OFI

ÚJGENERÁCIÓS tankönyv

5

Matematika

sorozat átlag arány
kör tizedes tört szög
adatgyűjtés mérés gömb
többszörös

A kiadvány megfelel az 51/2012. (XII. 21.) EMMI rendelet: 2. sz. melléklet: Kerettanterv az általános iskolák 5–8. évfolyama számára 2.2.03. előírásainak.

Tananyagfejlesztő: Gedeon Veronika, Korom Pál József, Számadó László, Tóthné Szalontay Anna, dr. Wintsche Gergely

Alkotószerkesztő: dr. Wintsche Gergely

Vezetőszerkesztő: Tóthné Szalontay Anna

Tudományos szakmai lektor: Rózsahegyiné dr. Vásárhelyi Éva

Pedagógiai lektor: Beck Zsuzsanna

Nyelvi lektor: Szőnyi László Gyula

Olvasószerkesztő: Füleki Lászlóné, Mikes Vivien

Fedél: Slezák Ilona terve alapján készítette Kováts Borbála

Látvány- és tipográfiai terv: Gados László, Orosz Adél

Illusztráció: Létai Márton

Szakábra: Szalóki Dezső, Szalókiné Tóth Annamária

Fotók:
Wikimedia Commons; Flickr: a hátsó borító képe (CreativeTools.se); Pixabay; MorgueFile: címlapkép.
Projekt keretében készült fotók: Létai Márton, Orosz Adél, dr. Wintsche Gergely

A tankönyv szerkesztői köszönetet mondanak a korábban készült tankönyvek szerzőinek. Az ő általuk megteremtett módszertani kultúra ösztönzést és példát adott e tankönyv/munkafüzet készítőinek is. Ugyancsak köszönetet mondunk azoknak az íróknak, költőknek, képzőművészeknek, akiknek alkotásai tankönyveinket gazdagítják. Köszönjük azoknak a tanároknak és diákoknak a munkáját, akik hasznos észrevételeikkel és javaslataikkal hozzájárultak e tankönyv/munkafüzet végső változatának kialakításához.

ISBN 978-963-682-968-1

A kiadásért felel: dr. Kaposi József, főigazgató
Raktári szám: FI-503010501/1

Műszaki szerkesztő: Orosz Adél
Grafikai szerkesztő: Kováts Borbála
Nyomdai előkészítés: Gados László, Hontvári Judit
Terjedelem: 26,78 (A/5 ív), tömeg: 564 gramm
1. kiadás, 2016
Az újgenerációs tankönyv az Új Széchenyi Terv Társadalmi Megújulás Operatív Program 3.1.2-B/13-2013-0001 számú, A Nemzeti alaptantervhez illeszkedő tankönyv, taneszköz és Nemzeti Köznevelési Portál fejlesztése című projektje keretében készült.
A projekt az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

A tankönyvvé nyilvánítási eljárásban közreműködő szakértők:
Kónya István, Nagy Károly

Engedélyszám:
TKV/2685-13/2016 (2016.03.24–2021.08.31)

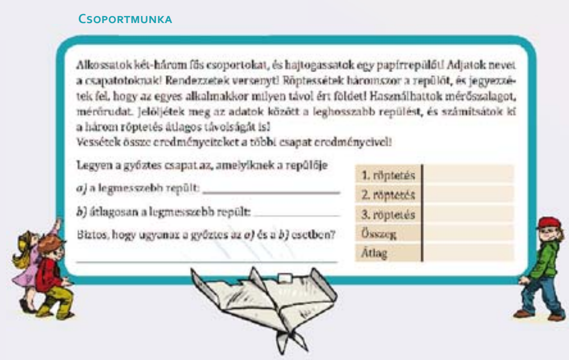
Nyomtatta és kötötte:
Felelős vezető:
A nyomdai megrendelés törzsszáma:

Üdvözlünk az 5. osztályban!

Ez az oldal bemutatja
az új matematika tankönyvedet,
és segít, hogy megismerd
a könyvben használt ismétlődő
motívumokat,
és jelöléseket.

Minden fejezet elején találsz egy rövid történetet.

Az új ismereteket példákkal (sárga alap), gyakran játékkal (szaggatott piros keret), vagy csoportos feladattal (kék keret) vezetjük be.



A lecke végén (zöld keretben) feladatokat találsz. Ezeket nehézségük szerint három csoportba soroltuk:

1. könnyű,
2. közepes,
3. kicsit nehéz.

A munkafüzetben ugyanazokat a címeket találod, mint a tankönyvben. A munkafüzet példái és játékos feladatai is segítenek a tanulásban.

Az otthoni kutatómunkának ajánlott feladat lehetőséget ad az új dolgok önálló felfedezésére.

JÓ SZÓRAKOZÁST!

TARTALOM

TARTALOM

I. Az egész számok

Az ötödikesek a nyár végi osztálykirándulásról tartottak hazafelé. Űrhajójuk éppen a Mars közelében haladt el, amikor Attila – akit maguk között Okoskának neveztek – megszólalt.

– Jé, a távolságmérő pont 96 000 000-n áll! – Mire Zsombi odanézett, a kijelző már 95 995 012-re ugrott.

– Azt mutatja, hogy hány kilométerre vagyunk a Földtől.

– Akkor már alig van hátra valami! – sóhajtott Panni szomorkásan. A csillagok bámulását ugyan unta egy kissé, de azt tudta, hogy a kirándulás után föciből kevesebbet kell majd tanulnia.

– Észrevettétek, hogy minden műszerünk hármasával csoportosítva írja ki a számjegyeket? Várjatok, megállítom! Most éppen 95 014 324-et mutat – mondta Attila, miközben kimerevítette a számot a kijelzőn. – Az utolsó hármas csoport kiolvasása egyszerűen háromszázhuszonnégy. Jobbról a második hármas csoport (014) az ezresek számát adja, és tizennégyezernek olvassuk. Az eleje (95) a milliók számát méri, kiolvasva kilencvenötmillió. Amikor megállítottam a számlálót, éppen kilencvenötmillió-tizennégyezer-háromszázhuszonnégy kilométerre voltunk otthonról!

– Elég – hörögte Gazsi elborult tekintettel –, ezt mindenki tudja. Ha nem hagyod abba, megjárod. – Eközben Panni, orrát a kukucskáló ablakhoz nyomva arra nézett, amerre a Földet sejtette.

1. A SZÁMOK KIALAKULÁSA, A RÓMAI SZÁMOK

Grrr, az ősember egyik fia vigyázott a törzs szelídített törpemoáira. A törzsnek csak néhány szava volt a számok kifejezésére. A „fej” egyet jelentett, a „láb” kettőt, míg a „kéz” ötöt.

a) Grrr „kéz”, „kéz”, „láb”, „fej” darab törpemoát őrzött. Vagyis hányat?
b) Egyszer ébredés után a lenti képen látható törpemoákat látta. Hány madár veszett el?

c) A „fej”, „láb”, „kéz” számokkal fejezd ki, hányan vagytok jelenleg a teremben!
d) Nézz utána az interneten, hogy milyen állat a moa!

Az ősidők számolási szokásait nehéz tanulmányozni, mert az ősemberek még nem írtak, így kevés nyoma maradt számolásaiknak. Valószínű, hogy az ősemberek egy része csak az „egy”, „kettő”, „sok” kifejezéseket használta számolásra. Bizonyos leletek azonban arra utalnak, hogy voltak csoportok, amelyek magasabb szintű matematikát is alkalmaztak, a csillagok járását figyelték, időt mértek.

Az ókori civilizációkból már maradtak fenn írásos emlékek. Körülbelül 4000 évvel ezelőtt **Babilonban** agyagtáblákra írtak, és helyiértékes számokat használtak.

Az ókori Rómából származik a **római számírás**. Néhány számot betűkkel jelöltek, és ezek segítségével írták le a többi számot. A római számokkal már korábban is találkoztatok.

A római számírás összeadó jellegű volt. Az 1987-et az egy (I), tíz (X), a száz (C) és az ezer (M) segítségével kezdetben így írhatták le: MCCCCCCCCCXXXXXXXXIIIIIII.

Mivel így nagyon hosszú volt a szám, bevezették a félhelyiértékeket. A félhelyiértékek, az öt (V), az ötven (L) és az ötszáz (D) segítségével tömörebben írható le a szám: MDCCCCLXXXVII.

A XIV–XV. században még egyszerűbbé tették a római számírást. **Négy azonos jel leírása helyett kivonást alkalmaztak.** Így lett a DCCCC helyett CM, aminek jelentése M – C, azaz 1000 – 100. Az 1987 így végül MCMLXXXVII lett.

A SZÁMOK KIALAKULÁSA, A RÓMAI SZÁMOK

Példa

Írd le helyiértékes megadással az MCMXLIX római számot!

Megoldás

M = 1000, CM = 900, XL = 40, IX = 9.

A számok összege 1949.

1 = I	**10 = X**	**100 = C**	**1000 = M**
2 = II	**20 = XX**	**200 = CC**	**2000 = MM**
3 = III	**30 = XXX**	**300 = CCC**	
4 = IV	**40 = XL**	**400 = CD**	
5 = V	**50 = L**	**500 = D**	
6 = VI	**60 = LX**	**600 = DC**	
7 = VII	**70 = LXX**	**700 = DCC**	
8 = VIII	**80 = LXXX**	**800 = DCCC**	
9 = IX	**90 = XC**	**900 = CM**	

Feladatok

1. Nem csak a római számírás különbözik az Európában is használt számírástól, hanem a keleti-arab számok is.

a) Írd le arabusul a 785-öt!

b) Barátunk, Hamilkar megadta a telefonszámát: +٣٦ ٢١٦ ٧٨٨١٢٤٤ .
Írd át általunk használható telefonszámra!

Az arab telefonbillentyűzeten szerepelnek a Magyarországon is használt számjegyek, valamint a valódi arab számjegyek.

2. Írd át a római számokat az általunk használt helyiértékes számrend szerint!

a) XIV; *b)* LXVI; *c)* XLVIII; *d)* CCLXXIII; *e)* CDXXXIX; *f)* DCLXXVII;
g) DCCCVIII; *h)* CMXXV; *i)* MI; *j)* MDLV; *k)* MXLVI; *l)* MMCCXXII.

3. Írd le az általunk használt helyiértékes írásmód szerint a következő római számokkal megadott évszámokat!

a) DCCCXXXIX; *b)* CMXI; *c)* MCXI; *d)* MCMXLV; *e)* MCMXCIX; *f)* MMI.

4. Írd le a következő számokat római számokkal!

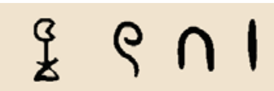
a) 249; *b)* 357; *c)* 497; *d)* 578; *e)* 841; *f)* 945;
g) 1067; *h)* 1234; *i)* 1403; *j)* 1556; *k)* 1631; *l)* 1945.

KUTATÓMUNKA

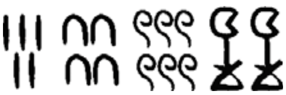
Fotózzátok le az épületeken látható római számokat az iskolátok vagy lakóhelyetek közelében! Kereshettek ilyen képeket az interneten is. Több találatot kaptok, ha angolul írjátok be a kereső szavakat. Vetítsétek ki a képeket, és mindenki írja le a füzetébe a római és a megfelelő arab számokat is!

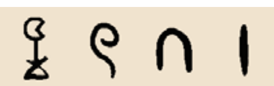
2. A HELYIÉRTÉKES ÍRÁS

1000	100	10	1



Ókori egyiptomi számjegyek





2	6	4	5

Helyiérték-táblázat *óegyiptomi helyiérték-jelekkel*

Négyezer éves papiruszleletek szerint az ókori egyiptomiak már tízes számrendszert használtak. Külön jelük volt az 1, a 10, a 100 és az 1000 írására is.

Felhasználva az ókori egyiptomi számjegyeket felírhatjuk a 2645-öt. A szám 2 darab 1000-es, 6 darab 100-as, 4 darab 10-es és 5 darab 1-es jegyet tartalmaz. Az egyiptomiak jobbról balra írtak, így jobb oldalon látható a 2 darab ezres, aztán balra haladva a 6 darab százas jele, a 4 tízes jele és végül bal oldalon az 5 egyes jele.

A számot ma úgy is leírhatnánk, hogy megadjuk, melyik jelből hány darab van:

2 db , 6 db , 4 db , 5 db .

A számot megadhatjuk még egyszerűbben is. Egy táblázat felső sorába írjuk a jeleket (, , ,), az alsó sorába pedig azt, hogy az adott jelből hány darabra van szükség.

Elhagyhatjuk a , , és jeleket, ha megállapodunk abban, hogy a számjegyek helye határozza meg, hogy egyest, tízest, százast vagy ezrest jelentenek a számban.

Megállapodás szerint a jobbról az első helyen álló számjegy (5) az egyeseket, a második helyen lévő számjegy (4) a tízeseket, a harmadik helyen lévő számjegy (6) a százasokat, a legelső számjegy (2) pedig az ezreseket jelöli. A számjegyek helye megadja azok **helyiértékét** (egyesek, tízesek, százasok ...), az óegyiptomi jelekre így már nem is lesz szükségünk.

ezresek	százasok	tízesek	egyesek
2	6	4	5

A számjegy **alaki értéke** azt mutatja meg, hogy az adott helyiértékből hány darab szerepel a számban. Az ezresek helyén álló 2 alaki értékű szám **valódi értéke** 2000, amely a helyiérték (1000) és az alaki érték (2) szorzata.

Ahogy szerte a világban, úgy Magyarországon is a **helyiértékes számírást** használjuk. Az általunk használt **számjegyek** a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

A 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ... számokat **természetes számoknak** nevezzük.

Fontos!

Ha valamelyik helyiérték hiányzik a számból, akkor nem hagyhatjuk ki, mert a tőle balra lévő számjegyek eggyel jobbra csúsznának, így helyiértékük megváltozna. Például:

A hiányzó helyiértékhez tartozó számjegy a 0.

Példa

Határozd meg a 328 számjegyeinek valódi értékét!

Megoldás

A százas helyiértéken a 3 alaki értékű szám található, ezért a valódi értéke 300. A 2 alaki értékű szám a tízes helyiértéken áll, ezért valódi értéke 20. Az egyesek helyén lévő 8 alaki értékű szám valódi értéke is 8.

helyiérték	százasok	tízesek	egyesek
alaki érték	3	2	8
valódi érték	300	20	8

Kutatómunka

Gyűjtsétek össze, hogy milyen címletű forint, illetve euró érméket és bankjegyeket használunk! Készítsetek táblázatot, és írjátok bele, hogy melyik magyar bankjegyen, kinek az arcképe látható!

1, 10, 100, 1000, 10 000, ... a helyiértékek sorát nem kell 10 000-nél abbahagyni. A 100 000-es szám tízszeresének azonban már külön neve van, ez az 1 000 000, azaz kiolvasva egymillió. A számok sorának itt sincs vége, a milliárdok, billiók, ... jönnek.

Milliárdok		Milliók			Ezresek					
...	milliárd	százmillió	tízmillió	millió	százezer	tízezer	ezer	száz	tíz	egy
	1 000 000 000	100 000 000	10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1
10·	10·	10·	10·	10·	10·	10·	10·	10·	10·	

Sokszor fogjuk használni a helyiérték-táblázatot. Segítséget jelenthet a számok szorzásánál, osztásánál, a tizedes törteknél és számos más anyagrésznél is.

Feladatok

1. Rajzold le a füzetedbe, hogyan írták az egyiptomiak a következő mondatokban lévő számokat.

a) Az áradás 4 nappal később következett be, mint tavaly.
b) A nagy fáraó uralkodásának első 18 éve békét hozott.
c) Mind a 128 adófizető beszolgáltatta a rájuk kirótt vízhasználati és gabona adót.
d) 1200 katona várja parancsodat, a holnapi csatában.
e) Hét bőséges esztendőt hét szűk termést hozó esztendő követ.
f) Mind a 40 testőröd felsorakozott a kérésedre.
g) Őszentsége, a hatalmas fáraó papjainak száma 2884.

2. Írd fel azokat a 2, 3 és 4 jegyű számokat, amelyek

a) csak a 8-as számjegyet tartalmazzák!
b) csak a 8-as vagy a 9-es számjegyet tartalmazzák!
c) csak 0 vagy 1 számjegyeket tartalmaznak!
d) csak 0, 1, 2 vagy 3 számjegyeket tartalmaznak!

3. Írd fel a számot, ha
a) 8 tízesből és 3 egyesből áll!
b) 3 tízesből és 8 egyesből áll!
c) 3 százasból, 2 tízesből és 8 egyesből áll!
d) 3 százasból és 8 egyesből áll!
e) 3 tízesből és 8 százasból áll!

4. Írd fel a számot, ha
a) 3 egyesből, 8 tízesből és 7 százasból áll!
b) 9 tízesből, 7 százasból és 2 egyesből áll!
c) 4 ezresből, 7 egyesből és 5 százasból áll!
d) 12 egyesből, 13 tízesből és 9 százasból áll!

5. Készíts a füzetedbe helyiérték-táblázatot tízezerig!
a) A megfelelő helyiérték alá írd be a számok számjegyeinek alaki értékét: 20 123, 345!
b) A megfelelő helyiérték alá írd be a számok számjegyeinek valódi értékét: 3567, 2000, 12 009!

6. Az alábbiak közül melyek azok a háromjegyű számok, amelyeknél a tízes helyiértéken álló számjegy alaki értéke 5?
253; 435; 551; 355; 525; 546; 357; 555.
Hány ilyen háromjegyű szám van összesen?

7. A Bojj bolygón is tízes számrendszert használnak, de fordított sorrendben írják a helyiértékeket, pont úgy, mint a régi egyiptomiak. Mit jelent náluk a 2341 szám? Hogy írnád le a háromezer-ötvenkettőt a Bojj bolygón?

8. Éva, Sándor és Edit testvérek. Zsebpénzüket a következő címlettáblázattal tartják nyilván.

	ezresek	ötszázasok	kétszázasok	százasok	ötvenesek	húszasok	tízesek
Éva		5	2	1	1		3
Sándor	1		1	3	2	5	1
Edit	2	2		1	2	1	1

Számold ki, hogy mennyi pénze van a gyerekeknek! Melyiküknek van a legtöbb pénze?

9. *a)* Írd fel a legkisebb és a legnagyobb kétjegyű számot! Hány kétjegyű szám van?
b) Írd fel a legkisebb és a legnagyobb háromjegyű számot! Hány háromjegyű szám van?
c) Írd fel a legkisebb és a legnagyobb négyjegyű számot! Hány négyjegyű szám van?

10. Egy ötjegyű számnak csak három számjegyét ismerjük. Döntsd el, hogy mi lehet a szám, ha a következőket tudjuk róla! A tízes helyén álló számjegy egyenlő az egyes és a százas helyiértéken álló számok alaki értékének összegével. Az ezresek helyén álló szám alaki értéke a tízezres helyiértéken álló szám alaki értékének kétszerese.

Figyelmesen szemlélve a 9 908 798 számot, leírásában érdekes dolgot vehetünk észre: az érthetőség kedvéért hármas csoportosítással írtuk fel. A nagyobb számok leírásában, elolvasásában, kiejtésében és számjegyekkel való leírásában segít a hármas csoportosítás.

A számok elé tetszőleges számú nullát írhatunk: a 013, a 0 013, a 00 013, stb. számok ugyanazt a számot jelölik, a 13-at. Az egyszerűség kedvéért azonban a számok elé nem írunk felesleges nullákat.

Hogyan olvassuk ki a számot, ha az egyik hármas csoport csupa nullából áll, például a 10 000 001-et?

