4+3}{8} = \frac{35}{8} = 4,375.$$

Ehhez hasonlóan valószínűleg sokan kiszámoltátok az év végi átlagotokat vagy akár egyetlen tárgy átlagát.

Vannak olyan esetek, amikor ki lehet ugyan számolni az átlagot, de nem biztos, hogy megéri a befektetett munkát. Judit néni, a matektanár összegyűjtötte, milyen jegyeket adott a hetedikeseknek a tanév során. Eredményül ezt a táblázatot kapta:

jegy	1	2	3	4	5
darabszám	84	32	66	121	99

Csak ránézett az adatokra és látta, milyen osztályzatból volt a legtöbb, melyik volt a leggyakoribb: Judit néni leggyakrabban 4-est adott az év során. Mivel a leggyakoribb elemet sokszor használják az átlagos érték jellemzésére, ezért külön nevet is adtak neki.

Egy kísérlet során a legtöbbször előforduló adat, azaz egy halmaz leggyakoribb eleme a **módusz**. A módusz jelölése Mo.

Előfordulhatott volna az is, hogy Judit néni tavaly 110 darab 4-est és 110 darab 5-öst adott. Ekkor az adathalmaznak két módusza lenne.

A móduszban az a hasznos, hogy abban az esetben is használható, ha átlagot egyáltalán nem tudunk számolni, mert az adatok nem számok.

1. PÉLDA

Mi az átlagos hajszín Judit néni osztályában, ha 8 szőke, 12 barna, 4 fekete és 1 vörös hajú gyerek van az osztályban?

Megoldás

Értelmetlen lenne átlagot számítani, hiszen nem tudjuk mi az átlaga egy szőke és egy vörös hajú gyereknek. A móduszt viszont egy pillanat alatt megállapíthatjuk: barna hajú gyerekből van a legtöbb az osztályban.

Egy másik, a középértéket jellemző adat a középső elem. Rendezzük az adatokat nagyság szerinti sorrendbe, és válasszuk a középső elemet! A gyakorlatban ezt a középértékre jellemző értéket is sűrűn használják, így ennek is külön nevet adtak. Ez az adatok **mediánja**. A medián jelölése Me.

Például: A {7; 2; 1; 1; 3} számokat nagyság szerint rendezve az {1; 1; 2; 3; 7} halmazt kapjuk, amelyek közül a 2 a középső, azaz a medián a 2.

Ha páros számú adatunk van, mint például a {3; 4; 4; 4; 5; 5; 5; 5} esetében, akkor a két középső elem átlaga lesz a medián; vagyis a medián $= \frac{4+5}{2} = 4,5$.

VII. 6. ÁTLAG, MÓDUSZ, MEDIÁN

2. PÉLDA

Hét pozitív egész szám között szerepel az 1-es és a 3-as, a hét szám átlaga 3, mediánja és módusza 2. Adj meg hét ilyen számot!

Megoldás

Rajzoljunk 7 vonalat, ezek fogják jelölni a hét szám helyét. Mivel a medián 2, ezért a középső helyre beírhatjuk a 2-t.

_ _ _ 2 _ _ _

Az első három helyen nem állhat három egyes, mert akkor legalább 4 darab kettes kellene legyen a hét szám között. Legyen ezért csak az első két szám 1-es, ekkor legalább három darab 2-es is van a számok között. Legyen most pont három darab!

1 1 _ 2 _ _ _
1 1 2 2 2 _ _

A feladat szövege szerint van egy 3-as is a hét szám között.

1 1 2 2 2 3 _

Ahhoz, hogy az átlag 3 legyen, a számok összege $7 \cdot 3 = 21$ kell legyen. Az eddig választott 6 szám összege 11, tehát az utolsó még hiányzó szám a 10.

1 1 2 2 2 3 10

Keress más megoldást is! Mik lehetnek a számok, ha csak 1 darab egyes van közöttük?