A csupa 0-ból álló hármas csoportot nem mondjuk ki. Az idegenül hangzó tízmillió-nullaezer-egy helyett tízmillió-egyet mondunk.

Olvassátok fel hangosan a térképen látható számokat!





CSOPORTMUNKA

Mindenki írjon fel egy írólapra egy legalább 6, legfeljebb 10 jegyű egész számot! Egyesével jöjjetek ki, és álljatok sorba nagyság szerint, a számotoknak megfelelő helyre! Olvasd fel hangosan a saját számodat!

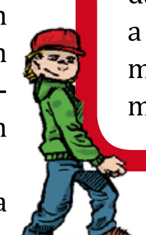
Példa

Olvasd fel hangosan a következő szöveget!
A Földön összesen 149 157 000 km^2 területű szárazföld található. Ausztrália és Óceánia a legkisebb kontinens: területe csupán 8 510 000 km^2. Ehhez képest Európa területe 10 508 000 km^2. Közép- és Dél-Amerikáé 20 566 000 km^2, Észak-Amerikáé 21 515 000 km^2, Afrikáé 30 319 000 km^2, Ázsiáé pedig 44 411 000 km^2.

A Föld lakóinak száma például 2015. november 1-én 7 377 843 986, azaz hétmilliárd-háromszázhetvenhétmillió-nyolcszáznegyvenháromezer-kilencszáznyolcvanhat. Gyakran nincs szükség arra, hogy egy számot ilyen pontosan ismerjünk. A kisebb számok esetében a megtanult módon kerekítünk ezresekre, milliókra, vagy amire éppen szükségünk van.
Mondhatjuk, hogy a Föld lakóinak száma körülbelül 7 000 000 000 hétmilliárd.

PÁROS MUNKA

Mindenki írjon fel egy számot betűvel egy papírdarab egyik oldalára, a másik oldalra pedig ugyanezt a számot számjegyekkel! Az egyik oldalát mutasd meg a padtársadnak, ő pedig írja le, mi van a cetli másik oldalán! Két-háromszor cseréljetek szerepet!




3. A SZÁMJEGYEK HÁRMAS CSOPORTOSÍTÁSA ÉS A SZÁMOK KIOLVASÁSA

Csoportmunka

Kati nyakláncát a következő kétjegyű számok díszítették ebben a sorrendben: 10, 20, 30, 40. Mit mondott Peti, amikor hármas csoportosítású számként olvasta ki Kati nyakláncát? Milyen más sorrendben fűzheti fel Kati a számokat? Álljatok össze négyesével! Egyikőtök írja le a nyaklánc számaiból kirakható 10-zel, a többiek a 20-szal, 30-cal és 40-nel kezdődő számokat! Hány esetet találtatok? Olvassátok fel a kapott nyolcjegyű számokat!

Feladatok

1. Csoportosítsd, és olvasd ki hangosan a következő számokat!
a) 56702; *b)* 406211; *c)* 101011100; *d)* 22022020; *e)* 123456789.

2. Ejtsd ki hármas csoportosítású számként a szüleid telefonszámát, vagy a sajátodat!

3. Zoltán papírlapokra írta a következő számjegyeket: 0; 1; 1; 2; 3; 3; 5; 6. Olvasd ki a számjegyekből kirakható legnagyobb és legkisebb nyolcjegyű számot, ha minden papírt csak egyszer lehet felhasználni!

4. A számok kiolvasásánál jobbról a negyedik csoportot milliárdnak nevezzük. Mondd ki a következő számokat a „milliárd” szó alkalmazásával!
a) 3 456 123 000; *c)* 123 123 123 123;
b) 19 000 000 000; *d)* 26 513 032 millió.

5. Tomi „lusta” SMS-t írt beteg barátjának. A „lusta” jelző azt jelenti, hogy a szövegben előforduló számnevek helyett számjegyeket írt. Tomi a levelet úgy titkosította, hogy a számok helyett csillagot írt, és a számokból képzett hétjegyű számot később küldte el. Mondd ki a számot!

6. Mondd ki azt a hétjegyű számot, amelynek első négy számjegye növekedő sorrendben álló páros szám, az utolsó három számjegye pedig a középsőre szimmetrikus!
(Az ilyen tulajdonságú számokat, amelyek visszafelé olvasva is ugyanazt adják, palindrom számoknak nevezzük. Ilyen például a 121 vagy a 2002 is.)
Keress palindrom szavakat: görög, apa, … !

A TERMÉSZETES SZÁMOK HELYESÍRÁSA

Ha egy számot betűkkel vagy számokkal írunk le, például három vagy 3, akkor ezt a szót a számnevek közé soroljuk. A számok jegyeinek hármas csoportokba írása a számok szöveggel való leírását is segíti.

Ha a számokat betűkkel írjuk le, akkor a magyar helyesírás szerint a számokat 2000-ig egybeírjuk. A 2000-nél nagyobb számokat hármas csoportokra bontjuk, majd az egyes csoportokat leírjuk, és a csoportokat kötőjellel választjuk el egymástól.

Példa

Írd le a következő számokat!
1999, 2000, 2001.

Megoldás

Ezerkilencszázkilencvenkilenc, kétezer, kétezer-egy.

Feladatok

1. Írd le betűkkel a következő számokat!
a) 46; *b)* 367; *c)* 1789; *d)* 5678; *e)* 23 456; *f)* 103 206.

2. Gábor és Éva vitatkozik, hogy az alábbi számokat melyikük írta helyesen. Segíts nekik eldönteni! (Lehet, hogy mind a ketten helyesen vagy helytelenül írták le a számot.)

	Gábor írása	Éva írása
234	kétszázharmincnégy	kettőszázharmincnégy
1205	egyezerkétszázöt	ezerkétszázöt
2567	kétezer ötszázhatvanhét	kétezer-ötszázhatvanhét
26709	huszonhatezer-hetesszázkilenc	huszonhatezerhétszázkilenc

3. Kati húga a következő számokat írta le, sajnos eléggé összevissza. Csoportosítsd hármasával a számjegyeket a füzetedben, és írd melléjük szöveggel a számokat!
a) 23 45 45 3; *b)* 45678920; *c)* 5000 34 3; *d)* 12 34.

4. Írd le a következő számokat a füzetedbe úgy, hogy a számjegyeik hármasával legyenek csoportosítva! Állítsd a számokat növekvő sorrendbe!
a) Kétmillió-négyszáznyolcvanezer; *b)* kétmillió-négyszáznyolcezer; *c)* kétmillió-negyvennyolcezer; *d)* kétmillió-negyvennyolcezer-kettő; *e)* kétmillió-négyezer-nyolcszáz.

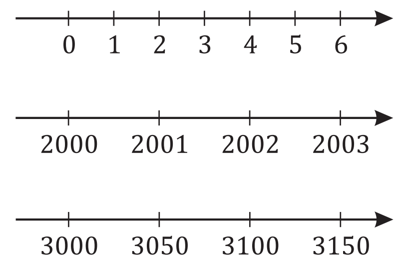
KUTATÓMUNKA

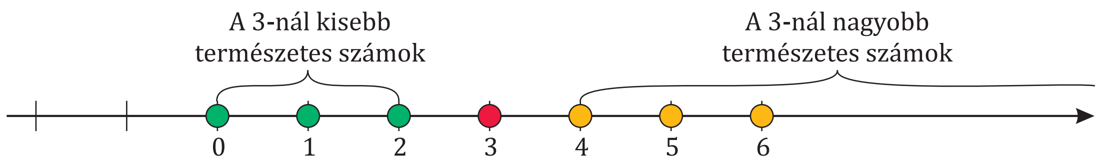
Keresd meg, például az interneten, a következő három esemény évszámát!
– Kálmán, magyar királyi herceg és halicsi király fogságba esik, miután seregeit kiűzik Galíciából.
– A XIX. századi magyar forradalom és szabadságharc kezdetének évszáma.
– A legutolsó londoni olimpia megrendezésének évszáma.

Észreveheted, hogyha az évszámok közül kettőt egymás után írsz, akkor a középső négy számjegy megadja a harmadik évszámot. Írd le betűvel mind a három évszámot és az összeillesztéssel kapott nyolcjegyű számot is!

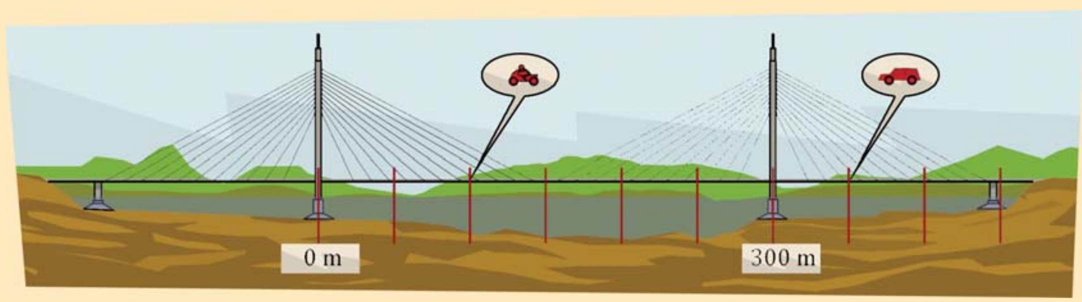
5. A SZÁMOK ÁBRÁZOLÁSA A SZÁMEGYENESEN

A természetes számokat **számegyenesen** szemléltethetjük. A számegyenes egyik végére tett nyíllal megadjuk, hogy melyik irányban növekednek a számok. Két szám bejelölésével megadjuk számegyenes beosztását. Ez a két szám gyakran a 0 és az 1, de választhatunk másik számokat is.
A számegyenesen még nagyon sok számnak jut hely! Ha új számokkal ismerkedünk meg, akkor azok helyét a számegyenesen is megkeressük.





Példa



A Megyeri híd Nagy-Duna-ág feletti része

a) Mekkora beosztás látható a rajzon?
b) Hányadik méternél tart a motorkerékpáros?
c) Hány méternél van az autó?

Megoldás

a) A 0 és a 300 méter közötti szakasz 6 részre oszlik, így egy beosztás 50 méteres.
b) A 0 métertől a második beosztásnál található a motorkerékpáros, ezért 100 méternél van.
c) Az autó a 0 métertől 350 méterre van.

KUTATÓMUNKA

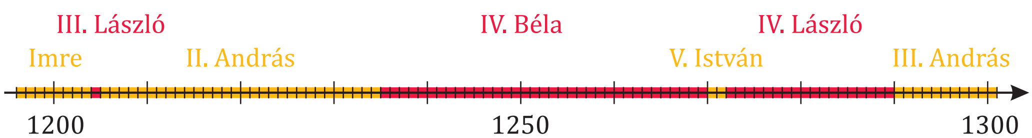
Rajzolj a füzetedbe egy számegyenest! Add meg a növekedési irányt! A közepén jelöld be a 2000. évet, és mindkét irányba mérj fel 10-10 évet! Keresd meg, hogy melyik esztendőben történtek a következő események, és jelöld azokat a számegyenesen!
a) Ekkor adták ki Magyarországon a *Harry Potter és a bölcsek köve* című regényt.
b) Ebben az évben rendezték a XXIX. nyári olimpiai játékokat.
c) Ekkor lett Magyarország az Európai Unió tagja.
d) Ebben az évben került a Hortobágyi Nemzeti Park a Világörökségi Listára.

Feladatok

1. Olvasd le a vonalzóról, hol kezdődik és végződik a ceruza és a radír! Mondd meg milyen hosszúak!

2. Mérd meg a vonalzód segítségével, hogy milyen hosszúak következő tárgyak!
a) tollad; *b)* kulcsod; *c)* mutatóujjad; *d)* tolltartód.

3. Olvasd le a számegyenesről, hogy melyik uralkodó mettől meddig uralkodott! (Interneten ellenőrizd, hogy jól olvastad-e le a számokat!)



4. Rajzolj a füzetedbe az előző példa egyeneséhez hasonló időegyenest! Ábrázold az 1100 és 1200 közötti Árpád-házi királyok uralkodását! A történelemtankönyved V. fejezetében megtalálod az Árpád-házi királyok leszármazási tábláját: Könyves Kálmán, II. István, II. Béla, II. Géza, III. István, III. Béla, Imre.

5. Hány kilométert autózik Szofi?

a) Bánd és Bakonygyepes között?
b) Somlóvásárhely és Hosszúpereszteg között?
c) Körmend és Somlóvásárhely között?
d) Veszprém és Vasvár között?

6. Az autókban lévő sebességmérő műszerek számlapjai görbített számegyenesek. Olvasd le a műszerekről, hogy körülbelül mekkora sebességgel megy a gépkocsi!

a)

b)

c)

6. ÖSSZEADÁS, ÍRÁSBELI ÖSSZEADÁS

Kiegészítős játék

Az osztályban mindenki írjon le egy 1 és 19 közötti számot! Ezután a tanár hangosan felolvassa a saját számát. Mindenki fejben hozzáadja az elhangzott számot a saját leírt számához. Ha az összeg pontosan 20, akkor kap egy csillagot! Az nyer, akinek a játék végén a legtöbb csillaga lesz.
(A játék más tartományokkal is játszható. Például, ha a tanár egy 50 és 60 közé eső számra gondol, a diákok pedig egy 70 és 80 közé eső számra, és az nyer, akinek az összege pontosan 130 lesz.)

1. példa

Végezzük el az összeadást fejben, és írjuk le a kapott számot!

24 + 13; 17 + 26; 32 + 63; 29 + 11; 24 + 36; 19 + 19.

Megoldás

37; 43; 95; 40; 60; 38.

Beszéljétek meg az osztályban, hogyan gondolkodtatok!

Az összeadásban részt vevő számokat **tagoknak (összeadandóknak)**, az eredményt pedig **összegnek** nevezzük.

$$\underbrace{8470 + 90\,870}_{\text{tagok (összeadandók)}} = \underbrace{99\,340}_{\text{összeg}}$$

Több szám összeadása esetén a tagokat tetszőleges sorrendben összeadhatjuk. Használd ezt, amikor csak érdemes!

24 + 33 + 56 + 71 = 184
24 + 56 + 33 + 71 = 184
71 + 56 + 33 + 24 = 184
56 + 24 + 33 + 71 = 184

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{24 + 33}_{57} + 56}_{113} + 71}_{184} \qquad \underbrace{\underbrace{24 + 56}_{80} + \underbrace{33 + 71}_{104}}_{184}$$

A második módon könnyebb az összeadás. Csak arra kell ügyelni, hogy ne hagyjunk ki egyetlen tagot sem, és mindegyiket csak egyszer adjuk hozzá.

Ismételjük át az írásbeli összeadást!

2. példa

Mennyibe kerülnek összesen az ékszerbolt kirakatában lévő ékszerek? Számolás előtt végezz becslést!

Megoldás

Az összeg körülbelül 91 000 + 8000 = 99 000 forint lesz.

8470 +90870	A két összeadandó számot helyiérték-helyesen írjuk egymás alá, vagyis a megfelelő helyiértékek ugyanabba az oszlopba kerülnek!
8470 +90870 0	A kisebb helyiértékektől haladunk a nagyobbak felé úgy, hogy az összeadást az egyesekkel kezdjük. 0 + 0 = 0. Az egyes helyiértéken álló 0-t leírjuk az egyesek alá.
8470 +90870 40	A tízesekkel folytatjuk. 7 + 7 = 14. A tízesek helyére 4 kerül, az 1-et átvisszük a százasok helyén álló számjegyek összegéhez.
8470 +90870 340	4 + 8 + 1 = 13. Tehát 3 kerül a százas helyiértékre, az 1-et pedig továbbvisszük, hogy hozzáadjuk az ezres helyiértéken álló számjegyek összegéhez.
8470 +90870 9320	8 + 0 + 1 = 9. Leírjuk az ezresek helyére a 9-et. A tízezresekhez most nincs átvitel.
8470 +90870 99340	Amikor egy számban nem írunk az adott helyiértékre számjegyet, akkor 0-t képzelünk oda, így a tízezresek összege 0 + 9 + 0 = 9.

A két ékszer összesen 99 340 Ft-ba kerül. Ez megfelel az előzetes becslésünknek.

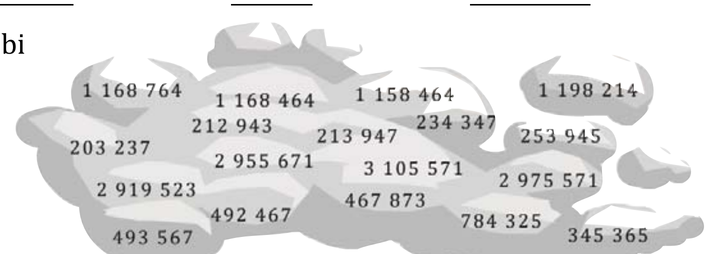
Feladatok

1. Végezd el az összeadásokat a füzetedben!

a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
123 +877	961 +987	1222 +8789	2057 +7025	124 816 +524 288

2. Válaszd ki a „számfelhőből” az alábbi összeadások eredményeit!

a) 35 678 + 456 789;
b) 114 935 + 99 012;
c) 602 245 + 556 219;
d) 2 235 013 + 740 558.



6. ÖSSZEADÁS, ÍRÁSBELI ÖSSZEADÁS

3. A repülőút-táblázat alapján számold ki, hogy hány kilométeresek a következő utazások!

	Budapest	Madrid	Párizs	Róma
Budapest		1976 km	1246 km	811 km
Madrid	1976 km		1054 km	1365 km
Párizs	1246 km	1054 km		1106 km
Róma	811 km	1365 km	1106 km	

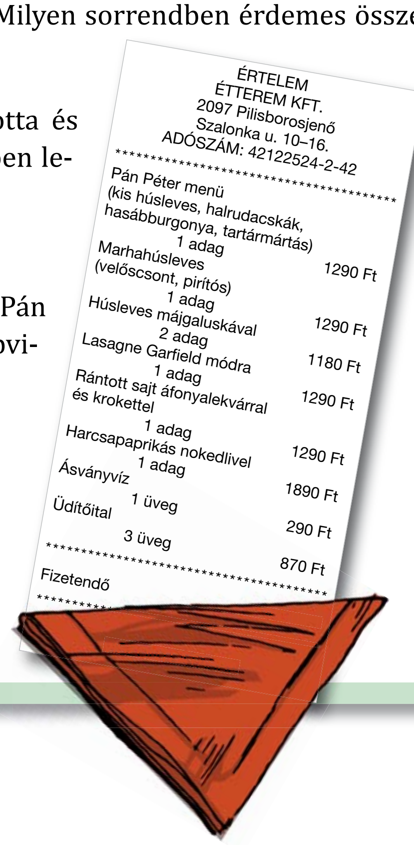
a) Róma – Párizs – Madrid;
b) Róma – Madrid – Budapest – Párizs;
c) Budapest – Madrid – Párizs – Róma – Budapest.

4. Csehország, Magyarország, Lengyelország és Szlovákia elnevezése a „visegrádi négyek”.
Mennyi a négy ország összterülete és összlakossága? (Kerekítve adtuk meg a 2012-es adatokat.)

ország	terület (km^2)	lakosság (fő)
Csehország	78 866	10 510 000
Magyarország	93 036	9 984 000
Lengyelország	322 575	38 540 000
Szlovákia	49 036	5 397 000

5. Gazsi a hét 4 napján fut. A GPS-e szerint hétfőn ezernyolcszázhetvenhárom métert, kedden ezernyolcszázhatvan métert, szerdán ezernyolcszázhatvanhét métert és pénteken ezernyolcszáznegyven métert futott. Mennyit teljesített a héten összesen? Milyen sorrendben érdemes összeadnod a számokat?

6. A Habzsi család születésnapi ebédjét étteremben tartotta és az ebéd után a következő számlát kapták. A végösszeget éppen letakarta egy szalvéta.
a) Mennyit fizettek összesen a szülinapi ebédért?
Az Alagi család is ebédelni ment.
b) Mennyit fizetett Alagi anyuka, ha a két gyereke egy-egy Pán Péter menüt evett és az asztalra kikészített, ingyenes csapvizet ittak utána?



KIVONÁS, ÍRÁSBELI KIVONÁS 7.

1. példa

A mobiltelefon előfizetésem 500 percet tartalmaz. Hány percet beszélhetek még, ha eddig 473, 465, 449, 411, 400, 384, 371, 356, illetve 89 percet használtam már el.

Megoldás

Ha 500 percből 473 percet használtam el eddig, akkor 500 – 473 = 27 perc beszélgetésem maradt. Ugyanezt az eredményt kapjuk, ha megkeressük azt a számot, amelyiket a 473-hoz kell adni, hogy 500-at kapjunk: 473 + 27 = 500.
A többi eredmény sorban: 35, 51, 89, 100, 116, 129, 144, illetve 411 percnyi időm maradt.

A kisebbítendő és a kivonandó nem felcserélhető!

Az a szám, amelyből kivonunk, az a **kisebbítendő**.
Az a szám, amelyet kivonunk, az a **kivonandó**.
A kivonás eredménye a **különbség**.

kisebbítendő
500 – 100 = 400
kivonandó különbség

A kivonás eredményét összeadással vagy egy másik kivonással ellenőrizhetjük.
500 – 356 = 144. Ellenőrzés: 144 + 356 = 500 vagy 500 – 144 = 356.
Vigyázz! A kivonásban részt vevő számok nem cserélhetők fel!
Az 500 perces egyenlegünkből lebeszélhetünk 356 percet, de ha csak 356 percünk maradt, nem beszélhetünk le 500 percet.
Ismételjük át az írásbeli kivonást!

2. példa

Vonjuk ki 9087-ből a 848-at! Számolás előtt végezz becslést!

Megoldás

A különbség körülbelül 9100 – 800 = 8300 lesz.

9087 – 848	A két számot helyiérték-helyesen írjuk egymás alá, vagyis a megfelelő helyiértékek egymás alá kerülnek! A második tag elé kiírjuk a „–” műveleti jelet, és az egészet aláhúzzuk.
9087 – 848 9	A kisebb helyiértékektől haladunk a nagyobbak felé úgy, hogy a kivonást az egyesekkel kezdjük. 8-hoz 9-et kell adni, hogy 17-et kapjunk. A 9-et leírjuk az egyesek helyére, majd az 1-et hozzáadjuk a kivonandó tízesek számához: 4 + 1 = 5.
9087 – 848 39	5-höz 3-at kell adni, hogy 8-at kapjunk. A tízesek oszlopába leírjuk az 1-et. Most nincs mit átvinni a százasokhoz.
9087 – 848 239	8-hoz 2-t kell adni, hogy 10-et kapjunk. Leírjuk a 2-t, és a kivonandó következő helyiértékű számjegyéhez hozzáadunk 1-et: 0 + 1 = 1.
9087 – 848 8239	1-hez 8-at kell adni, hogy 9-et kapjunk. Leírjuk a 8-at. A különbség 8239. Az eredmény megfelel az előzetes becslésnek.

7. KIVONÁS, ÍRÁSBELI KIVONÁS

Feladatok

1. Végezd el a füzetedben a kivonásokat!

a)	*b)*	*c)*	*d)*	*e)*
999	1001	2016	2017	213 645
−763	− 961	−1978	− 89	−108 859

2. Számold ki a füzetedben!

a) Mennyit kell 4678-hoz hozzáadni, hogy 13 263 legyen?
b) Mennyit kell elvenni 89 654-ből, hogy 54 987 legyen?
c) Mennyit kell 8345-höz hozzáadni, hogy 47 528 legyen?
d) Mennyit kell elvenni 45 994-ből, hogy 38 243 legyen?
e) Mennyit kell 6341-hez hozzáadni, hogy 25 262 legyen?
f) Mennyit kell elvenni 49 654-ből, hogy 23 965 legyen?

3. „A kőtömbökből és földhalmokból álló stonehenge-i építményt Kr. e. 2500 körül kezdték építeni és Kr. e. 2100 körül fejezték be. Sokan vallási, illetve csillagászati építménynek tartják, amelyet az ősi kelták emeltek a mai Anglia területén. 1610-ben Galileo Galilei felfedezte, hogy a Jupiter körül négy nagy hold kering, és ez megerősítette abban a hitében, hogy nem a Föld a világegyetem középpontja."


Stonehenge

a) Körülbelül hány évig építették Stonehenge-t?
b) Körülbelül hány évvel később élt Galilei, mint Stonehenge építői?
c) Hány nagy holdja van a Jupiternek?
d) Nézz utána a Naprendszer bolygóinak!

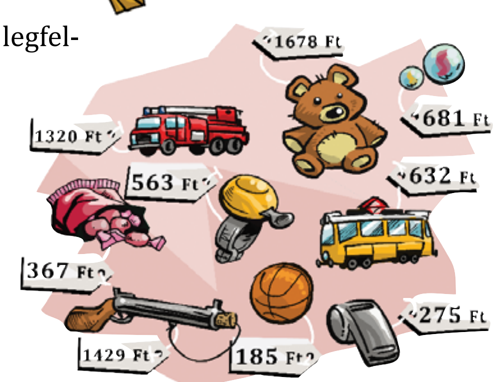
4. Gábor 11 éves, édesapja 40 éves. Hány évvel idősebb Gábor édesapja a fiánál? 15 év múlva mennyivel lesz idősebb az édesapa Gábornál? Hány évesek lesznek akkor?

5. András és Gábor társasjátékot játszottak. Andrásnak kezdetben 10 000 petákja (játékpénze) volt. András 2345 petákot költött játékpiramisok építésére, aztán 3216 petákért léphetett csak tovább. Hány petákja maradt Andrásnak?

Csoportmunka

József különböző játékokat akart vásárolni Attilának, legfeljebb 4000 Ft-ért. A lehető legtöbb ajándékot akarta megvásárolni. Mennyi pénze maradt?

labda	185 Ft	üveggolyó	681 Ft
síp	275 Ft	tűzoltóautó	1320 Ft
cukor	367 Ft	puska	1429 Ft
csengő	563 Ft	plüssmaci	1678 Ft
villamos	632 Ft		

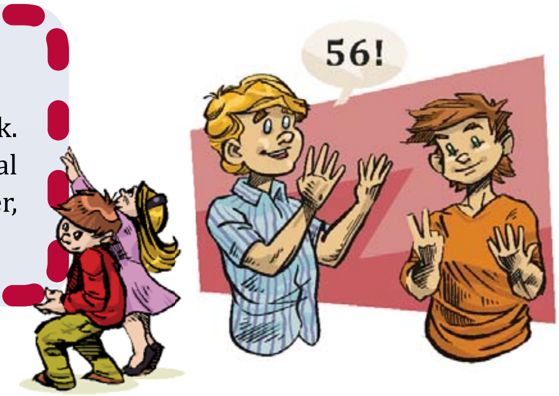


a) Készítsetek sok megoldást a feladathoz!
b) Melyik versből ismerősek a megvehető játékok?

SZORZÁS ÉS OSZTÁS EGYSZERŰEN 8.

Játék

A tanulók párosával játszhatják. Két kezüket ökölbe szorítják. Háromig számolnak együtt, majd néhány ujjuk kinyitásával egyszerre mutatnak egy-egy 0 és 10 közé eső számot. Az nyer, aki hamarabb mondja ki a két szám szorzatát.



A kiskertben a különböző növények különböző ágyásokban (téglalap alakú földterület) teremnek. A kertész a palántákat sorokba és oszlopokba rendezve ültette bele az ágyásokba. A paradicsompalántákat 7 oszlopba és 3 sorba rendezte el, így $7 \cdot 3 = 21$ paradicsompalántát ültetett.

Növény	sor	oszlop
paprika	6	7
fejes saláta	4	5
fejes káposzta	3	8
karalábé	8	7
karfiol	4	4
kelkáposzta	3	9

Számítsd ki fejben, hogy hány palánta található a többi ágyásban!

A gyerekek kirándulni mentek a bécsi Természettudományi Múzeumba. A belépő diákok számára ingyenes, de a digitális planetáriumba 3 euró fejenként. Andrást bízták meg, hogy a 20 fős csoporttól gyűjtse össze a pénzt. András mindenkitől elkérte a pénzt, és miközben gyűjtötte, össze is adta:

$3 + 3 = 6$, $6 + 3 = 9$ ....

András tehát egy 20 tagú összeget számolt ki.
A pénztáros a csoport belépőjegyeinek árát szorzással számolta ki:

$$3 \cdot 20 = 60 \text{ (euró)}.$$

A szorzásban szereplő számokat **tényezők**nek, a szorzás eredményét pedig **szorzat**nak nevezzük.
András a következőképpen is elvégezhette volna a szorzást:

$$20 \cdot 3 = 60 \text{ (euró)}.$$

A szorzat tényezői felcserélhetők:

$$(20 \cdot 3 = 3 \cdot 20).$$

$$\underbrace{20 \cdot 3}_{\text{tényezők}} = \underbrace{60}_{\text{szorzat}}$$

8. SZORZÁS ÉS OSZTÁS EGYSZERŰEN

1. példa

Az év eleji szülői értekezleten a harminc gyerek szülője megállapodott abban, hogy a tanév alatt (10 hónap) minden hónapban fejenként 1000 Ft-ot tesznek be az osztálypénztárba. Év végére mennyi pénz gyűlik össze?

Megoldás

A választ többféleképpen is kiszámíthatjuk.

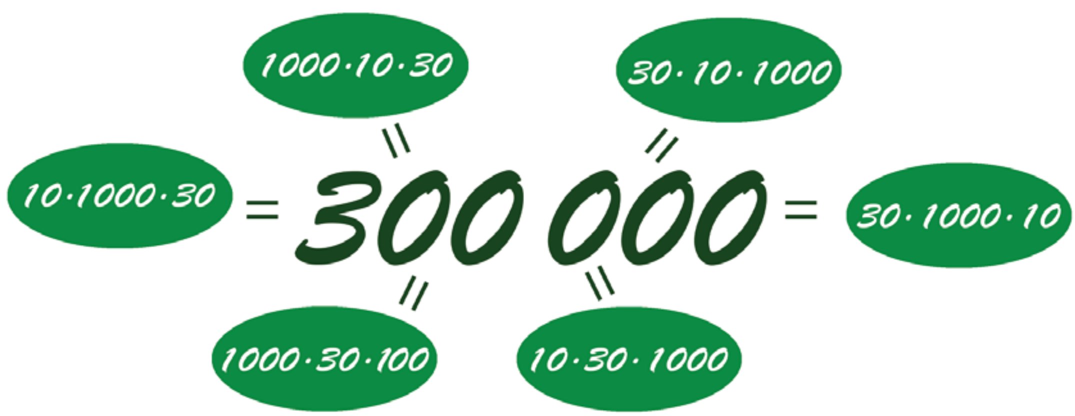
I. Az egyik szülő szerint egy gyerekre a 10 hónapon át fizetett havi 1000 Ft, összesen 10 000 Ft. A 30 szülő $10\,000 \cdot 30 = 300\,000$ Ft-ot fizetett be összesen. A műveleti sorrend: $(10 \cdot 1000) \cdot 30$.

II. Az osztályfőnök szerint a 30 szülő egy-egy hónapban $30 \cdot 1000 = 30\,000$ Ft-ot fizet be. Mivel 10 hónap van, így az összeg $30\,000 \cdot 10 = 300\,000$ Ft. A műveleti sorrend: $(30 \cdot 1000) \cdot 10$.

III. Jung anyuka könyvelő, ő más módon gondolkodik. Elsőként kiszámolja, hogy 30 szülő 10 hónapon át, 300 „fizetős” hónapot produkál, és ezt a szorzatot szorozza meg 1000 Ft-tal: $300 \cdot 1000 = 300\,000$ Ft. A műveleti sorrend: $(30 \cdot 10) \cdot 1000$.

A három tényezőt (10 hónap, 30 szülő, 1000 Ft) tetszőleges sorrendben összeszorozhatjuk, a végeredmény minden esetben ugyanaz lesz.

Szorzás esetén a tényezőket tetszőleges sorrendben összeszorozhatjuk, és az eredmény nem változik.



Játék

Mindenki körbeül. Kiválasztunk egy számjegyet, amelyet nem szabad kimondani. Ha valaki mégis kimondja, kiesik a játékból. A tanulók műveleteket mondanak úgy, hogy a végeredményben szerepel a tiltott számjegy. A választ adó tanulónak nem szabad kimondania a tiltott számot, hanem körül kell írnia.

Például, ha a tiltott szám a 3, és az egyik gyerek azt mondja, $4 \cdot 8$, akkor nem vághatja rá a következő gyerek, hogy 32, mert akkor kiesik. De mondhatja például, hogy 40-nél 8-cal kisebb vagy 22-nél 10-zel nagyobb. Ha jót mondott, ő adhatja fel a következő feladatot.

SZORZÁS ÉS OSZTÁS EGYSZERŰEN 8.

Ha egy egész számot 10-zel megszorzunk, akkor a számjegyei egy hellyel balra lépnek, az egyesek helyére pedig 0 kerül.

$241 \cdot 10$

tízezresek	ezresek	százasok	tízesek	egyesek
		2	4	1
	2	4	1	0

Ha egy egész számot 100-zal megszorzunk, akkor a számjegyei két hellyel balra lépnek, az egyesek és tízesek helyére pedig 0 kerül.

$241 \cdot 100$

tízezresek	ezresek	százasok	tízesek	egyesek
		2	4	1
2	4	1	0	0

Feladatok

1. A szorzótábla szorzatai (az egyjegyű számok szorzatai) közül gyűjtsd össze azokat, amelyek eredményében a tízesek helyén 5 áll!

2. Számold ki!
a) $5 \cdot 17 \cdot 2$; *b)* $25 \cdot 17 \cdot 4$; *c)* $20 \cdot 39 \cdot 5$;
d) $7 \cdot 33 \cdot 3$; *e)* $11 \cdot 9 \cdot 41$; *f)* $8 \cdot 19 \cdot 125$

3. Számold ki!
a) $(260 : 5) : 2$; *b)* $(3900 : 5) : 2$; *c)* $(1980 : 2) : 5$;
d) $(8900 : 4) : 25$; *e)* $(8900 : 25) : 4$; *f)* $(8900 : 50) : 2$

4. Számold ki!
a) $(1990 : 10) \cdot 10$; *b)* $(2900 : 10) \cdot 100$; *c)* $(2900 : 100) \cdot 10$;
d) $(83\,400 : 100) \cdot 1000$; *e)* $(83\,000 : 1000) \cdot 10$; *f)* $(122\,000 : 100) \cdot 1000$

5. Akad-e olyan szorzat, amelynek az egyik tényezője kétjegyű és eredményében a tízesek helyén 5 áll?

6. Állapítsd meg a szorzás elvégzése nélkül, hogy egyenlőek-e az alábbi kifejezések!
a) $(37 \cdot 517) \cdot 65$ és $(517 \cdot 65) \cdot 37$
b) $(13 \cdot 101) \cdot 17$ és $(17 \cdot 13) \cdot 102$
c) $(21 \cdot 87) \cdot 49$ és $(87 \cdot 49) \cdot 21$

7. *a)* Öt természetes szám szorzata 21. Hány azonos tényező van köztük?
b) Hét természetes szám szorzata 0. A legnagyobb közülük 1200. Mekkora a legkisebb?

8. *a)* Melyik számra gondolt Éva, ha tízzel szorozva 20 000-et kapott?
b) Melyik számra gondolt Tamás, ha százzal szorozva 345 000-et kapott?
c) Melyik számra gondolt Jóska, ha ezerrel szorozva 10 000-et kapott?

9. Számold ki fejben!
a) $100 \cdot 76$; *b)* $101 \cdot 76$; *c)* $99 \cdot 76$;
d) $53 \cdot 100$; *e)* $53 \cdot 101$; *f)* $53 \cdot 99$

9. SZÁMOLJUNK EGYSZERŰBBEN!

1. példa

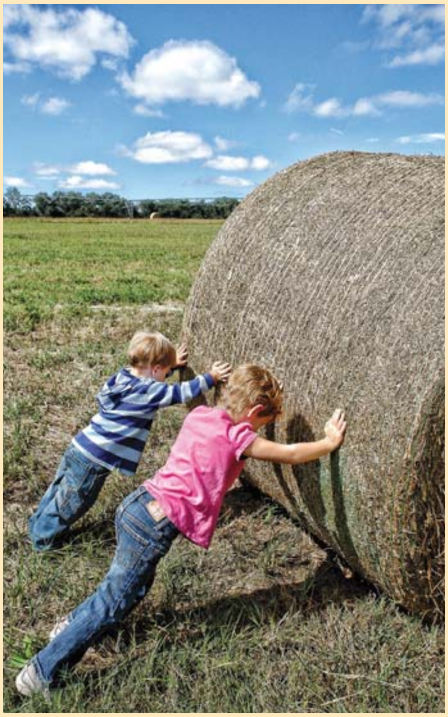
A karácsonyi ünnepségre az osztály tagjai fejenként 200 forintot hoztak. Az osztályba 15 fiú és 13 lány jár.

a) Összesen hány forintot hoztak a fúk?
b) Összesen hány forintot hoztak a lányok?
c) Összesen mennyi pénzből gazdálkodhattak a szervezők?
d) Mennyivel hoztak több pénzt a fiúk, mint a lányok?
e) Hogyan lehetne másképp kiszámolni, hogy mennyi pénz gyűlt össze, illetve mennyivel hoztak több pénzt a fiúk?

Megoldás

a) A lányok összesen $15 \cdot 200 = 3000$ forintot hoztak.
b) A fiúk összesen $13 \cdot 200 = 2600$ forintot hoztak.
c) A szervezők összesen $3000 + 2600 = 5600$ forintból gazdálkodhattak.
d) A fiúk $3000 - 2600 = 400$ forinttal hoztak többet.
e) Számolhatunk úgy is, hogy az osztályba összesen $15 + 13 = 28$ gyerek jár. Ha mindenki 200 Ft-ot hoz, akkor az összegyűlt pénzmennyiség összesen $28 \cdot 200 = 5600$ forint.
$15 \cdot 200 + 13 \cdot 200 = (15 + 13) \cdot 200 = 5600$
A lányok $15 - 13 = 2$-vel többen vannak, tehát a lányok összesen $2 \cdot 200 = 400$ forinttal hoztak többet.
$15 \cdot 200 - 13 \cdot 200 = (15 - 13) \cdot 200 = 400$

2. példa



Helén és Mátyás 5 napig segített nyáron a családi gazdaságban, de a két dolgos segítő nem ugyanannyi munkát végzett el. Ezért Helén, aki idősebb volt 6000, Mátyás pedig 5000 Ft-ot kapott Zsiga bácsitól az öt napra.

a) Hány forintot kapott Helén, illetve Matyi egy napra?
b) Hány forintot fizetett a két segítőnek Zsiga bácsi egy napra?
c) Hány forinttal kapott többet Helén mint Mátyás egy-egy napra?