FELADATOK

1. Határozd meg a $\{-2; 0; 0; 0; 7\}$ számok
a) számtani átlagát; *b)* móduszát; *c)* mediánját!

2. Határozd meg az $\{-1; -1; 1; 1; 3; 6\}$ számok
a) számtani átlagát; *b)* móduszát; *c)* mediánját!

3. Az iskolai büfében eladtak 42 párizsis, 33 sajtos, 27 sonkás és 18 rántott húsos zsömlét.
a) Melyik középértéket tudod meghatározni?
b) Mennyi volt az egy szendvicsre jutó átlagos ár?

4. A YouTube-on 2015 elején az első hat leggyakrabban hallgatott zeneszám hossza 5:08; 4:14; 4:04; 1:29; 3:27 és 4:42 volt.
a) Milyen hosszú az átlagos zeneszám?
b) Mekkora az adatok mediánja?

5. Ha lehet, adj meg hat természetes számot úgy, hogy
a) az átlaguk 5 legyen;
b) a móduszuk 6 legyen;
c) a mediánjuk 7 legyen;
d) az *a)* és a *b)* egyszerre teljesüljön;
e) az *a)* és a *c)* egyszerre teljesüljön;
f) a *b)* és a *c)* egyszerre teljesüljön;
g) az *a)*, *b)* és a *c)* egyszerre teljesüljön!

Matyiék fociszakosztályának új mezeket és cipőket kell rendelni, mert az előző két évben sokat nőttek a fiúk. Ma már Marci, Milán, Miklós, Zsiga és Dani lába 40-es, Matyié, Gézáé és Mátéé 38-as, Dávidé és Zaláné 42-es. A különböző méretű cipőkből szükséges darabszámot egy táblázatban gyűjtöttük össze. A leggyakoribb cipőméret a 40-es, ez a méretek módusza.

A 38-as cipőméret 3-szor fordul elő a fiúk között. Azt mondjuk, hogy a 38-as méret **gyakorisága** 3, a 40-es méret gyakorisága 5, a 42-es méret gyakorisága pedig 2.

méret	38	40	42
darab	3	5	2

A **gyakoriság** az a szám, ahányszor az adat előfordul a halmazban.

1. PÉLDA

Két iskolában is nyereményjátékot szerveztek. A gyerekek mindkettőben kaptak egy-egy tombolajegyet. A Méta iskolában 12-en nyertek, a Bálna iskolában pedig 18-an. Hol volt nagyobb esély nyerni?

Megoldás

Ezt sajnos nem tudjuk megválaszolni. A Bálna iskolában ugyan 18-an nyertek, ami több, mint a Méta iskola 12 nyertese, azaz a nyertesek gyakorisága nagyobb a Bálna iskolában, de ebből nem lehet következtetni a nyerési esélyekre. Nézzük meg az *A* és *B* eseteket!

A eset: Ha mindkét iskolába 180 gyerek jár, akkor nyilván ott van nagyobb esély a nyerésre, ahol több gyerek nyer, azaz a Bálna iskolában.

A eset	gyakoriság	az iskola létszáma	relatív gyakoriság
Bálna iskola	18	180	$\frac{1}{10}$
Méta iskola	12	180	$\frac{2}{30}$

B eset: Ha a Bálna iskolába például 180 gyerek jár, a Méta iskolába pedig csak 60, akkor annak az esélye, hogy egy gyerek a Bálna iskolában nyer $\frac{18}{180} = \frac{1}{10}$, annak pedig, hogy a Méta iskolában $\frac{12}{60} = \frac{2}{10}$.

B eset	gyakoriság	az iskola létszáma	relatív gyakoriság
Bálna iskola	18	180	$\frac{1}{10}$
Méta iskola	12	60	$\frac{2}{10}$

Ebben az esetben a Méta iskolában volt nagyobb esély a nyerésre, éppen kétszer annyi, mint a Bálna iskolában.