Megoldás

a) Helén $6000 : 5 = 1200$ forintot, Matyi $5000 : 5 = 1000$ forintot kapott egy-egy napra.
b) Összesen $1200 + 1000 = 2200$ forintot kapott a két gyerek egy-egy napra.
Ez ugyanannyi, mintha $6000 + 5000 = 11\,000$ forintot osztanánk 5-tel,
$6000 : 5 + 5000 : 5 = (6000 + 5000) : 5 = 2200$
c) Az előzőhöz hasonlóan,
$6000 : 5 - 5000 : 5 = (6000 - 5000) : 5 = 200$

Feladatok

1. Keresd az egyenlőket!

A: $12 + 37 \cdot 12$; B: $19 \cdot 18 + 18 \cdot 19$; C: $1012 \cdot 23 - 112 \cdot 23$ D: $900 \cdot 23$
E: $47 \cdot 98 - 47 \cdot 31$ F: $36 \cdot 19$ G: $47 \cdot 67$ H: $38 \cdot 12$

2. Számold ki!

a) $16 \cdot 23 + 84 \cdot 23$; *b)* $37 \cdot 17 - 17 \cdot 17$; c) $132 \cdot 19 - 32 \cdot 19$

3. Egy nyelvkönyv 3000 forint, a munkafüzet 1300 Ft. A tanár egy 8 fős csoportnak akarja ezeket megvásárolni.

a) Mennyi pénzt gyűjt össze a tanár az összes tankönyv és munkafüzet megvásárlására?
b) Mennyibe kerülnek a tankönyvek összesen?
c) Mennyibe kerülnek a munkafüzetek összesen?

4. Osztálykiránduláson tíz gyerek vásárolt üdítőt, amit a tanár fizetett ki egyszerre. A számla 3500 Ft volt. A tíz üveg visszaváltásakor összesen 300 Ft-ot kaptak vissza.

a) Mennyibe került egy üdítő az üveget nem számolva?
b) Mennyi pénz járt vissza egy üvegért?
c) Végül mennyit fizetett egy tanuló?

5. Péter hetente 1200 Ft-ot, Pál hetente 1000 Ft-ot kap zsebpénzként. Elhatározzák, hogy a tizedét minden héten félreteszik.

a) Mennyi félretett pénze lesz Péternek 12 hét múlva?
b) Mennyi félretett pénze lesz Pálnak 12 hét múlva?
c) Mennyivel több pénze lesz félretéve Péternek, mint Pálnak 12 hét múlva?

6. A tízes rajzlapcsomag 200 Ft-ba kerül. Andi papája 4 csomagot, mamája pedig 7 csomagot vásárolt.

a) Hány darab rajzlapot kapott Andi?
b) Mennyibe került egy darab rajzlap, és mennyibe kerültek összesen?

7. Számolj fejben! Milyen sorrendben végeznéd el a műveleteket?

a) $40 + 41 + 42 + 43 + 44$; *b)* $47 + 41 + 53 + 49$;
c) $23 \cdot 14 - 3 \cdot 24$; *d)* $19 \cdot 81 + 81 \cdot 19$

Kirándulástervezés

Az osztályotok egynapos kirándulásra készülődik. Találjátok ki, hová utaztok, mennyibe kerül az utazás, az étkezés, a múzeumlátogatás vagy az egyéb program! Készítsetek költségvetést! Számítsátok ki a kirándulás teljes költségét, és azt is, hogy tanulónként mennyibe kerül! A következő órán mutassátok be a terveket, értékeljétek, melyik csoport terve sikerült a legjobban!

10. BECSLÉS, KEREKÍTÉS

Recept

Olga néni almás pitéjének hozzávalói:

Tészta:
50 dkg liszt,
25 dkg margarin,
12 dkg cukor,
3 db tojás,
egy csipet só,
egy zacskó sütőpor,
annyi tej, hogy a tészta jól összegyúrható legyen

Töltelék:
2-3 kg alma (lereszelve),
fahéj, citromhéj,
egy kevés cukor

A tésztát gyúrjuk össze, és tegyük félre pihenni. A reszelt almát egy-két kanál cukorral keverjük össze, hogy a levét jobban kieresszе. A tésztát osszuk két egyenlő részre, és az egyiket nyújtsuk nagyjából 5 mm vastagra, majd igazgassuk a tepsi aljába. A reszelt alma levének nagyját nyomjuk ki és terítsük el egyenletesen a tésztalapon. A tetejét szórjuk meg fahéjjal és darált dióval. Nyújtsuk ki a másik tésztalapot is, és fedjük le a pitét, majd a tetejét kenjük meg tojásfehérjével, és tegyük forró sütőbe. Ha a teteje aranybarnára sült, akkor kész!

Játék

Az osztályban gyűjtsetek össze néhány tárgyat! A játékvezető felmutat egy tárgyat, amelynek a hosszúságát mindenki megbecsüli, és ezt az értéket leírja a füzetébe. A játékvezető aztán megméri a tárgy hosszát, és akinek a becsült értéke a legközelebb esik a valódi hosszhoz, az kap egy pontot. Az nyer, akinek a legtöbb pontja lesz a játék befejezésekor.

Miért becslünk? Miért kerekítünk? Sok oka lehet ennek, de általában azért, mert sokkal könnyebben leírható, kiszámolható a mennyiség.

Ha például süteményt készítünk, nyilván nem használhatunk 50 dkg liszt helyett 1 kg-ot, ha a többi összetevő mennyisége változatlan marad, de az is nyilvánvaló, hogy anya gond nélkül szór hozzá egy kevés lisztet, ha túl puha, vagy önt hozzá egy kis tejet, ha túl kemény a tészta.

Vannak tehát olyan mennyiségeink, amelyeket nem szükséges, vagy esetleg nem is tudunk pontosan megadni.

Olga néni kíváncsi volt, hogy mennyi babjuk van. Hét üveg babot találtak. Megkérte Pistit, hogy mérje meg, mennyi bab van az egyik üvegben. Pisti kiszórta az egyik üveg tartalmát a mérleg serpenyőjébe, és leolvasta, mennyit mutat.

– No, mennyi?

– 96 dkg – válaszolta Pisti.

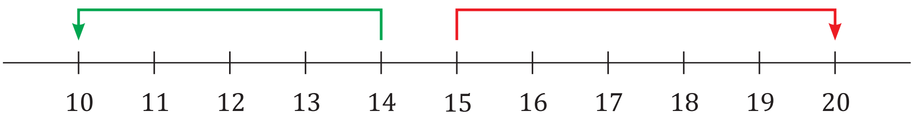
– Szóval, körülbelül 1 kg. Akkor a 7 üvegben összesen körülbelül hétszer annyi, … szóval majdnem 7 kg. Köszönöm szépen, Pisti!

A párbeszédben a mennyiségmegadás különböző módszereit láthatjuk. Pisti az üvegben lévő bab tömegének a mérleg által mutatott (96 dkg) **pontos értékét** adta meg. Pisti anyukája gyakorlott háziasszony, a pontos érték ebben az esetben nem érdekli, annak **kerekített értékével** (96 dkg ≈ 1 kg) számolt. Az összes bab mennyiségét viszont – a pontos adatokat nem ismerve – csak **becsült értékkel** adta meg (körülbelül 7 kg).

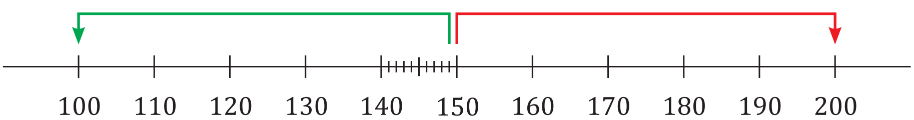
A történet alapján láthatjuk, hogy a mennyiség megadásának három módja – **pontos, a kerekített érték és a becsült érték** – miben különbözik egymástól.

A **kerekítés**nél meg kell határozni, hogy mennyire pontos kerekítést fogunk használni. Lehet például tízesekre, százasokra, ezresekre, … kerekíteni.

Ismételjük át a számok kerekítését, kezdjük a tízesekre kerekítéssel!
Ha az egyesek helyén álló számjegy 0, 1, 2, 3 vagy 4, akkor lefelé kerekítünk.
Ha az egyesek helyén álló számjegy 5, 6, 7, 8 vagy 9, akkor felfelé kerekítünk.
Azért kerekítünk így, mert az a célunk, hogy az eredeti szám és a kerekített érték eltérése legyen a lehető legkisebb.
$164 \approx 160$, mert $164 - 160 < 170 - 164$.
Az 5 végződésű szám középen foglal helyet a két tízes szomszédja között, ezt megállapodás alapján felfelé kerekítjük.



Százasokra hasonlóan kerekítünk, ha a szám 00, 01, 02, ..., 49-re végződik, akkor lefelé, ha a szám 50, 51, 52, ..., 99-re végződik, akkor fölfelé kerekítünk.
Az 50 végződésű szám középen foglal helyet a két százas szomszédja között, ezt megállapodás alapján felfelé kerekítjük.
164 százasokra kerekített értéke 200, mert $200 - 164 < 164 - 100$.



Hasonlóan kerekítünk ezresekre, tízezresekre, ...

1. példa

„A stadionban 63 882 néző szurkolt a válogatottnak!"
Kerekítsük a nézőszámot tízesre, százasra, ezresre, tízezresre!

Megoldás

Foglaljuk táblázatba a kerekítések eredményét!

Eredeti szám		63 882
Kerekített értékek	Tízesre	63 880
	Százasra	63 900
	Ezresre	64 000
	Tízezresre	60 000

Vigyázz! A kerekítést nem csak a 10-es helyiértékek esetén, hanem más értelemben is használjuk!
Mivel a legkisebb forgalomban lévő pénz az ötforintos, ezért fizetéskor
az 1 vagy 2 forintra végződő összegeket lefelé, a legközelebbi 0;
a 3 vagy 4 forintra végződő összegeket felfelé, a legközelebbi 5;
a 6 vagy 7 forintra végződő összegeket lefelé, a legközelebbi 5;
a 8 vagy 9 forintra végződő összegeket felfelé, a legközelebbi 0
forintra végződő összegre kell kerekíteni.

10. BECSLÉS, KEREKÍTÉS

Feladatok

1. Becsüld meg a következő hosszúságokat!

a) a tanterem magassága;
b) a legmagasabb tanuló magassága;
c) a pad hossza;
d) a tollad (ceruzád) hosszúsága;
e) az otthonod és az iskola közötti távolság;
f) az udvar hossza;
g) az iskola épületének magassága;
h) az iskola előtti fa magassága.

Amennyiben lehetőséged van rá, mérd meg vagy szerezd meg a tényleges távolságokat is!

2. Hány példány található a következő állatokból Magyarországon? A számok kerekített értékeit megtalálod a táblázatban.

1.	2.	3.	4.
			
A hazánkban élő túzokok egyedszáma százasokra kerekítve	A szarvasmarhák száma ezresekre kerekítve 2013 decemberében	Szarvasok száma százasokra kerekítve	Muflonok száma százasokra kerekítve
1500	772 000	96 500	12 300

3. Nyolc diák magassága: 132 cm, 151 cm, 145 cm, 133 cm, 137 cm, 148 cm, 145 cm, 144 cm. Kerekítsd tízesekre a magasságokat! Mennyivel tér el az összeg a kerekített értékek összegétől?

4. *a)* Sorold fel azokat a számokat, amelyeknek a tízesekre kerekített értéke pont 2000!
b) Sorold fel azokat a természetes számokat, amelyeknek a százasokra kerekített értéke 2000, és az utolsó számjegyük 1-es!
c) Sorold fel az összes olyan 23-ra végződő természetes számot, amelynek az ezresekre kerekített értéke 25 000!

5. *a)* Nyertünk vagy veszítettünk a kerekítéssel, ha aznap a következő összegeket kellett fizetnünk: 341 Ft, 245 Ft, 272 Ft, 510 Ft, 508 Ft és 194 Ft?
b) Gábor úgy okoskodott, hogy a 126 Ft-os csokin spórol 1 forintot. Tehát, ha egyszerre 10 darabot vesz, akkor 10 forintot spórol. Igaza volt?
c) Hány darabot kell vennünk egyesével egy 27 forintos csokoládéból, hogy „ingyen” kapjunk egyet?

6. Pisti észrevette, hogy ha néhány számot tízesekre kerekítünk, akkor úgy viselkednek, mintha ezresekre kerekítenénk. Ilyen például a 12 997 szám. A kerekített értéke 13 000. Hány olyan természetes számot találhat Pisti, amelyiknek a tízesekre és az ezresekre kerekített értéke is 13 000?

ÍRÁSBELI SZORZÁS 11.

A **többjegyű számmal** való szorzás művelete visszavezethető az egyjegyű számmal való szorzásra.

Ismételjük át az alsó tagozatban megtanult szorzást!

Példa

A világ legidősebb embere egy üzbég asszony volt, aki 1880. július 1-én született és 134 évet élt. (Az adat 2015-ben még nem volt hivatalos.) Számítsuk ki, hány napot élt az asszony, ha pontosan 134 évig élt, és minden évet 365 naposnak tekintünk!

Megoldás

Két lehetőségünk van, mindegyik tökéletes. A szorzást kezdhetjük a százasoknál vagy az egyeseknél is.
Ha a százasokkal kezdjük, majd a tízesekkel és az egyesekkel folytatjuk, akkor ezt a szorzatot kapjuk. A halvány 0-kat nem szoktuk leírni, csak azt mondjuk, hogy a soron következő szorzatot egy hellyel jobbra toljuk.

```
365·134
36500     ← 365·100
10950     ← 365·30
 1460     ← 365·4
48910
```

Ha az egyesekkel kezdjük, majd a tízesekkel és a százasokkal folytatjuk, akkor ezt a szorzatot kapjuk. A halvány 0-kat nem szoktuk leírni, csak azt mondjuk, hogy a soron következő szorzatot egy hellyel balra toljuk.

```
  365·134
 1460     ← 365·4
10950     ← 365·30
36500     ← 365·100
48910
```

Akármelyik sorrendben szorzunk, az üzbég asszony 134 év alatt körülbelül 48 910 napot élt meg.

Feladatok

1. Számítsd ki a szorzatokat a füzetedben!
a) 428 · 473; *b)* 359 · 371; *c)* 1024 · 25; *d)* 12 · 123; e) 708 · 203.

2. A könyvtárban 34 könyvespolc van, és minden polcon 67 könyv található. Mennyi könyv van a könyvtárban?

3. Állítsd növekvő sorrendbe a szorzatokat!
A = 3456 · 62; B = 2369 · 92; C = 7452 · 29; D = 5423 · 39.

4. Az autókereskedő 258 autót szeretne felújítani. Minden autóhoz 5 új gumit, 3 díszített visszapillantó tükröt és 7 darab reklámmatricát szereltet fel. Hány gumit, visszapillantó tükröt és reklámmatricát kell vásárolnia?

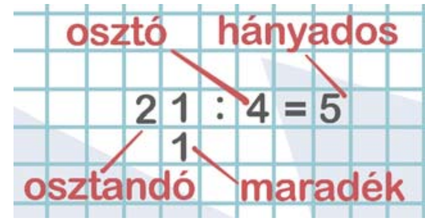
5. Egy ültetvényen minden sorba 349 virágot ültetnek, 14 sorba tulipánt és 13 sorba rózsát. Hány virágot ültettek összesen?

6. Egy raklapon 48 doboz és minden dobozban 64 tankönyv van. Hány tankönyv található a raktárban, ha 4 raklapnyit és még 6 doboznyit szállítottak a nyomdából?

7. Mennyi az első 10 természetes szám szorzata?

12. ÍRÁSBELI OSZTÁS

Ha Adél négy gyereke között úgy oszt el 20 sütit, hogy mindegyiknek ugyanannyi jusson, akkor a 20 : 4 műveletet végzi el.
Ha Adél 21 sütit készít, akkor azok igazságos szétosztása után 1 még marad a tálcán, amit Adél ehet meg, mert 5 · 4 = 20 < 21, és 21 – 20 = 1 sütemény maradt.



Az osztással már találkoztál negyedikes korodban is. Most csak átismételjük a tanultakat.

1. példa

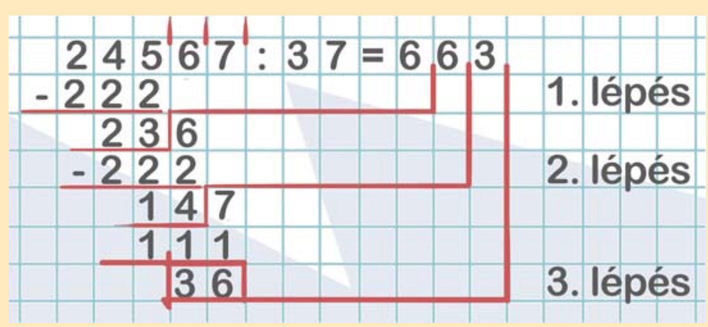
Osszuk el a 199-et 29-cel!

Megoldás

A 199 kisebb, mint a osztó tízszerese (290), így a hányados egyjegyű lesz. 7 · 30 = 210, ami alig nagyobb 199-nél. Próbáljuk meg hányadosnak a 7-et! 7 · 29 = 140 + 63 = 203, ami nagyobb az osztandónál, tehát a hányados 7-nél kisebb. Próbáljuk meg a 6-ot! A 6 · 29 = 174 jó, mert a szorzat az osztandónál nem nagyobb. A maradék: 199 – 174 = 25.
Ezt úgy is leírhatjuk, hogy (199 – 25) : 29 = 6.

2. példa

Osszuk el a 24 567-et 37-tel!



Megoldás

Az osztandóból a legnagyobb helyiértéktől kezdve leválasztunk egy olyan számot, amely éppen nagyobb az osztónál. A 2(4567) és a 24(567) még kevés, a 245(67) már elég. Mivel a 24 < 36, ezért a 245 : 36 egy egyjegyű szám lesz! Egy vesszővel jelöljük a leválasztott számot, ez jelzi, hogy hol tartunk az osztásban.
1. lépés: Megkeressük azt az egyjegyű számot, amelyet az osztóval szorozva még éppen egy 245-nél kisebb számot kapunk. 7-szer 37 az már 210 + 49, tehát a 6-ot kell választanunk. Leírjuk a hányados első jegyét, a 6-ost, majd visszaszorzunk vele. A szorzásban már gyakorlottak vagyunk, így fejben végezzük el. 37 · 6 = 180 + 42 = 222, amit helyiérték-helyesen leírunk a kijelölt 245 alá. A kivonást elvégezve marad 23.
2. lépés: A maradék 23 mögé leírjuk az osztandó következő számjegyét. Ez most a 6, amit a 23 mögé írva a 236 számot kapjuk. Most a 236-ot osztjuk el 37-tel. A hányados most is 6 lesz, mert 37 · 6 = 222. A 6-ot leírjuk a hányados következő helyére, a 222-t pedig helyiérték-helyesen leírjuk a 236 alá és kivonjuk, marad a 14.
3. lépés: A 14 mögé leírjuk az osztandó utolsó számjegyét, a 7-et. A hányados 3 lesz, amit leírunk és visszaszorzunk vele. 37 · 3 = 111. 147 – 111 = 36.
A hányados 663, a maradék pedig 36 lett.

Feladatok

1. Egy építőjáték-dobozban 1512 játékelem volt. Tamás, Gábor, András és Zoli a veszekedés elkerüléséért elhatározták, hogy négy egyenlő részre osztják az elemeket. Hány építőelemet kap egy-egy gyerek?

2. *a)* Három testvér 840 tyúkot örökölt. El tudják osztani őket egyenlően egymás között?
b) Ugyanolyan igazságosan tudnak-e osztozkodni, ha két unokatestvérüket is bevonnák az osztozkodásba?
c) El lehet-e osztani az állatokat, ha még a két másod-unokatestvérnek is juttatnának egy-egy egyenlő részt?