Egy adat relatív gyakorisága az adat előfordulásának száma, azaz **a gyakorisága és az összes adat számának hányadosa.** A relatív gyakoriság mindig legalább 0 és legfeljebb 1.
Az első példában lévő cipőméretek relatív gyakoriságai a táblázatban láthatók.

méret	38	40	42
gyakoriság	3	5	2
relatív gyakoriság	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{10}$

FELADATOK

1. A cukrászdában 84 vanília, 47 csokoládé, 44 pisztácia és 35 eper fagylaltot adtak el.

a) Mi az adatok módusza?
b) Mekkora az egyes fagyik relatív gyakorisága?
c) Készíts kördiagramot az adatok ábrázolásához!

2. Az M1-es autópálya Tatabányát követő szakaszán utasszámlálást tartottak. Feljegyezték az egyes autókban ülő emberek számát, és az alábbi táblázatot kapták.

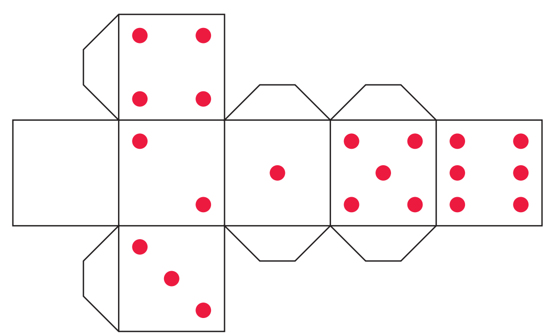
az emberek száma autónként	1	2	3	4	5	6	7
darab	145	77	24	38	18	3	3

a) Számold ki a füzetedben a relatív gyakoriságokat!
b) Ha jön egy következő autó az úton, mire tippelnél, hány ember ül benne?

3. Bár az iskolában csak 7:45-kor kezdődik a tanítás, de már 7:00-tól be lehet menni az épületbe. Az iskolatitkár kérésére a portás bácsi statisztikát készített. 7:00 és 7:15 között 18 gyerek érkezett, 7:15 és 7:30 között 63, 7:30 és 7:45 között 228, sőt sajnos 7:45 és 8:00 között is még 12.

a) Mekkora az egyes negyedórákban érkezett gyerekek számának relatív gyakorisága?
b) Melyik negyedórában jött a legtöbb gyerek?
c) Melyik negyedórában jött meg a 161., azaz a középső gyerek?
d) Hogyan számolnád ki, hogy mi volt a gyerekek átlagos érkezési ideje?
e) Ha semmi egyebet nem tudunk Gazsiról, akkor mire tippelnél, mikor érkezett az iskolába?

4. A hatodikos tankönyv 160. oldalán találkozhattál az alábbi kockahálóval. A rajzoláshoz, hajtogatáshoz és ragasztáshoz a következő utasítást adtuk meg: „A pettyeket is másold át az ábra szerint! A kettes melletti üres lapot hajtsd belülre, és erre ragaszd a 6 pettyes lapot!”



A kockát mi is elkészítettük, majd 100-szor feldobtuk. Az eredményeket a táblázatban láthatod:

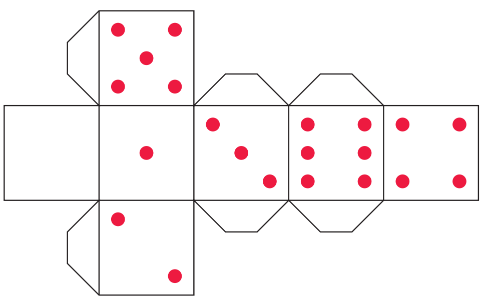
dobott szám	1	2	3	4	5	6
darab	29	19	17	12	15	8

a) Írd fel a dobott számok relatív gyakoriságát!
b) Mit gondolsz, miért az 1-es lett a módusz?
c) Dobj 100-szor egy szabályos dobókockával, és készíts a füzetedbe egy hasonló táblázatot! Hogyan tudnád gyorsítani a kísérlet elvégzését?

8. VALÓSZÍNŰSÉG

Sok olyan esemény zajlik körülöttünk, amelyről nem tudjuk megmondani, hogy bekövetkezik-e vagy nem. Ilyen az, hogy felelni fogsz-e holnap, hogy elalszol-e 9 előtt, vagy az, hogy a szüleid nyernek a lottón. Vannak olyan események is, amelyek nem emberi tevékenységtől függnek. Ilyen például az, hogy holnap esni fog-e az eső, vagy az, hogy az itt látható, papírból készített hamis kockánkkal 3-ast dobunk-e vagy sem. Otthon elkészítettük a hamis kockát, és elvégeztük a kísérletet 100-szor, majd még 100-szor és ismét 100-szor. A dobott hármasok számát egy táblázatba foglaltuk:

	100 dobás után	200 dobás után	300 dobás után
gyakoriság	31	57	87
relatív gyakoriság	$\frac{31}{100} = 0,31$	$\frac{57}{200} = 0,285$	$\frac{87}{300} = 0,29$



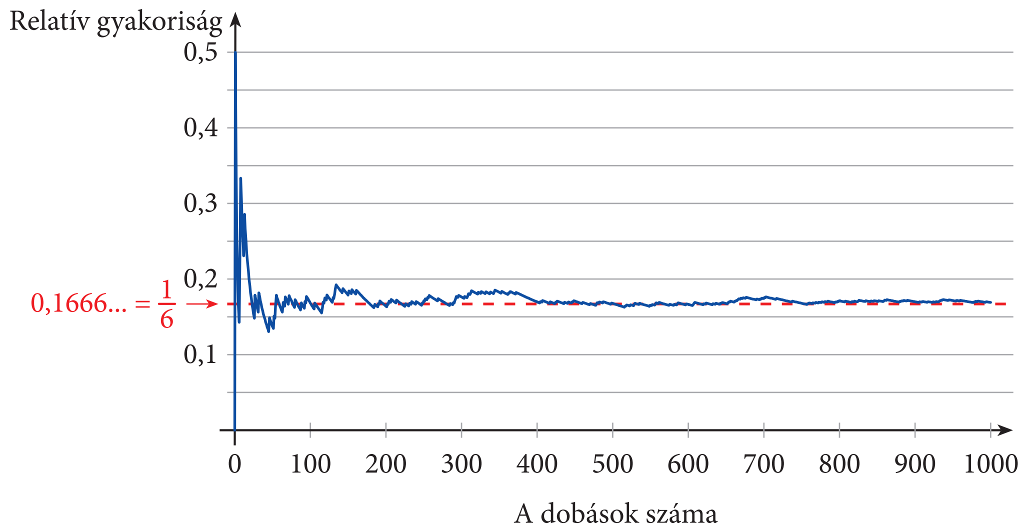
Ebben a kísérletben nem tudjuk pontosan megmondani, hogy mennyi a hármas dobás esélye, vagy más szavakkal, mennyire valószínű a hármas dobás, de azt látjuk, hogy a relatív gyakorisága nagyjából 0,3.

Nagyszámú kísérlet elvégzése esetén az esemény relatív gyakorisága egy érték körül ingadozik. Ezt az értéket tekintjük az esemény valószínűségének.

Van olyan eset, amikor egy esemény valószínűségét kísérletek sokaságával tudjuk körülbelül meghatározni. A szabálytalan kocka esetén azt mondhatjuk, hogy a hármas dobás valószínűsége körülbelül 0,3.

Végezzük el a kísérletünket egy szabályos kockával is. Mitől lesz egy kocka szabályos? Feltételezzük, hogy anyagát tekintve homogén, és lapjain rendre 1, 2, … , 6 pötty van.
A valószínűségek szempontjából ennyi elég is lenne, de mindig olyan dobókockát gyártanak, amelyen a szemközti lapokon lévő pöttyök összege 7.
Feldobtunk egy szabályos kockát 100-szor, majd még 100-szor és így tovább, összesen 1000-szer. A dobott hármasok előfordulására vonatkozóan a következő eredményt kaptuk:

dobások száma	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
gyakoriság	15	32	55	71	87	102	113	135	148	165
relatív gyakoriság	0,150	0,160	0,183	0,178	0,174	0,170	0,161	0,169	0,164	0,165



Láthatjuk, hogy a kísérletünk eredményeképpen a relatív gyakoriságok az $\frac{1}{6} = 0{,}666\ldots$ körül vannak. Szabályos kocka esetén nem fogunk mindig kísérleteket végezni. Feltételezzük, hogy minden lap ugyanolyan valószínűséggel fordul elő. Mivel a kockának hat lapja van, ezért ekkor a hármas dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$. Ebben az esetben persze minden lehetséges dobás valószínűsége $\frac{1}{6}$.