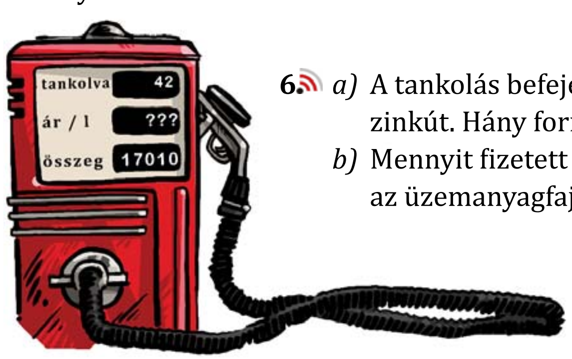
3. Párosítsd a füzetedben az osztások és a maradékok betűjelét!
a) 568 : 23; *b)* 2346 : 19; *c)* 791 : 17; *d)* 2166 : 25;
e) 4914 : 21; *f)* 33333 : 14; *g)* 832 : 11; *h)* 6453 : 23.

A) 0; *B)* 1; *C)* 7; *D)* 9; *E)* 13; *F)* 15; *G)* 16.

4. Végezd el a következő osztásokat, majd válaszolj a kérdésekre!
a) 6 : 7; 12 : 23; 14 : 25; 35 : 56; 26 : 49.
Mekkora a hányados és mekkora a maradék, ha az osztandó kisebb, mint az osztó?
b) 34 : 34; 2 : 2; 13 : 13; 16 : 16; 123 : 123.
Mekkora a hányados és mekkora a maradék, ha az osztandó egyenlő az osztóval?

5. Varázslóországban nem forint a pénzegység, hanem a talmi. A varázslótanonc bevásárolt, de sajnos a bűbáj-számlán elmosódtak a számok. Így Csiri bá, a gondnok nem fogja kifizetni a számlát. Segíts neki kiszámolni a hiányzó számokat!

A termék neve	Egységár	Darabszám	Összár
varangysóhaj	23 talmi/üveg		966 talmi
lódarázsszőr	67 talmi/tasak		3551 talmi
kacajpor	talmi/kapszula	47	5875 talmi
álompótló	talmi/darab	241	8917 talmi
mágiarakás	talmi/rakás	72	1224 talmi
macskabajusz	31 talmi/szál		1023 talmi



6. *a)* A tankolás befejezésénél az ábrán látható értékeket mutatja a benzinkút. Hány forintba került 1 liter üzemanyag ekkor?
b) Mennyit fizetett a következő autós, ha 35 litert tankolt ugyanebből az üzemanyagfajtából?

7. Egy parkot körülvevő 2400 méteres sétányon 16 méterenként villanyoszlopokat állítottak, a tisztaság megőrzése érdekében pedig 150 méterenként kukákat raktak ki. Hány villanyoszlopra és hány kukára volt szükség?

13. A SZORZÁS ÉS AZ OSZTÁS TULAJDONSÁGAI

Szofi elhatározta, hogy mindig emlékezni fog arra a napra, amikor ötöst kapott matekból. Még álmában is büszke volt a feleletére.
Az osztás tulajdonságaiból felelt:
Az osztásban részt vevő számok nem cserélhetők fel.
Például: 4 : 2 = 2, míg 2 : 4 nem is egész szám.

Az összeadással és a szorzással ellentétben **az osztást nem lehet tetszőleges sorrendben elvégezni.**
Például: (60 : 6) : 2 = 5 nem egyenlő 60 : (6 : 2) = 20-szal.

$0 : 23 = 0$

Szofinak az osztásban részt vevő számok között a 0 volt a kedvence.
Különlegesnek találta, hogy a 0-t önmagán kívül bármivel el lehet osztani, és mindig 0 lesz az eredmény, de

A 42 : 0 nem értelmezhető, mert nincs olyan szám, amit 0-val szorozva 42-t kapunk.

$456 : 1 = 456$

0-val csak a 0-t lehetne osztani, de a 0 : 0 hányados nem egyértelmű, mert bármilyen számot szorzunk 0-val, a szorzat 0 lesz: $0 \cdot 12 = 0$; $0 \cdot 42 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$.

Vagyis a 0-val nem lehet osztani.

Ha egy számot eggyel osztunk, akkor az eredményt könnyen kiszámolhatjuk. Például 456 : 1 = 456.

$234\cancel{0} : 1\cancel{0} = 234$
$36\cancel{00} : 1\cancel{00} = 36$
$349\cancel{000} : 1\cancel{000} = 349$

Szofi legjobban a 10-zel, 100-zal, 1000-rel való osztást szerette. Nagy örömmel húzta ki az osztandó végéről a 0-kat, azaz léptetett minden számjegyet eggyel jobbra, az eggyel kisebb helyiértékű helyre. Ha 10-zel osztott, akkor csak egyet, ha 100-zal, akkor kettőt, és ha 1000-rel, akkor hármat léptetett a számegyenesen a megfelelő helyiértékű helyre.

$12\cancel{00000} : 1\cancel{00000} = 12$

Egyszer 100 000-rel kellett osztania, de azt is kitűnően megoldotta. Találjátok ki, hogyan?

Szofi megfigyelte, hogy az osztás a szorzás fordított művelete. Mindegy, hogy az 56 : 8 eredményét keresi, vagy azt találja ki, hogy mennyivel kell megszorozni a 8-at, hogy 56 legyen.

$4 \cdot 25 + 2 = 102 = 127$ ☒
$5 \cdot 25 + 2 = 127$ ☑

Később fejben elosztotta a 127-et 25-tel, hányadosnak 4-et kapott, maradéknak 2-t. Ellenőrzéskor $4 \cdot 25 + 2 = 102$-t kapott, nem pedig 127-et, az osztandót. Az ellenőrzésből rájött, hogy az osztáskor hibázott. Gyorsan utánaszámolt, és rájött, hogy a hányados nem 4 hanem 5. Valóban, $5 \cdot 25 + 2 = 127$.

1. példa

Szofi álmában Kalandföld határához ért, de a kapu kijelzője azt villogta: BELÉPŐKÓD: $24 \cdot 25$.

Megoldás

Szofi az egyik tényezőt elosztotta, a másikat pedig megszorozta 4-gyel.
A 6-ot és a 100-at már könnyedén összeszorozta: $6 \cdot 100 = 600$.

$24 \cdot 25 =$
$\downarrow :4 \quad \downarrow \cdot 4$
$6 \cdot 100 = 600$

A szorzat értéke nem változik, ha az egyik tényezőt egy számmal szorozzuk, a másik tényezőt pedig ugyanazzal a számmal osztjuk.

2. példa

Kalandföld elhagyásához is meg kellett adni a kódot. KILÉPŐKÓD: 23 400 : 50, villogott a felirat. Hogyan számolhatta ki Szofi kényelmesen a hányados értékét?

Megoldás

Szofi ugyanazzal a számmal, a 2-vel megszorozta az osztandót és az osztót is. 100-zal pedig könnyű osztani. Kihúzta a 46 800 végéről a két 0-t. A kód pedig valóban 468 volt, így a kapu kinyílt.

23 400 : 50 =
↓·2 ↓·2
46 800 : 100 = 468

A hányados értéke nem változik, ha az osztandót és az osztót ugyanazzal a 0-tól különböző számmal szorozzuk vagy osztjuk.

Feladatok

1. A füzetedbe dolgozz! A mintának megfelelően kétféleképpen zárójelezd a megadott osztásokat! Minden esetben számítsd ki a végeredményt!

Minta:
1472 : 46 : 2 → (1472 : 46) : 2 = 32 : 2 = 16
→ 1472 : (46 : 2) = 1472 : 23 = 64

a) 2592 : 27 : 3 *b)* 1232 : 28 : 2 *c)* 3375 : 75 : 5 *d)* 3600 : 24 : 6

2. Az iskolai farsang büféjében árusított üdítő mind elfogyott, és 38 400 Ft bevétel keletkezett. Egy kartonban 24 üdítő volt, és egy üdítőt 200 Ft-ért árusítottak. Hány karton üdítőt adtak el?

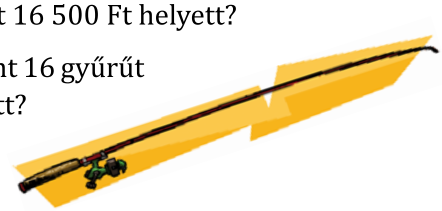
3. Végezd el fejben a következő osztásokat! Melyik a helyes eredmény?

	I.	II.	III.
a) 37 000 : 10	37	3 700	370
b) 67 000 : 100	6 700	670	67
c) 1 345 000 : 10	134 500	13 450	1 345
d) 34 500 000 : 1000	345 000	34 500	3 450

4. Oszd el a 8192-t kettővel, majd a hányadost ismét kettővel, és így tovább, amíg csak egész számot kapsz!

5. Erdélyi osztálykiránduláshoz 210 000 Ft támogatást kapott egy 24 fős osztály. Mekkora összeget kell behoznia minden diáknak az eredetileg tervezett 16 500 Ft helyett?

6. A horgászbot 270 cm hosszú szakaszára egyenlő közönként 16 gyűrűt szeretnének rögzíteni. Milyen távolság legyen a gyűrűk között? (Vigyázz! A gyűrűk száma nem ugyanannyi, mint a közöttük lévő részek száma.)

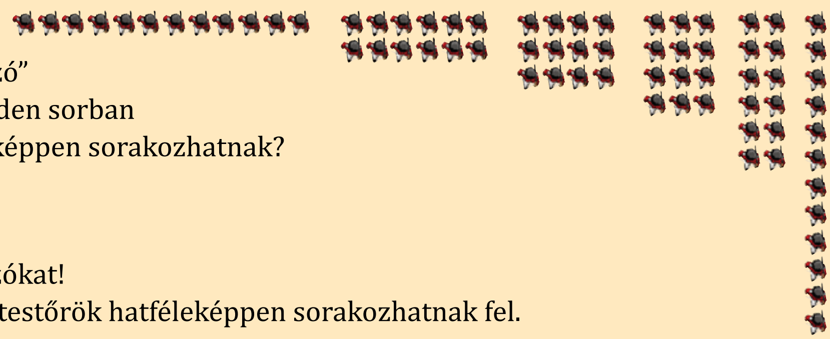


14. OSZTÓ, TÖBBSZÖRÖS

Játék

A gyerekek körben ülnek és sorban mondják a számokat, az első szám az 1-es, viszont BUMM-ot kell mondani minden olyan szám helyett, amelyik hárommal osztható vagy 3-as számjegyet tartalmaz. Aki eltéveszti, kiesik.
(Ha nagyon jól megy az osztálynak, játhatjátok a 3 helyett más számmal is.)

1. példa



Tucat király 12 testőre a „sorakozó” vezényszóra úgy áll fel, hogy minden sorban ugyanannyian álljanak. Hányféleképpen sorakozhatnak?

Megoldás

Rajzoljuk fel a lehetséges sorakozókat!
Az ábra alapján láthatjuk, hogy a testőrök hatféleképpen sorakozhatnak fel.

A 12 **osztói** az 1, 2, 3, 4, 6, 12 természetes számok, mert:

$12 : 1 = 12$;	$12 : 2 = 6$;	$12 : 3 = 4$;	$12 : 4 = 3$;	$12 : 12 = 1$.
$12 = 1 \cdot 12$;	$12 = 2 \cdot 6$;	$12 = 3 \cdot 4$;	$12 = 4 \cdot 3$;	$12 = 12 \cdot 1$.

A 12-nek **nem osztói**: 5, 7, 8, 9, 10, 11, mert velük nem lehet maradék nélkül elosztani a 12-t, vagy más szavakkal: nem létezik olyan egész szám, amit 5-tel megszorozva 12-t kapunk.

$12 : 5 = 2$;	$12 : 7 = 1$;	$12 : 8 = 1$;	$12 : 9 = 1$;	$12 : 10 = 1$;	$12 : 11 = 1$.
2	5	4	3	2	1

Ha egy természetes szám maradék nélkül osztható egy másikkal, akkor rövidebben úgy mondjuk, hogy **osztható** vele. Az osztandó ilyenkor **többszöröse** a hányadosnak és az osztónak is.

A 12 **többszöröse** a 4-nek és a 3-nak. $\mathbf{12} = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$

A 4 **osztója** a 12-nek. A 12-nek osztója a 4. $12 : \mathbf{4} = 3$
A 3 **osztója** a 12-nek. A 12-nek osztója a 3. $12 : \mathbf{3} = 4$

2. példa

Sorold fel a 7 néhány többszörösét!

Megoldás

Szorozzuk meg 7-et sorban, 0-val, 1-gyel, 2-vel, ..., azaz a természetes számokkal.

$7 \cdot 0 = 0$; $7 \cdot 1 = 7$; $7 \cdot 2 = 14$; $7 \cdot 3 = 21$; $7 \cdot 4 = 28$; ...

Minden természetes szám osztója és többszöröse önmagának, ebbe beletartozik a 0 is, bár más szempontból a 0 egy különleges természetes szám:

– Akármelyik számmal szorozzuk meg a 0-t, a szorzat 0 lesz.
– Akármelyik számot szorozzuk meg 0-val, az eredmény 0 lesz.
– A 0 minden természetes számnak többszöröse.
– A 0-nak csak a 0 a többszöröse.
– A 0-nak minden természetes szám osztója.

Egy szám osztói közül azokat a párokat, amelyek szorzata egyenlő a számmal, szokás osztópárnak nevezni. Ha egy számnak megtaláltuk egy osztóját, akkor általában egy másik osztót is találtunk. A 0 ebből a szempontból is különleges, mert a 0 minden osztójának az osztópárja maga a 0.

Feladatok

1. *a)* Melyik az a szám, amelyik minden számnak osztója?
b) Igaz-e, hogy minden természetes szám osztója önmagának?
c) Igaz-e, hogy az 1-nek minden természetes szám többszöröse?
d) Igaz-e, hogy a 0 minden természetes számnak többszöröse?
e) Igaz-e, hogy minden természetes szám többszöröse önmagának?
f) Igaz-e, hogy a 2-nek két osztója van?

2. Döntsd el, hogy igaz, vagy hamis!
a) Ha egy 3-mal osztható számot és a 3 egyik többszörösét összeadom, akkor a kapott összeg osztható lesz 3-mal.
b) Minden természetes szám minden osztója kisebb a számnál.
c) Minden természetes számnak van osztója.
d) Van olyan természetes szám, amelyiknek az 1 nem osztója.

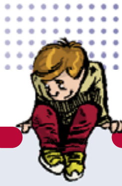
3. Gyűjtsd össze a 8, a 10, a 18 és a 19 osztóit! Melyik számnak lett a legtöbb osztója? Keress olyan számot, amelynek pont 5 osztója van!

4. Írj le az 5 többszörösei közül ötöt!

5. *a)* Sorold fel 64 osztóit!
b) Sorold fel a 128 osztóit!
c) Sorold fel a 81 osztóit!
d) Sorold fel a 72 osztóit!
e) Sorold fel a 100 osztóit!
f) Sorold fel a 31 osztóit!

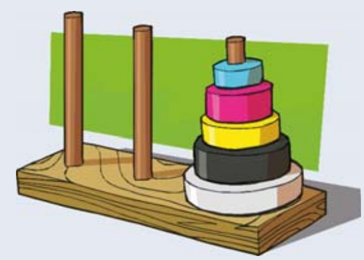
6. *a)* Rajzolj a füzetedben egy számegyenest, és 0 és 24 között színezd pirosra a 3-mal, zöldre a 4-gyel osztható számokat. Mely számok többszöröseit kellett mindkét színnel megszínezned?
b) Rajzolj a füzetedben egy számegyenest, és 0 és 24 között színezd pirosra a 3-mal, zölddel a 6-tal osztható számokat. Mely számok többszöröseit kellett mindkét színnel megszínezned?

15. 2-ES ALAPÚ SZÁMRENDSZER (KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG)



Játék

Rajzoljatok egy lapra három helyet és készítsetek öt darab különböző méretű színes korongot papírból. Rakjátok őket nagyság szerint egymásra, úgy hogy legalul legyen a legnagyobb, és tegyétek a tornyot az első helyre. Rakd át a korongokat az első helyről az utolsóra! Minden lépésben egyetlen korongot helyezhetsz át, de vigyázz! Nagyobb korong nem kerülhet kisebb korongra, és csak a három hely valamelyikére helyezheted!
Először játsszatok három, majd négy koronggal!
Versenyezzetek! Kinek sikerül kevesebb lépésben megoldani a feladatot? Keress rá a Hanoi torony kifejezésre az interneten!



1. példa

Szofi egy régi könyvben olyan számokat talált, amelyekben csak 0 és 1 szerepelt, és a számok jobb alsó sarkában egy kicsi 2-es volt. A könyvben ezeket a számokat „kettes számrendszerbeli” számoknak nevezték. A magyarázat azt írta, hogy itt nem tízesével, hanem kettesével változnak a helyiértékek, azaz hátulról előre haladva 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...
Ilyen számok álltak sorban:
100101_2, 10100_2, 11101_2, 1110_2.
Mekkorák ezek a számok a tízes számrendszerben?

Megoldás

Szofi a tízes számrendszer mintájára elkészítette a kettes számrendszer helyiérték-táblázatát is.

Számok	32 harminckettő	16 tizenhat	8 nyolc	4 négy	2 kettő	1 egy
100101_2	1	0	0	1	0	1
10100_2		1	0	1	0	0
11101_2		1	1	1	0	1
1110_2			1	1	1	0

$100101_2 = 1 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 32 + 4 + 1 = 37.$
Az 100101_2 a tízes számrendszerben 37.
$10100_2 = 1 \cdot 16 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 16 + 4 = 20.$
Az 10100_2 a tízes számrendszerben 20.
$11101_2 = 1 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29.$
Az 11101_2 a tízes számrendszerben 29.
$1110_2 = 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 8 + 4 + 2 = 14.$
Az 1110_2 a tízes számrendszerben 14.

A kettes számrendszert állítólag már az ókori kínaiak is ismerték. Később a középkorban Francis Bacon írt le egy kettes számrendszeren alapuló kódolást. Ismertté azután vált, hogy Gottfried Leibniz 1703-ban könyvet írt róla. A kettes számrendszerben csak két jelet kell használnunk, ezeket általában 0 és 1 jelöli. A kettes számrendszer kiválóan alkalmas arra, hogy számítógépek, digitális eszközök nyelve legyen. Az első számítógép a magyar származású Neumann János nevéhez fűződik.

2. példa

Szofinak át kellett írnia a 27-et 2-es számrendszerbe. Hogy csinálta?

Megoldás

Szofi először megnézte, hogy a kettes számrendszer helyiérték-táblázatában melyik az a legnagyobb szám, amelyik még kisebb 27-nél. Ez a 16, tehát van a számban egy 16-os és marad még 11. Ez kiad egy 8-ast, és marad 3. 4-es tehát nem lesz benne, a 3 pedig felírható 2 + 1 alakban.

A szám	harminckettesek	tizenhatosok	nyolcasok	négyesek	kettesek	egyesek	
27		1	1	0	1	1	11011_2

A 27 a kettes alapú számrendszerben 11011_2.

Feladatok

1. A bal kéz ujjai megfelelhetnek a kettes számrendszer helyiértékeinek. A kinyújtott hüvelykujj az egyeseket, a mutatóujj a ketteseket, a középső ujj a négyeseket, a gyűrűsujj a nyolcasokat, a kisujj a tízenhatosokat jelenti.
Melyik tízes számrendszerbeli számokat mutatja Tamás a kezével?

a)  *b)*  *c)* 

d) Számolj a kezeden egyesével 31-ig!

2. Írd át kettes számrendszerbe az 5-öt, 10-et, 15-öt, 20-at, 25-öt, 30-at!
Próbáld kézzel megmutatni!