Érdekesség: Gerolamo Cardano 1550 körül írta *Liber de Ludo Aleae*, azaz *Könyv a szerencsejátékokról* című könyvét, de csak jóval halála után, 1657-ben adták ki. Ebben a könyvben áttekinti a kocka- és kártyajáték során felmerülő valószínűségszámítási kérdéseket, sőt sokat meg is old közülük. Például: „*A kocka lapjainak fele mindig az esélyek felét képviseli, […] ugyanakkora eséllyel dobok egyet, hármat és ötöt, mint kettőt, négyet és hatot.*”

1. PÉLDA

Anna, Matyi, Hanna és Zozó is jelentkezett, hogy gondját viseli a teremben lévő növényeknek. Hogy ne maradjon a feladat gazda nélkül, a gyerekek nevét felírták egy-egy cetlire. Összehajtották, és 40 héten keresztül minden hétre kisorsoltak közülük egyet, akinek azon a héten gondoskodnia kellett a növényekről. Milyen eséllyel húzták ki az egyes gyerekeket?

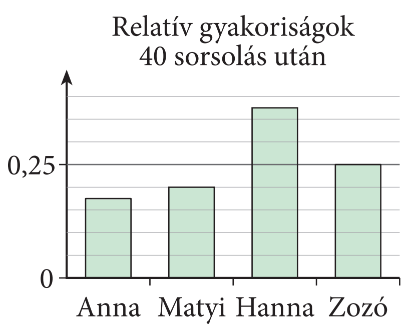
Megoldás

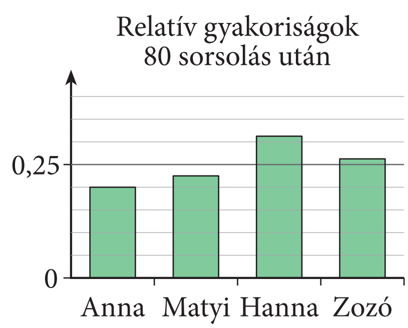
Mindenkinek egyforma esélye van arra, hogy sorra kerüljön, azaz bármelyik gyerek kihúzásának a valószínűsége $\frac{1}{4}$.

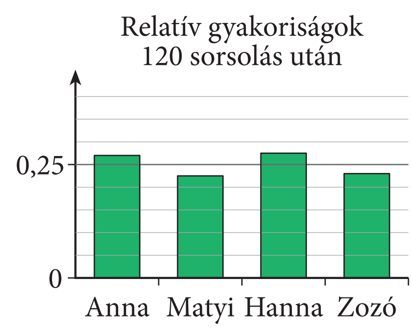
Az első példa sorsolását végre is hajtottuk, aztán még kétszer megismételtük, hogy több adatunk legyen.

	Anna	Matyi	Hanna	Zozó
40 sorsolás	7	8	15	10
Relatív gyakoriságok 40 sorsolás után	$\frac{7}{40} = 0{,}175$	$\frac{8}{40} = 0{,}2$	$\frac{15}{40} = 0{,}375$	$\frac{10}{40} = 0{,}25$
40 + 40 = 80 sorsolás	16	18	25	21
Relatív gyakoriságok 80 sorsolás után	$\frac{16}{80} = 0{,}2$	$\frac{18}{80} = 0{,}225$	$\frac{25}{80} = 0{,}3125$	$\frac{21}{80} = 0{,}2625$
40 + 40 + 40 = 120 sorsolás	32	27	33	28
Relatív gyakoriságok 120 sorsolás után	$\frac{32}{120} \approx 0{,}27$	$\frac{27}{120} = 0{,}225$	$\frac{33}{120} = 0{,}275$	$\frac{28}{120} \approx 0{,}23$

A táblázatban szereplő relatív gyakoriságokat a könnyebb áttekinthetőség kedvéért ábrázoltuk is.