3. Döntsd el, hogy igaz vagy hamis!
a) Ha egy kettes számrendszerbeli szám utolsó jegye 0, akkor a szám páros; azaz osztható 2-vel.
b) Ha egy kettes számrendszerbeli szám utolsó két jegye 0, akkor a szám osztható 4-gyel.
c) Ha egy kettes számrendszerbeli szám utolsó jegye 1, akkor a szám osztható 3-mal.

4. *a)* Számoljatok a kettes számrendszerben egyesével 10000_2-tól 100000_2-ig!
b) Számoljatok a kettes számrendszerben visszafelé egyesével 10000_2-tól 100_2-ig!

5. Mit gondolsz, milyen számjegyeket használhatsz
a) a 4-es számrendszerben? *b)* a 8-as számrendszerben?

KUTATÓMUNKA

Keresd meg az interneten, hogy mit szoktak használni a 16-os számrendszer számjegyeinek jelölésére!

16. NEGATÍV SZÁMOK

Kínában már az időszámításunk kezdete táján használták a negatív számokat, de Európában elég sokat kellett várni ezeknek a számoknak a megjelenésére. Az 1500-as években már Itáliában is számoltak negatív számokkal, de még sokáig nem terjedt el a használatuk. Te már 4. osztályban is találkozhattál negatív számokkal, például amikor hőmérőről kellett adatokat leolvasnod.

Kutatómunka

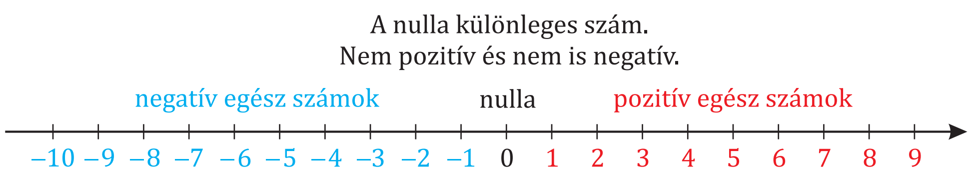
Nézz utána, mennyi volt a Földön mért leghidegebb hőmérséklet! Hol mérték ezt a hideget?

Ma már számtalan helyen használjuk a negatív számokat. Egy-két tanóra múlva te is el tudod majd végezni az alapműveleteket a negatív számokkal.

A 0 és a pozitív egész számok együtt alkotják a természetes számok halmazát. Jele **N** (a latin naturalis szó jelentése természetes, a természettel kapcsolatos): **N** = {0, 1, 2, 3, ...}.

A pozitív egész számok, a negatív egész számok és a 0 együtt alkotják az egész számok halmazát. Jele **Z** (a német Zahlen szó jelentése szám, számolni.) **Z** = {...; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; ...}.

Az egész számokat számegyenesen is ábrázolhatjuk.



Feladatok

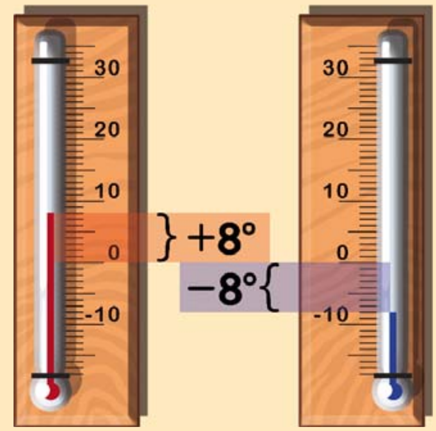
1. „Éjszaka −12 °C-ig hűlt le a levegő, reggel viszont már −5 °C-ot mutatott a hőmérő. Délután akár 1 °C-ig is emelkedhet a hőmérséklet, de sajnos éjszaka megint erős fagyra kell számítani." Rajzoljatok a füzetetekben egy számegyenest, és jelöljétek be az említett hőmérsékleteket színessel!

2. Rajzolj egy számegyenest a füzetedbe! Jelöld be a számegyenesen
a) a 2-nél nagyobb egész számokat!
b) a 4-nél kisebb egész számokat!
c) a −6-nál nagyobb egész számokat!
d) a −6-nál kisebb egész számokat!
e) a −4-nél nagyobb, de 7-nél nem nagyobb egész számokat!
f) a 10-nél nem nagyobb és −4-nél nem kisebb egész számokat!

3. Igazak vagy hamisak az alábbi állítások?
a) Minden pozitív szám nagyobb bármelyik negatív számnál.
b) Minden negatív szám kisebb a nullánál.
c) A nulla nagyobb, mint bármely pozitív szám.
d) A nulla nagyobb bármely negatív számnál.
e) Egy pozitív és egy negatív szám közül a negatív biztosan kisebb.
f) $3 < -4$. *g)* $-5 < -3$. *h)* $-20 > -10$.

1. példa

„A hőmérséklet ma reggel 8 fokkal tér el a 0-tól." Mondta egyik reggel a meteorológus a rádióban. Hány fok lehetett aznap reggel?



Megoldás

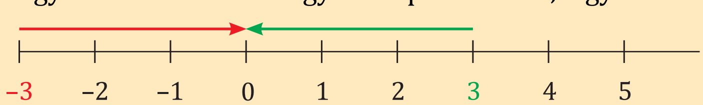
Felrajzoltunk egy hőmérőt, és bejelöltük rajta a −8 °C-os és a 8 °C-os hőmérsékletet. Mindkét érték lehetséges, de nem mindegy, hogy csikorgó fagyban vagy langyos reggelen kell iskolába indulnunk.

2. példa

Egy bevásárlóközpontban a háromszintes parkolót a föld alatt építették meg, ezért a liftben a képen látható gombok vannak. Hol lehetünk most, ha 3 emeletet kell haladnunk, hogy kimehessünk a földszinten lévő kijáraton? Ábrázoljuk az emeleteket és a helyzetünket számegyenesen is!

Megoldás

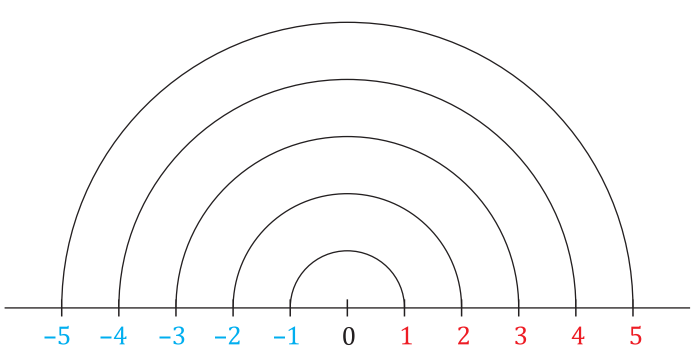
Vagy a −3-dik szinten vagyunk a parkolóban,vagy a 3. emeleten.



Ha a 0-tól indulva 5-öt balra vagy 5-öt jobbra lépek a számegyenesen, akkor ugyanolyan távol leszek a kiindulási ponttól: vagy a (−5)-ben vagy a (+5)-ben leszek. Ezt a két számot egymás **ellentettjének** is nevezik, azaz (−5) ellentettje (+5), illetve (+5) ellentettje (−5). A pozitív számok előtt álló + jeleket nem szoktuk kiírni. Akár balra, akár jobbra léptünk, mindenképpen 5 egységet haladtunk.

Egy szám 0-tól való távolságát a szám abszolút értékének hívjuk.

Egy szám abszolút értékének jele a **| |**, azaz **|+5| = 5** és **|−5| = 5**.
A 0 abszolút értéke is nulla, azaz **|0| = 0**.



3. példa

−9 ellentettje 9;
78 ellentettje −78;
−9 987 324 ellentettje 9 987 324;
0 ellentetje 0.

4. példa

|−9| = 9;
|78| = 78;
|−9 987 324| = 9 987 324;
|0| = 0.

17. A SZÁMOK ELLENTETTJE ÉS ABSZOLÚT ÉRTÉKE

5. példa

Hol lehet a számegyesen az a szám, amelynek az abszolút értéke 13?

Megoldás

Két megoldás van, a −13 és a 13. $|-13| = |13| = 13$

6. példa

a) Melyik szám abszolút értéke 11?
b) Melyik szám abszolút értéke 0?
c) Melyik szám abszolút értéke −42?

Megoldás

a) Két megoldás van, a −11 és a 11. $|-11| = |11| = 11$
b) Egyetlen szám abszolút értéke 0. $|0| = 0$
c) Nincs ilyen szám. Az abszolút érték egy távolságot jelent, ezért csak 0 vagy pozitív szám lehet.

Feladatok

1. Ábrázold számegyenesen a 2; −5; 3 számokat és ellentettjüket!

2. Másold le a táblázatot a füzetedbe és töltsd ki a hiányzó helyeket!

A szám	3	−5	−32	0	71	−1119
Ellentett						
Abszolút érték						

3. *a)* Melyik szám ellentettje 7?
b) Melyik szám ellentettjének az ellentettje 7?
c) Melyik szám ellentettje ellentettjének az ellentettje 7?

4. *a)* Adj meg olyan számot, amelyiknek az abszolút értéke 19!
b) Adj meg olyan számot, amelyiknek az abszolút értéke −19!

5. Állapítsd meg a következő kifejezések értékét! Írd le a füzetedbe!
a) $|100|$; *b)* $|-200|$; *c)* $|0|$; *d)* $|-11|$; *e)* $|-2|$;

6. Ábrázold számegyenesen azokat a pontokat, amelyek
a) kisebbek, mint 3;
b) ellentettje kisebb, mint 3;
c) nagyobbak, mint −5;
d) ellentettje nagyobbak, mint −5;
e) abszolút értékben kisebb, mint 6;
f) abszolút értékben nagyobb, mint 6!

18. EGÉSZ SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA

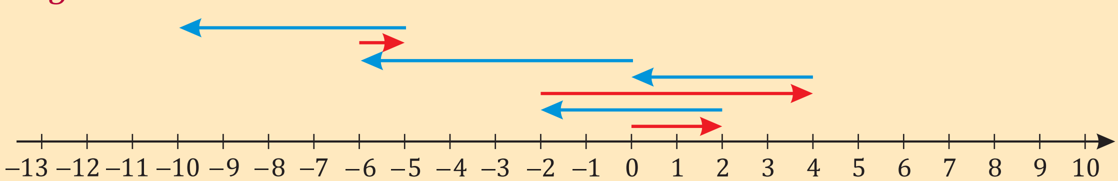
Romulus és Remus kötélhúzóst játszanak. A bábu a kötél közepén lévő jelet mutatja. A fiúk felváltva dobnak. Egy dobásnál két kockát hajítanak el. Az egyik a lépésszámot mutatja 1-től 6-ig, a másik kocka három oldalán „–” jel, három oldalán „+” jel található. Ez mutatja a lépés irányát. „–” jel esetén balra lépnek, „+” jel esetén jobbra lépnek a dobott számnak megfelelően. (Rajzolhatsz vagy ragaszthatsz jeleket a dobókockára.)

Ha a bábu a bal oldali zöld mezőre lép először, akkor Romulus nyer, elhúzta Remust. Ha jobb oldali piros mezőre lép először, akkor Remus nyer.

1. példa

Ki nyert a +2, –4, +6, –4, –6, +1, –5, lépéssorozat után?

Megoldás



A megadott lépéssorozat végén Romulus nyert.

A pozitív és negatív számok összeadását és kivonását kétféle módon is megmutatjuk; számegyenesen lépegetéssel, illetve készpénz-adósság modellel.
Már negyedikben is találkozhattatok azzal, hogy valakinek pénze és adóssága is van. A negatív számokat adósságcédulával, a pozitív számokat meglévő pénzzel szemléltethetjük.

Vigyázz!
A **+** jellel kétféle dolgot is szoktunk jelölni: a szám pozitív előjelét és az összeadást.
(A számok előtt álló pozitív előjelet gyakran nem írjuk le. Ha egy szám előtt nem áll előjel, akkor az pozitív.)
A **–** jellel kétféle dolgot is szoktunk jelölni: a szám negatív előjelét és a kivonást.

Egyelőre zárójelbe tesszük az előjeles számokat, hogy a kétféle értelmezés ne okozzon zavart.
Azt írjuk, hogy (–5), illetve (+5).

2. példa

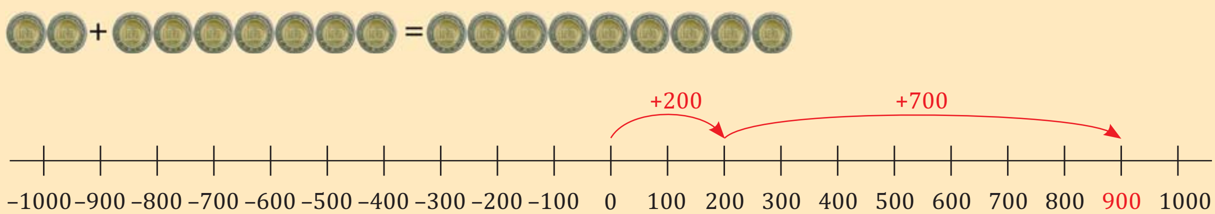
Mindegyik esetben számoljátok ki, hogy melyik gyereknek hány forintja van! Készítsetek számegyenest is az ábrázoláshoz!
a) Adorjánnak van 200 Ft-ja, és kap még 700 Ft-ot.
b) Beának van 200 Ft adóssága, és kap 700 Ft-ot.
c) Celesztinnek van 200 Ft-ja, de csinál 700 Ft adósságot.
d) Demeternek van 200 Ft adóssága, és csinál még 700 Ft adósságot.

18. EGÉSZ SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA

Megoldás

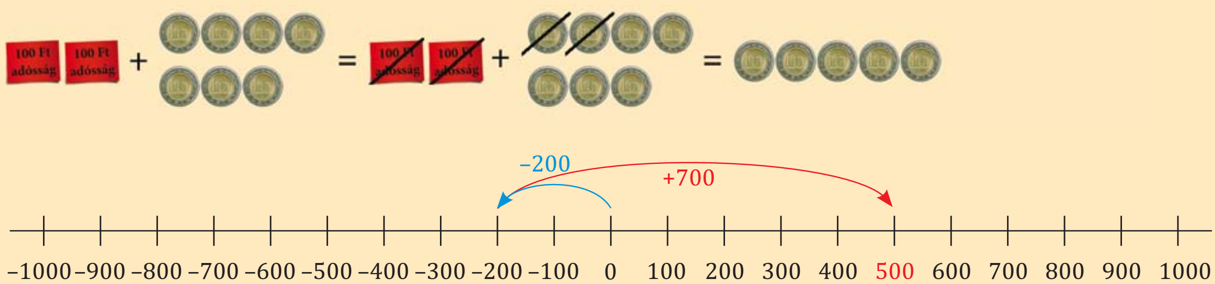
a) Ha Adorjánnak van 200 Ft-ja, és kap még 700 Ft-ot, akkor összesen 900 Ft-ja lesz.

(+200) + (+700) = (+900), rövidebben 200 + 700 = 900.



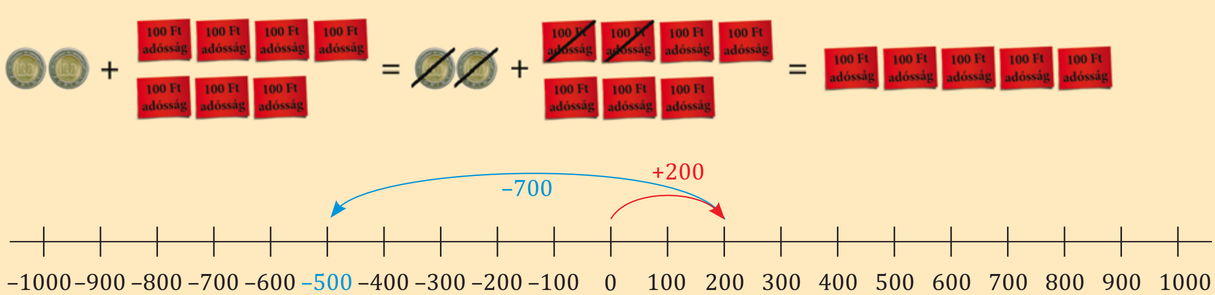
b) Bea 200 Ft-ból meg tudja adni az adósságát, és marad 500 Ft-ja.

(–200) + (+700) = (+500), rövidebben –200 + 700 = 500.



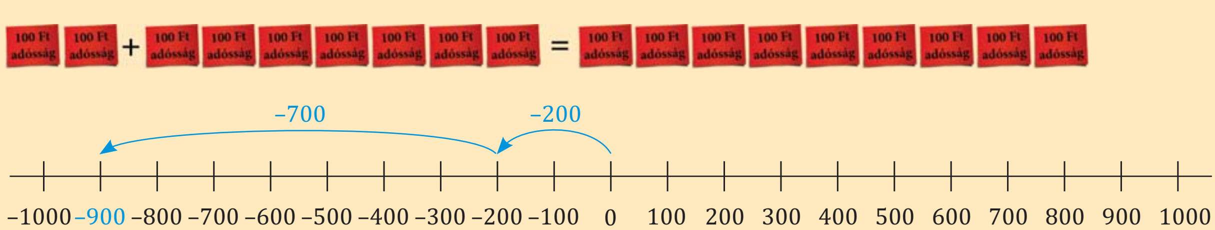
c) Celesztin a kétszáz forintjából megadhat 200 Ft adósságot, de marad még 500 Ft adóssága.

(+200) + (–700) = (–500), rövidebben 200 – 700 = –500.



d) Ha Demeter a kétszáz forint adóssága mellé még 700 Ft adósságot csinál, akkor a két adósság összeadódik.

(–200) + (–700) = (–900), rövidebben –200 – 700 = –900.



Ha valakinek van 500 Ft-ja, és 500 Ft adóssága is, akkor pont ugyanott tart, mintha nem lenne egyetlen forintja sem.

Igaz ez akkor is, ha 800 Ft-ja és 800 Ft adóssága van?

3. példa

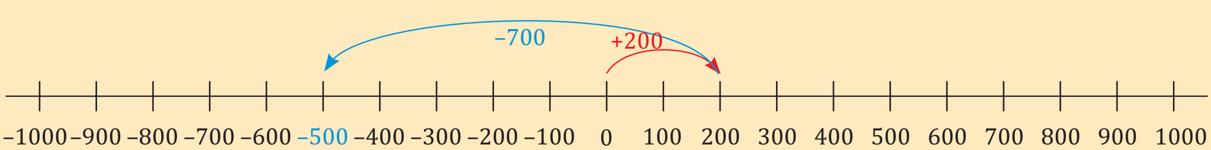
Mindegyik esetben számoljátok ki, hogy melyik gyereknek hány forintja van! Készítsetek számegyenest is az ábrázoláshoz!

a) Adorjánnak van 200 Ft-ja, és ki kell fizetnie még 700 Ft-ot.
b) Beának van 200 Ft adóssága, és ki kell fizetnie még 700 Ft-ot.
c) Celesztinnek van 200 Ft-ja, és elvesznek tőle 700 Ft adósságot.
d) Demeternek van 200 Ft adóssága, és elvesznek tőle 700 Ft adósságot.

Megoldás

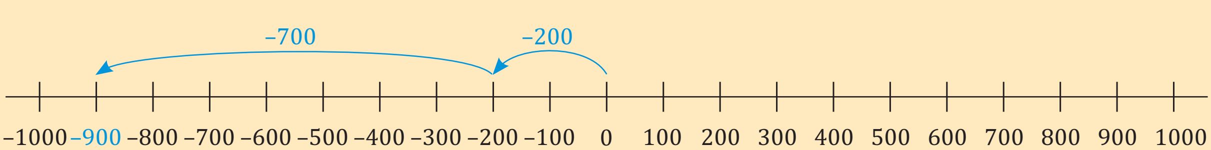
a) Ha Adorjánnak 200 Ft-ja van, és ki kell fizetnie még 700 Ft-ot, akkor ezt úgy tudja csak megtenni, ha egy 500 Ft-os adósságcéduláért kap még 500 Ft-ot. Ekkor lesz 700 Ft-ja és egy 500 Ft-os adósságcédulája, amiből a 700 Ft kifizetése után csak az adósságcédula marad meg, azaz lesz 500 Ft adóssága.