Mind a táblázat, mind a grafikonok alapján azt látjuk, hogy a relatív gyakoriságok az $\frac{1}{4} = 0{,}25$ körül ingadoznak.

FELADATOK

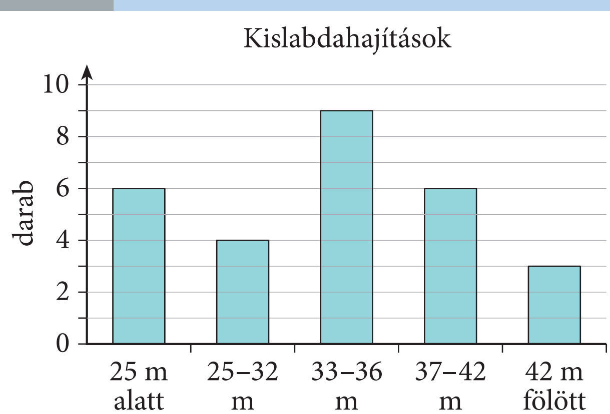
1. A grafikonon a 7.d tanulóinak kislabdahajítás eredményeit látjuk.

a) Mekkor a dobások módusza?

b) Mekkora lehet a dobások mediánja?

c) Mekkora lehet a dobások átlaga?

d) Változik-e az *a)* és a *b)* kérdésre adott válasz, ha kiderül, hogy Gazsi dobását elmérték. Nem 34, hanem 44 m.



2. Szokták mondani, hogy a vajas kenyér mindig a vajas oldalára esik. Ha egy vajas kenyér 100 feldobása esetén 64-szer a vajas felére esik, akkor állíthatjuk-e, hogy ennek a valószínűsége $\frac{64}{100}$? A kísérletet ne hajtsátok végre!

3. Egy sorsolást igazságosnak tekintünk, ha az egyes eseteknek ugyanakkora a valószínűsége. Felsorolunk néhány sorsolást, amellyel el akarjuk dönteni, hogy Anna vagy Zsolt vihesse le a szemetet. Válaszd ki az igazságosakat!

A) Feldobunk egy pénzérmét. Ha írás, akkor Anna, ha fej, akkor Zsolt viheti le a szemetet.
B) Felütünk egy könyvet valahol. Ha a lapon az „a” betű fordul elő korábban, akkor Anna, ha a „z” betű, akkor Zsolt viheti le a szemetet.
C) Feldobunk egy kockát. Ha 1-es vagy 6-os, akkor Anna, ha más, akkor Zsolt viheti le a szemetet.
D) Két gyufaszál közül az egyiknek letörjük a fejét, majd az ujjaink közé fogva Anna húzhat egyet. Ha a rövidebbet húzza, ő viheti le a szemetet, ha nem, akkor Zsolt.
E) Célba dobnak. Aki előbb tudja az almacsutkát tíz lépésről a szemetesbe dobni, az viheti le a szemetet.

4. Anna, Matyi, Hanna és Zénó közül kisorsoltak egy növényfelelőst az első hétre.

a) Mi a valószínűsége, hogy lányt sorsoltak?
Az első 40 héten feljegyezték, hogy mikor kit sorsoltak ki. Az egyes gyerekeket a nevük kezdőbetűjével jelölték.
AHHZZHMAMMHHHHMHHZHAHM-
HZZAAHHZZMAZZAMMHZ
b) Készíts táblázatot a kisorsolt lányok számának változásáról!
c) Ábrázold a kisorsolt lányok gyakoriságának és relatív gyakoriságának változását egy pontdiagramon!

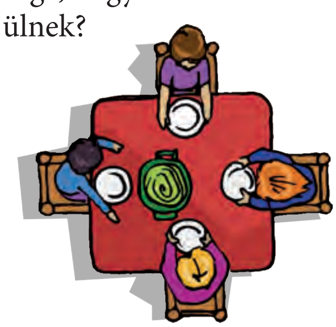
5. Feldobunk egy szabályos dobókockát.

a) Mi a valószínűsége, hogy 6-os lesz?
b) Mi a valószínűsége, hogy 1-es lesz?
c) Mi a valószínűsége, hogy páros lesz?
d) Mi a valószínűsége, hogy prímszám lesz?
e) Mi a valószínűsége, hogy 4-nél nagyobb lesz?
f) Adj meg olyan eseményt a kockadobáshoz, amelynek valószínűsége $\frac{1}{3}$!
g) Adj meg olyan eseményt a kockadobáshoz, amelynek valószínűsége $\frac{2}{3}$!

6. A 7. d-ben kisorsolják, hogy ki kit fog megajándékozni karácsonykor. A tanulók neveit felírják egy papírdarabra, összehajtogatják, beleteszik egy dobozba, ahol összekeverik és egyesével húznak belőle. 12 fiú és 16 lány jár az osztályba, köztük Helénke. Matyi húz elsőnek.

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Helénkét húzza?
b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy lányt húz?

7. Anna, Berta, Hanna és Zsu egy négyszemélyes ebédlőasztalnál ülnek. Nincs rögzített helyük, mindenki oda ül, ahová akar, azaz minden ülésrend egyformán valószínű. Rajzold fel a füzetedbe az összes lehetséges ülésrendet, ha csak az számít, hogy ki ül ki mellett! Mennyi a valószínűsége, hogy Anna és Hanna egymással szemben ülnek?



9. ÖSSZEFOGLALÁS

A függvények jellemzőinek, tulajdonságainak megismerésével sok hétköznapokban felmerülő problémát is megoldhatunk. A fizika, kémia tantárgyakban a kísérletek eredményeinek értékeléséhez érdemes grafikonokat készíteni. Ezek megrajzolásában, elemzésében segíthetnek a most tanult ismeretek.
A fejezetben előfordult főbb fogalmak, alapismeretek:

Egy hozzárendelés lehet
- nem egyértelmű
- egyértelmű,

Az egyértelmű hozzárendelést függvénynek nevezzük.
A függvény jelölése például $f\colon x \mapsto 3x$, vagy $f(x) = 3x$.
Egy függvény megadása során meg kell adni az alaphalmazt, a képhalmazt és a hozzárendelési szabályt.
Függvények kapcsán beszéltünk értelmezési tartományról és értékkészletről.
Függvényeket gyakran ábrázolunk grafikonon.
Gyakoroltuk, hogyan olvasunk le információt grafikonról.
Szabályokat kerestünk és ábrázoltunk lineáris függvényeket.

Átismételtük a régebben is használt átlagszámítást, és megismerkedtünk a medián és a módusz fogalmával.
A medián a nagyság szerint sorba rendezett adatok közül a középső, vagy ha két középső elem van, akkor azok átlaga.
A módusz az adatok közül a leggyakoribb. Ha több leggyakoribb adat is van, akkor több módusza is lehet az adatoknak.
Egy adat gyakorisága az, hogy hányszor fordul elő.
Egy adat relatív gyakorisága az, hogy arányában hányszor fordul elő az összes adathoz képest.
Egy esemény valószínűségének azt az értéket tekintjük, amely körül a relatív gyakoriság ingadozik, ha a kísérletek száma nagy.
Vannak esetek, amikor nem végzünk kísérleteket, hanem logikai alapon határozzuk meg a valószínűséget.