(+200) − (+700) = (−500), rövidebben 200 − 700 = −500.



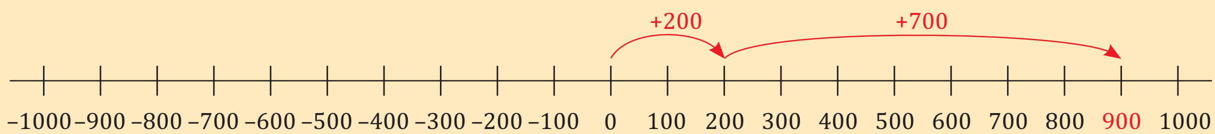
b) Beának csak adóssága van. Hogy ki tudjon fizetni 700 Ft-ot, 700 Ft-ért kap egy 700 Ft-os adósságcédulát. A 700 Ft kifizetése után csak a 900 Ft adósságcédula marad nála.

(−200) − (+700) = (−900), rövidebben −200 − 700 = −900.

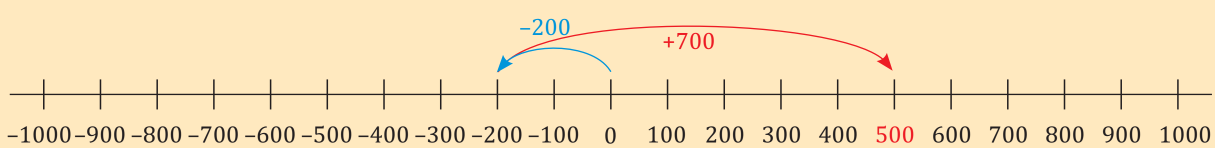


18. EGÉSZ SZÁMOK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA

c) Ha Celesztinnek összesen 200 Ft-ja van, és el tudunk venni tőle egy 700 Ft-os adósságcédulát, akkor 900 Ft-ja van és 700 Ft adósságcédulája. Anyukája nagylelkűen kifizeti az adósságát, azaz elveszi tőle a 700 Ft adósságcédulát. Az összvagyona 700 Ft-tal megnő, azaz 900 Ft-ja lesz.
(+200) − (−700) = (+900) rövidebben 200 + 700 = 900



d) Ha Demeternek 200 Ft adóssága van, és el tudunk venni tőle 700 Ft adósságot, akkor az olyan, mintha lenne 500 Ft-ja és egy 700 Ft-os adósságcédulája. Ha elvesszük tőle, azaz kifizetjük helyet te a 700 Ft-os adósságcédula, akkor 500 Ft-ja marad.
(−200) − (−700) = (+500), rövidebben −200 + 700 = +500.



Megfigyelted?

- Ha valakitől 700 Ft adósságot elveszünk, az ugyanazt jelenti, mintha hozzáadnánk 700 Ft-ot a pénzéhez.
- Ha negatív irányba lépünk a számegyenesen −700-at, az ugyanazt jelenti, mintha 700-at lépnénk pozitív irányba, azaz jobbra. Úgy is mondhatjuk, hogy egy szám kivonása helyett a szám ellentettjét adjuk hozzá.

Csoportmunka

Válasszatok egy társat, ő lesz az osztálytermi lépegető. Jelöljetek ki egy számegyenest a padlón és a lépegető álljon a 0 pontra, arccal a pozitív irányba!
Sorban mindenki mondhat egy műveletet – összeadást vagy kivonást – és egy egész számot, az osztálytermi lépegető pedig a következő szabályok szerint lép.
+ (+3) ⇒ Pozitív irányba néz és előre, azaz pozitív irányba lép 3-at.
+ (−3) ⇒ Pozitív irányba néz, de hátrál, azaz negatív irányba hátrál 3 lépést.
– (+3) ⇒ Megfordul, azaz negatív irányba néz, és előre, azaz negatív irányba lép 3-at. A lépés végén visszafordul pozitív irányba.
– (−3) ⇒ Megfordul, azaz negatív irányba néz, és hátra, azaz pozitív irányba hátrál 3 lépés. A lépés végén visszafordul pozitív irányba.

4. példa

Írjuk fel más alakban is, és számítsuk ki az eredményt!

a) (+12) + (−7)

b) (+12) − (−7)

Megoldás

a) (+12) + (−7) = 12 + (−7) = 12 − 7 = 5

b) (+12) − (−7) = 12 − (−7) = 12 + 7 = 19

Feladatok

1. Számold ki!

a) 3 − 10; *b)* 3 − (−10); *c)* −3 − 10; *d)* −3 − (−10);
e) 10 − 10; *f)* (−10) − (−10); *g)* 100 − (−10); *h)* −23 − 67.

2. Folytasd a füzetedben 15 számmal! Legyen minden szám 7-tel kevesebb, mint az előző!

a) 15; 8; 1; … *b)* −1; −8; −15; …

3. Írd le zárójelek nélkül, majd számold ki az összegeket!

a) (+14) + (+14); *b)* (+14) − (+14); *c)* (+14) − (+14); *d)* (+14) − (−14);
e) (−14) + (+14); *f)* (−14) − (+14); *g)* (−14) − (+14); *h)* (−14) − (−14).

4. Írd le zárójelek nélkül, majd számold ki az összegeket!

a) (+14) + (+28); *b)* (+14) − (+28); *c)* (+12) − (+32); *d)* (+32) − (−42);
e) (−19) + (+4); *f)* (−11) − (+33); *g)* (−65) − (+43); *h)* (−88) − (−88).

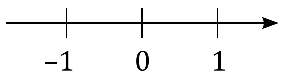
5. Írd fel rövidebb alakban is, és számold ki a műveletek eredményét! Mely esetekben kaptál azonos végeredményt?

a) (+13) + (+34); *b)* (+13) + (−34); *c)* (−13) + (+34); *d)* (−13) + (−34);
e) (+13) − (+34); *f)* (+13) − (−34); *g)* (−13) − (+34); *h)* (−13) − (−34).

6. Gazsi elhatározta, hogy összeállít egy saját számítógépet magának. Két lehetőséget vett számba, egy olcsóbbat és egy drágábbat. Egy táblázatban gyűjtötte az árakat. Mindkét esetben becsüld meg a végösszeget ezresekre kerekítéssel, majd számold ki pontosan!

	Alfa gép	Ómega gép
Számítógép ház	2360	9980
Tápegység	6350	14 980
Alaplap	14 270	23 653
Processzor	23 990	34 590
Videókártya	–	16 290
Memória	6233	16 890
Merevlemez	13 289	15 890
SSD	–	28 990
Monitor	29 990	46 990
Billentyűzet, egér	3199	13 880

19. ÖSSZEFOGLALÁS



A **természetes számok**, illetve az **egész számok** szemléltetésére alkalmas eszköz a számegyenes. A számegyenes olyan egyenes, amelyiknek egyik végén nyíl van, ez jelöli ki a pozitív irányt. A számegyenesen megtalálható a nulla, amelytől pozitív irányban növekvő sorrendben találhatók a **pozitív számok**, a másik irányban pedig csökkenő sorrendben a **negatív számok**. A 0 és az 1 helye határozza meg, hogy mekkora a számegyenesen az egység.

63 ellentetje a –63.
–25 ellentetje a 25.

$|-15| = 15$; $|15| = 15$

Minden számnak van **abszolút értéke**. Ez az a szám, amelyik megmutatja a 0-tól való távolságot, jelölése a két függőleges vonal (pl. $|2| = 2$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$). A pozitív számoknak „+” (plusz), a negatív számoknak „–” (mínusz) az előjele. A 0-nak nincs előjele. A 0 nem pozitív, és nem negatív szám.

10 000	1000	100	10	1
5	2	7	9	1

A számokat tízes számrendszerben, helyiértékes sorrendben leírt számjegyekkel adjuk meg. A felhasználható számjegyek: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jobbról balra a helyiértékek: egyesek, tízesek, százasok, ezresek stb. Egy szám fontos jellemzője, hogy hány jegyű. A 2006 négyjegyű, a 0 egyjegyű.

huszonötmillió-negyvenezer-hat

A számokat hármas csoportosításban írhatjuk, ez segíti a számok kiejtését és leírását. A számokat balról jobbra olvasva, hármas csoportosításban ejtjük ki. (Pl. –11 234 592 mínusz tizenegymilló-kétszázharmincnégyezer-ötszázkilencvenkettő.) Kétezerig egybeírjuk a számokat, kétezer felett pedig a hármas csoportosításnak megfelelően kötőjellel. (Pl. 1872 – ezernyolcszázhetvenkettő, 2000 – kétezer, 2003 – kétezer-három.)

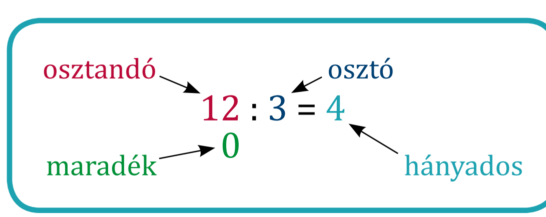
$1010101_2 = 165_{10}$

A tízes számrendszeren kívül használunk más számrendszereket is. A számítástechnikában gyakori a **kettes számrendszer** (pl. 100101), az idő mérésénél pedig elterjedt a **hatvanas számrendszer is**. Különleges esetekben él még a római számokkal történő számmegadás hagyománya is. (Pl. MCMLXXVI.)

Műveleti jelek:
+; –; ·; :

Relációs jelek:
$<$; $\leq$; $>$; $\geq$; $=$
$\nless$; $\nleq$; $\ngtr$; $\ngeq$; $\neq$

A számokkal **műveletek** végezhetők, ilyen például az összeadás, a kivonás, a szorzás és az osztás. Az összeadás eredménye az **összeg**, a kivonásé a **különbség**, a szorzásé a **szorzat**, az osztásé a **hányados**, és ebben az esetben beszélhetünk még a **maradék**ról is.



$15 + 23 = 23 + 15$
$42 \cdot 21 = 31 \cdot 42$
$16 - 8 \neq 8 - 16$
$92 : 4 \neq 4 : 92$

Több művelet kijelölésekor számít a műveletek sorrendje. Előbb a szorzást és az osztást hajtjuk végre, azután következik a kivonás és az összeadás. A zárójel felboríthatja a műveletek sorrendjét.

A **pontos számmegadás** mellett használunk közelítő értékeket is. **Becslés**kor nem tudjuk meghatározni a pontos értéket, **kerekítés**kor ismerjük, csak a lényegtelen számjegyeket 0-val helyettesítjük.

Feladatok

1. Melyik ez a szám: kétmillió-háromszázegyezer-hatvanöt?
A) 20 301 065
B) 2 301 065
C) 2 301 165

2. Melyik igaz?
A) A 2 345 876 esetén az ezresek helyén a 4 áll.
B) A 2 345 876 esetén a százezresek helyén a 3 áll.
C) A 2 345 876 esetén a tízezresek helyén a 3 áll.

3. A CMXXV római szám
A) 955-öt,
B) 925-öt,
C) 1125-öt jelent?

4. Mi a nyíl szerepe a számegyenesen?
A) Semmi, csak jól mutat.
B) Megmutatja a pozitív irányt.
C) Az abszolút értéket adja meg.

5. Mennyi 345 345 + 567 987?
A) 914 002
B) 913 332
C) 914 432

6. Mennyi 345 345 – 567 987?
A) –913 332
B) 222 642
C) –222 642

7. Mennyi 3456 · 1000?
A) 3 456 000
B) 3 45 600
C) 3 4 560

8. Mennyi 345 · 23?
A) 7935
B) 7934
C) 7945

9. Melyik igaz, melyik hamis?
A) A 3 és a –3 abszolút értéke megegyezik.
B) A –3 kisebb, mint a 3.
C) A –(–3) = –3.
D) Az 5 – 3 = 3 – 5.

10. Mennyi a szorzat eredménye? (–831) · 13
A) –10 813
B) –10 803
C) –10 823

11. Mennyi a 4567 : 42 hányadosa?
A) 107
B) 109
C) 108

12. Mennyi a 4567 : 42 maradéka?
A) 29
B) 31
C) 35

13. Tízes számrendszerben mennyi a 1001_2?
A) 9
B) 7
C) 5

14. Melyik a 72 és 45 közös osztója?
A) 2
B) 5
C) 9

15. Melyik az 56 501 ezresekre kerekített értéke?
A) 56 000
B) 56 500
C) 57 000

16. Mennyi (–6) – (–9)?
A) 3
B) –15
C) –3

19. ÖSSZEFOGLALÁS

17. Határozd meg a szorzások hiányzó tényezőjét!

a) ___ · 2 = 516 *b)* 172 · ___ = 516 *c)* ___ · 4 = 516 *d)* 86 · ___ = 516 *e)* ___ · 12 = 516

18. Végezd el a szorzásokat!

a) 123 · 7	*b)* 456 · 2	*c)* 789 · 5	*d)* 4123 · 8	*e)* 7465 · 3	*f)* 8421 · 10
123 · 70	456 · 20	789 · 50	4123 · 80	7465 · 30	8421 · 100
1230 · 7	4560 · 2	7890 · 5	41230 · 8	74 650 · 3	84 210 · 10
1230 · 70	4560 · 20	7890 · 50	41230 · 80	74 650 · 30	84 210 · 100

Milyen szabályszerűséget vettél észre az eredményekben?

19. Végezd el az osztásokat!

a) 516 : 2	*b)* 516 : 3	*c)* 516 : 4	*d)* 516 : 6	*e)* 516 : 12	*f)* 516 : 43
5160 : 2	5160 : 3	5160 : 4	5160 : 6	5160 : 12	5160 : 43
5160 : 20	5160 : 30	5160 : 40	5160 : 60	5160 : 120	5160 : 430

Milyen szabályszerűséget vettél észre az eredményekben?

20. Végezd el az osztásokat!

a) 9846 : 3	*b)* 3456 : 3	*c)* 2418 : 3	*d)* 9384 : 3	*e)* 1728 : 3	*f)* 6504 : 3
9846 : 2	3456 : 2	2418 : 2	9384 : 2	1728 : 2	6504 : 2
9846 : 6	3456 : 6	2418 : 6	9384 : 6	1728 : 6	6504 : 6
9846 : 9	3456 : 9	2418 : 9	9384 : 9	1728 : 9	6504 : 9

21. Készíts számegyenest a füzetedben a családodban lévő személyek életkorának bemutatásához!

22. Készíts a füzetedben számegyenest 0-tól 35-ig!

a) Színezd a számegyenesen a 32 osztóit sárgával és a 24 osztóit kékkel! Mely számok lesznek sárgák is és kékek is?

b) Színezd a számegyenesen a 3 többszöröseit pirossal, az 5 többszöröseit kékkel! Mely számok lesznek pirosak is és kékek is?

23. Géza a következő 2-es számrendszerbeli számot írta fel barátjának, hogy számolja át 10-es alapú számrendszerbe 1201; de a barátja kinevette. Miért?

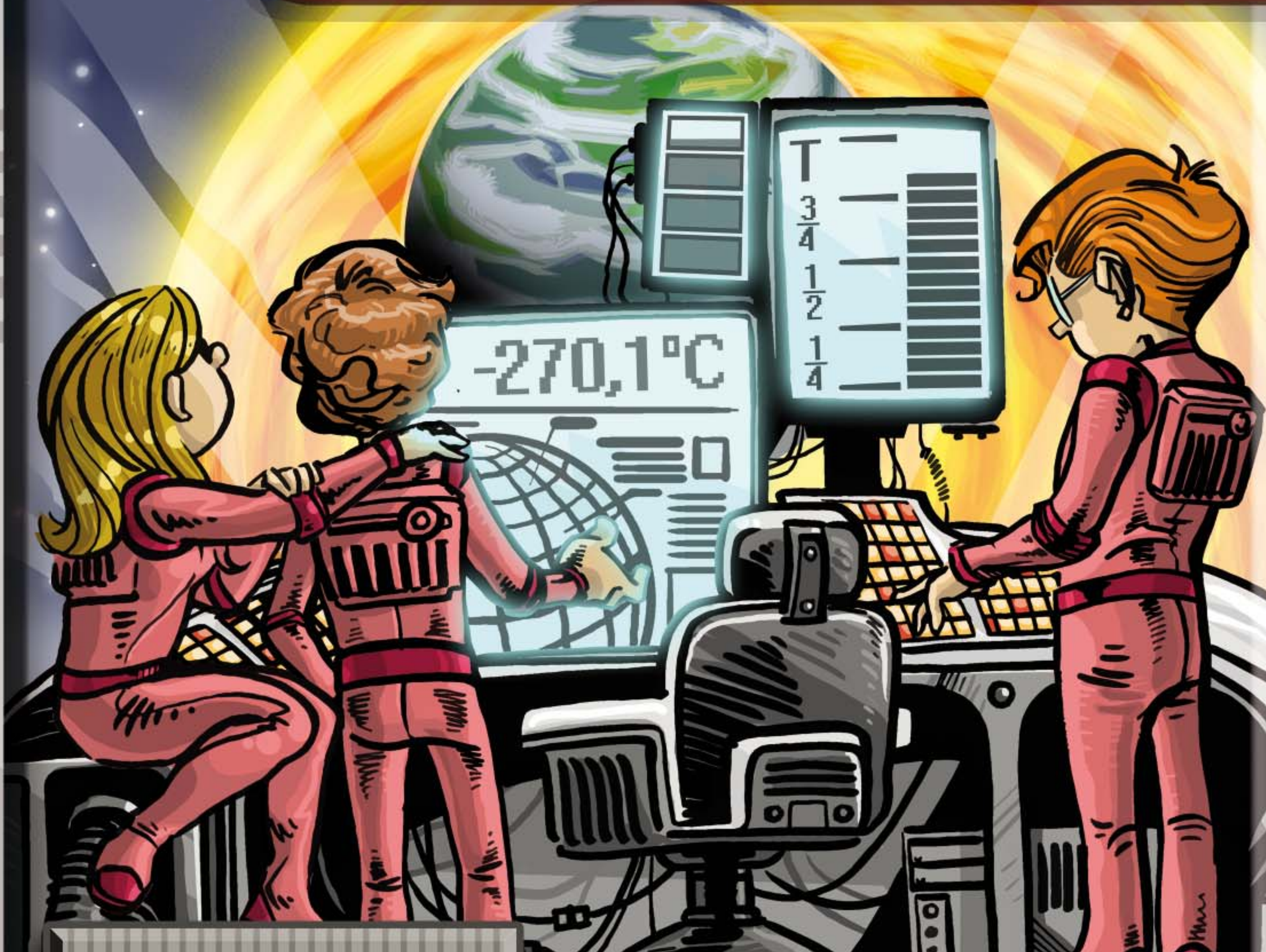
24. A mi osztályunk 24 fős, hány fős csoportokat tudunk alakítani, ha csoportmunkában dolgozunk az órán, és minden csoportban ugyanannyi gyerek van?

25. Írd fel a 27; 36; 120; 144; 180; 1000 számokat két természetes szám szorzataként! Próbálj minél több osztópárt keresni!