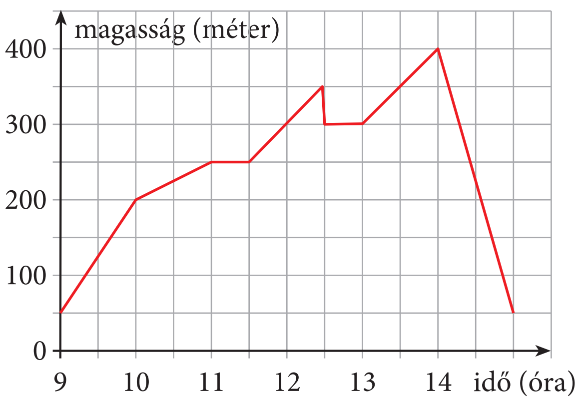
FELADATOK

1. Sorold fel a hozzárendelések fajtáit, és mondj példát minden típusra!

2. Mit nevezünk
a) képhalmaznak;
b) alaphalmaznak;
c) értékkészletnek?

3. Hétfő reggel 6 órakor a hőmérséklet 14 °C volt. Egyenletesen melegedett az idő, 10 órakor már 22 °C-ot mértek. Ekkor feltámadt a szél és a hőmérséklet egy óra alatt 2 °C-ot csökkent. A szélvihar elmúltával ismét egyenletesen melegedett a levegő hőmérséklete, így délután 2 órakor 24 °C-ot mértek.
a) Készíts grafikont a hőmérséklet változásáról!
b) Hány fok volt 8 órakor?
c) Hány órakor volt a hőmérséklet 21 °C?
d) Mikor melegedett gyorsabban a levegő hőmérséklete, a szél megérkezése előtt vagy utána?

4. Egy sziklamászó útjáról készült az itt látható grafikon. Egy 50 méteres kötéllel biztosította magát. A vízszintes tengelyen az időt, a függőleges tengelyen a hegymászó magasságát jelöltük.



a) Milyen magasról indult a hegymászó?
b) Mikor mászott fölfelé a leglassabban?
c) Mikor mentette meg az életét a biztosítókötél?
d) Milyen magasra mászott a sziklafalon?
e) Mikor tartott pihenőt?
d) Hány órára ért vissza a kiindulási helyre?

5. Gyűjts össze minél több módszert függvények megadására!

6. Minden számhoz rendeljük hozzá a –2-szeresénél 5-tel nagyobb számot. Melyik pont illeszkedik a függvény grafikonjára?
$A(0; 5)$; $B(2; 1)$; $C(-2, 9)$; $D(4; -3)$.

7. Ábrázold táblázat segítségével az
$f : x \mapsto 2x + 2$; $g : x \mapsto x + 2$; $h : x \mapsto -2x + 2$
függvényeket!

8. Készíts táblázatot a képlettel megadott lineáris függvényekhez, és ábrázold koordinátarendszerben a függvények grafikonját!
$f : x \mapsto 2x - 2$; $g : x \mapsto -2x + 3$; $h : x \mapsto \frac{3}{2}x + 2$.

9. Az osztályban az év végi matekfelmérők eredménye a következő volt: 3 db 2-es, 5 db 3-as, 12 db 4-es és 8 db 5-ös.
a) Határozd meg a felmérők átlagát, mediánját és móduszát!
b) Készíts az adatok alapján oszlopdiagramot!
c) Egy tanulót választva mi a valószínűsége, hogy 5-öst kapott?

10. A képen látható szabályos dobó„kockának” 12 lapja van, 1-től 12-ig megszámozva.

a) Mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobunk?
b) Mennyi a valószínűség, hogy páros számot dobunk?
c) Mennyi a valószínűsége, hogy prímszámot dobunk?
d) Mennyi a valószínűsége, hogy legalább 6-ost dobunk?

11. A Harry Potter sorozat filmjeinek hossza 146, 155, 142, 153, 133, 153, 150 és 130 perc. Amikor Gazsi bemenekült az eső elől a moziba, akkor csak azt látta, hogy valamelyik Harry Potter filmet vetítik.
Mi a valószínűsége, hogy
a) 2 óránál rövidebb a film?
b) 2,5 óránál hosszabb a film?
c) 2,5 óránál rövidebb a film?