26. Számold ki a 100 tagból álló összeget!

(+1) + (−2) + (+3) +(−4) + ... (+99) + (−100)

II. Törtek, tizedes törtek



Egy nappal később az 5. a űrhajója jóval közelebb került a Földhöz, de az utasok ebből nem sokat vettek észre.
– Mi az az izé, ami már órák óta –270,1-en áll? – kérdezte Gazsi.
– Máris észrevetted? Nagyon ügyes vagy! A külső hőmérsékletet mutatja, de nem órák óta, hanem három hete –270 °C-ot mutat – szólalt meg Gerzson.
– Ez az űr hőmérséklete. Lehetne akár 3,05 K is, ha nem Celsius-, hanem Kelvin-fokban mérnénk a kinti hőmérsékletet. Nagyjából ennyit melegít rajta a háttérsugárzás – tódította Okoska, aki most sem bírt csöndben maradni. – Az abszolút 0 fok körülbelül –273,15 °C.
– Ez lenne az a hőmérséklet, ahol te is csöndben tudnál maradni? – vágta rá Berta szemrehányó tekintettel, hiszen mindannyian figyeltek Gerzson előadásán, amit még az út elején tartott az űr hőmérsékletéről. Szeme sarkából látta, hogy Gazsi is nagyon bólogat.
– És a másik bigyó, amin a mutató a $\frac{3}{4}$ jel fölött áll?
– Az az áramforrások töltöttségét jelzi. Ne aggódjatok, ez is bőven elég, több mint amire szükségünk van! 24 napja vagyunk úton, és már csak 6 nap van hátra. Épp a negyede a kirándulásnak.
– Hűha! – sóhajtott Panni. – Akkor már csak 5 esti buli lesz?

1. TÖRT, TÖRTEK ÁBRÁZOLÁSA SZÁMEGYENESEN

Szofi 7 barátnőjével ünnepelte a születésnapját. A csokitortát 8 egyenlő részre vágta fel, hogy mindenkinek egy-egy szelet jusson. Kínálgatni kezdte a barátnőit, de csak 3 lány evett a tortából egy-egy szeletet, a többiek még játszottak. Hányad része fogyott el a csokitortának?

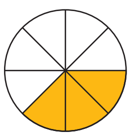
A torta három nyolcad része elfogyott.

Ezt röviden $\frac{3}{8}$ alakban írjuk.

$\frac{3}{8}$: 3 – számláló; törtvonal; 8 – nevező

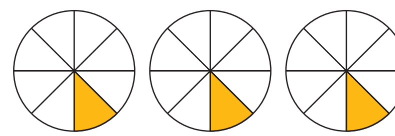
A $\frac{3}{8}$ egy **tört**.

A törtvonal alatti szám a **nevező**, ami megnevezi, hogy az egészet hány egyenlő részre osztjuk fel. A törtvonal feletti szám a **számláló,** ami megszámolja, hogy hány darabot veszünk a részekből.



A $\frac{3}{8}$ tört három értelmezése:

1. Egy egészet nyolc egyenlő részre osztunk, és a részekből veszünk hármat.
2. Három egész egy-egy nyolcadát vesszük.
3. Három és a nyolc hányadosa.



Törtek a $\frac{3}{8}, \frac{4}{7}, \frac{8}{7}$.

A két egész szám hányadosaként felírható számokat **racionális számoknak** nevezzük.

Ne feledjük, hogy 0-val nem értelmezett az osztás, ezért **a tört nevezője nem lehet 0**!

Például:

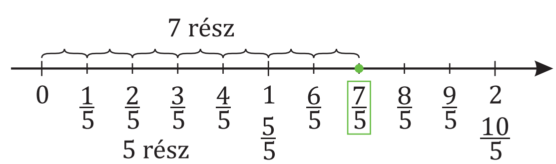
$6=\frac{6}{1}$; $6=\frac{12}{2}$;

$-3=-\frac{3}{1}$; $0=\frac{0}{1}$;

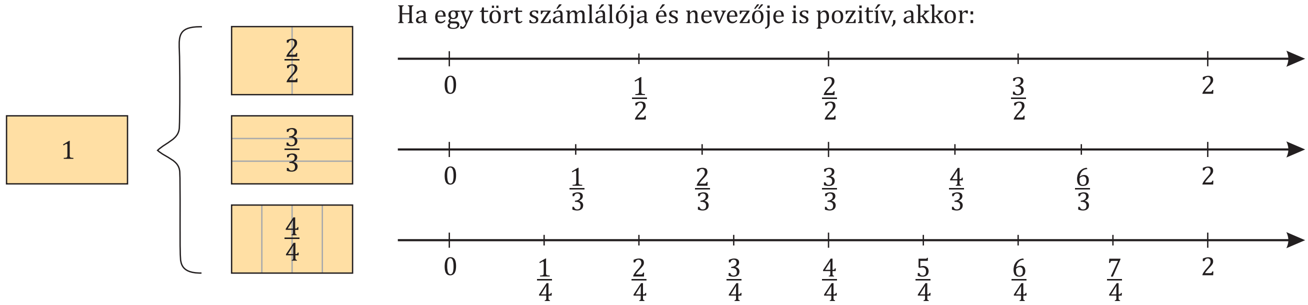
$23=\frac{23}{1}$; $-6=-\frac{30}{5}$.

Minden egész szám felírható tört alakban is!

A törteket is tudjuk számegyenesen ábrázolni. Az ábrán az egészek közötti részeket 5 egyenlő részre osztottuk, így azon ötödök láthatók: $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}$ stb.



Ha egy tört számlálója és nevezője is pozitív, akkor:



Ha a számláló kisebb a nevezőnél, akkor a tört 1-nél kisebb.

Ha a számláló nagyobb a nevezőnél, akkor a tört 1-nél nagyobb.

Ha egy tört számlálója egyenlő a nevezőjével, akkor a tört értéke 1-gyel egyenlő.

Feladatok

1. Írd le a következő törteket számokkal!

a) három tizenegyed; *b)* két ötöd; *c)* négy heted; *d)* öt hatod;
e) kilenc heted; *f)* három negyed; *g)* egy tized; *h)* három tizenötöd.

2. Írd le a következő törteket betűkkel!

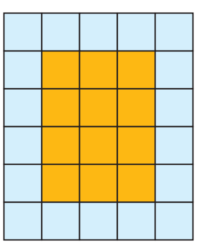
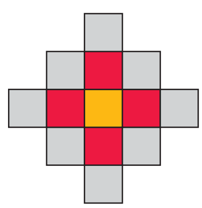
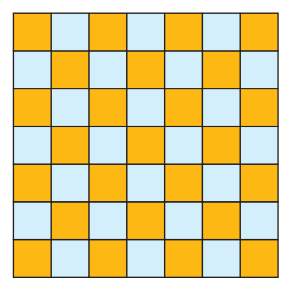
a) $\frac{3}{7}$; *b)* $\frac{4}{17}$; *c)* $\frac{25}{26}$; *d)* $\frac{12}{235}$; *e)* $\frac{1}{100}$; *f)* $\frac{7}{4}$; *g)* $\frac{23}{56}$.

3. Melyik az a tört, amelyiknek a

a) számlálója 10, nevezője 17? *b)* nevezője 8, számlálója 7?
c) számlálója 4, nevezője 5? *d)* számlálója 8, nevezője 9?
e) nevezője 34, számlálója 23? *f)* számlálója 101, nevezője 103?

4. Minden ábra egy egész. Az egésznek hányad része

a) sárga, kék; *b)* sárga, szürke, piros; *c)* kék, sárga?

a)

b)

c)


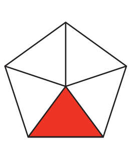
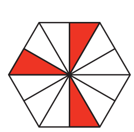
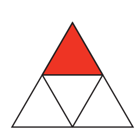
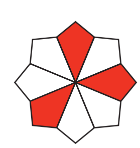
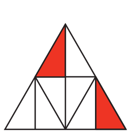
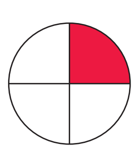
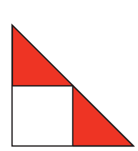
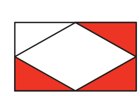
5. Melyik az a tört, amelyiknek

a) a számlálója 1-gyel nagyobb, mint a $\frac{4}{9}$ nevezője, a nevezője pedig megegyezik a $\frac{4}{9}$ nevezőjével?

b) a számlálója 1-gyel kisebb, mint a $\frac{4}{9}$ számlálója, a nevezője pedig 2-vel nagyobb a $\frac{4}{9}$ nevezőjénél?

c) a számlálója megegyezik a $\frac{4}{9}$ számlálójával, a nevezője 8-cal nagyobb, mint a $\frac{4}{9}$ nevezője?

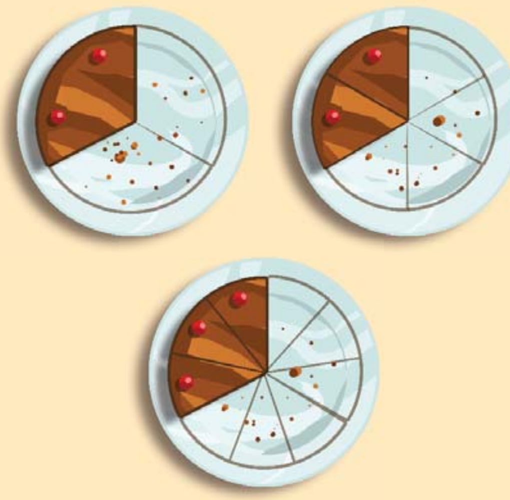
6. Mekkora része színezett az alakzatoknak?

a)

b)

c)

d)

e)

f)

g)

h)


2. TÖRTEK BŐVÍTÉSE, EGYSZERŰSÍTÉSE, ÖSSZEHASONLÍTÁSA

1. példa

Szofi kapott 3 kicsi tortát. Az egyiket három egyenlő részre vágta, de a lányok szóltak neki, hogy ezek túl nagy adagok, ezért a második tortát már inkább hat egyenlő részre vágta.
Berta tányérjára egy harmadot tett, Panninak pedig két hatodot adott.
Szofi a harmadik tortát kilenc egyenlő részre vágta.
Mosolyogva tett Bori elé három kilenced tortát.
Ki kapott nagyobb részt a tortából?



Megoldás

Látjuk, hogy az $\frac{1}{3}$, a $\frac{2}{6}$ és a $\frac{3}{9}$ torta ugyanannyi.
Vagyis mindenki ugyanakkora részt kapott.

Az 1. példában látottak alapján:

$\frac{1}{3}=\frac{2\cdot 1}{2\cdot 3}=\frac{2}{6}$; $\quad \frac{1}{3}=\frac{3\cdot 1}{3\cdot 3}=\frac{3}{9}$; $\quad \ldots \quad \frac{1}{3}=\frac{20\cdot 1}{20\cdot 3}=\frac{20}{60}$; $\quad \ldots$

Ezt nevezzük a törtek bővítésének.

Bővítéskor a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző egész számmal szorozzuk meg. Bővítéskor a tört értéke nem változik.

2. példa

Érdemes-e Szofinak 9 részre vágni a tortáját, ha mindhárom barátnője 3 szeletet fogyaszt el?

Megoldás

Attól, hogy a tortát több egyenlő részre vágjuk, a torta mennyisége nem változik, elég lenne tehát 3 részre vágnia.

Ez azt jelenti, hogy $\frac{3}{9}=\frac{3:3}{9:3}=\frac{1}{3}$,

vagy másképpen $\frac{3}{9}=\frac{\cancel{3}\cdot 1}{\cancel{3}\cdot 3}=\frac{1}{3}$.

Ezt nevezzük egyszerűsítésnek.

Egyszerűsítéskor a tört számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a nullától különböző egész számmal osztjuk. Egyszerűsítéskor a tört értéke nem változik.

3. példa

Egyszerűsítsük a $\frac{48}{30}$-ot a lehető legnagyobb számmal!

Megoldás

A $\frac{48}{30}$ számlálója és nevezője egyaránt osztható 2-vel. Húzzuk át a számokat, és írjuk a számláló fölé, illetve a nevező alá a hányadosokat!

$$\frac{48}{30}=\frac{\overset{24}{\cancel{48}}}{\underset{15}{\cancel{30}}}=\frac{24}{15}$$

Az egyszerűsített tört a $\frac{24}{15}$. Ez tovább egyszerűsíthető, mert mind a számláló, mind a nevező osztható 3-mal:

Ugyanazt kapjuk, mintha a $\frac{48}{30}$-ot $2 \cdot 3 = 6$-tal egyszerűsítettük volna:

$\frac{48}{30} = \frac{\cancel{6} \cdot 8}{\cancel{6} \cdot 5} = \frac{8}{5}$.

A példában a $\frac{8}{5}$ tovább már nem egyszerűsíthető, ez a **tört legegyszerűbb alakja**.

$$\frac{48}{30} = \frac{\overset{24}{\cancel{48}}}{\underset{15}{\cancel{30}}} = \frac{\overset{8}{\cancel{24}}}{\underset{5}{\cancel{15}}} = \frac{8}{5}$$

Gyakran érdemes egyszerűsíteni a törteket, mert kisebb számokkal könnyebb lesz a további számolás. Például: Ha azt mondjuk, hogy egy hét $\frac{15}{105}$ részét játékkal töltöttük, akkor ezt nem olyan egyszerű elképzelni, de $\frac{15}{105} = \frac{1 \cdot 15}{7 \cdot 15} = \frac{1}{7}$, azaz a hét egy hetedét, vagyis pont 1 napot töltöttük játékkal.

4. példa

A $\frac{2}{5}$ vagy a $\frac{3}{7}$ a nagyobb?

Megoldás

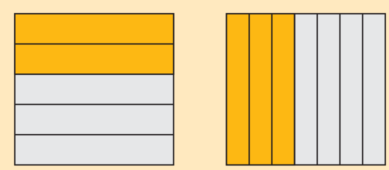
I. módszer

Könnyen összehasonlíthatjuk a két törtet, ha azonos a nevezőjük. A 35 többszöröse az 5-nek és a 7-nek is, ezért a 35 épp megfelelő lesz közös nevezőnek.

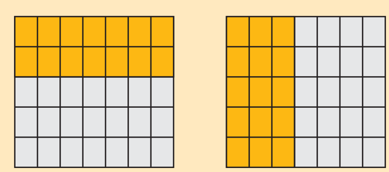
A $\frac{2}{5}$-öt 7-tel bővítve $\frac{14}{35}$-öt kapunk.

A $\frac{3}{7}$-et 5-tel bővítve a bővített alak $\frac{15}{35}$ lesz.

Az egyenlő nevezőjű pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a számlálója nagyobb.



$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{7}$



$\frac{14}{35} < \frac{15}{35}$

II. módszer

Könnyen összehasonlíthatjuk a két törtet, ha azonos a számlálójuk. A 6 épp megfelelő lesz közös számlálónak.

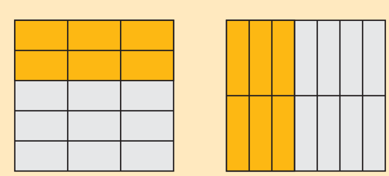
A $\frac{2}{5}$-öt 3-mal bővítve $\frac{6}{15}$-öt kapunk.

A $\frac{3}{7}$-et 2-vel bővítve $\frac{6}{14}$ lesz.

Ha 15 egyenlő részre osztunk valamit, akkor nyilván kisebb részeket kapunk, mint ha csak 14 részre darabolnánk.

$\frac{6}{15} < \frac{6}{14}$

Az egyenlő számlálójú pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a nevezője kisebb.



$\frac{6}{15} < \frac{6}{14}$

2. TÖRTEK BŐVÍTÉSE, EGYSZERŰSÍTÉSE, ÖSSZEHASONLÍTÁSA

Feladatok

1.

a) Bővítsd a példa alapján a következő törteket! $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

$\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{15}{9}$; $-\frac{2}{7}$; $-\frac{5}{8}$; $-\frac{6}{5}$.

b) Bővítsd a törteket úgy, hogy 100 legyen a nevezőjük!

$\frac{2}{5}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{15}{25}$; $-\frac{2}{10}$; $-\frac{5}{20}$; $-\frac{6}{50}$.

c) Bővítsd a törteket úgy, hogy 60 legyen a számlálójuk!

$\frac{2}{3}$; $\frac{5}{4}$; $\frac{15}{9}$; $-\frac{4}{7}$; $-\frac{12}{13}$; $-\frac{6}{5}$.

2. Egyszerűsítsd a következő törteket!

$\frac{2}{24}$; $\frac{10}{24}$; $\frac{15}{24}$; $-\frac{18}{24}$; $-\frac{12}{24}$; $-\frac{36}{24}$.

$\frac{3}{12}$; $\frac{9}{6}$; $\frac{6}{4}$; $-\frac{12}{8}$; $-\frac{15}{10}$; $-\frac{8}{6}$.

3. Melyik tört a nagyobb?

a) $\frac{3}{12}$ vagy $\frac{5}{12}$; *b)* $\frac{2}{3}$ vagy $\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{1}{2}$ vagy $\frac{3}{8}$; *d)* $-\frac{1}{12}$ vagy $-\frac{3}{12}$;

e) $\frac{4}{5}$ vagy $\frac{3}{4}$; *f)* $\frac{7}{12}$ vagy $\frac{3}{4}$; *g)* $\frac{5}{7}$ vagy $\frac{5}{8}$; *h)* $-\frac{5}{8}$ vagy $-\frac{3}{5}$;

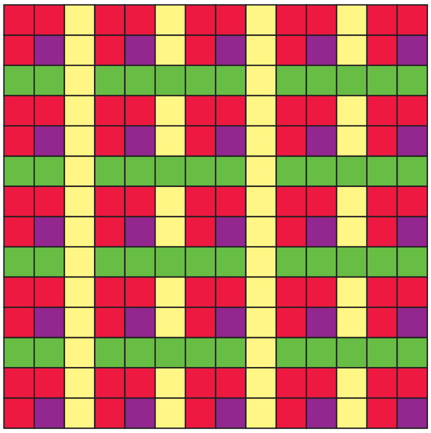
i) $\frac{5}{12}$ vagy $\frac{7}{18}$; *j)* $-\frac{9}{5}$ vagy $-\frac{9}{4}$; *k)* $\frac{4}{9}$ vagy $\frac{3}{7}$; *l)* $\frac{7}{9}$ vagy $\frac{5}{6}$.

4. Rendezd csökkenő sorrendbe a következő törteket:

$\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{5}{6}$; $\frac{7}{12}$!

5. Vettünk egy új asztalterítőt.

a) A terítő hányad része sárga?
b) A terítő hányad része piros?
c) A terítő hányad része lila?
d) A terítő hányad része zöld?
e) A terítő hányad része sárga vagy zöld?
f) A terítő hányad része nem lila?
g) Állítsd növekvő sorrendbe az így kapott törteket!



6. A 90 perces focimeccsen eltelt a második félidő harmada.

a) Hány perc telt el a mérkőzésből?
b) Hány perc van hátra?

Az oázisok környékén a nagy szárazság miatt folyamatosan öntözni kell. Mivel a legegyszerűbb a vízsugarat körbe forgatva locsolni, ezért gyakran kör alakú kerteket hoznak létre.

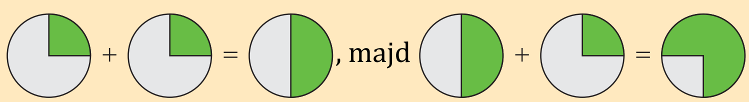
1. példa

Mohamed és családja kör alakú kertjük $\frac{1}{4}$-ében banánt ültetett.

Később folytatták a telepítést, így a kert újabb $\frac{1}{4}$-ét sikerült beültetniük, majd kis idő múlva újabb $\frac{1}{4}$-ét. Mekkora területet ültettek be összesen? Olvassuk le az ábrákról!

Megoldás

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, majd $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

A zöld szeletek összege: .

A kertnek összesen $\frac{3}{4}$-ét ültették be.

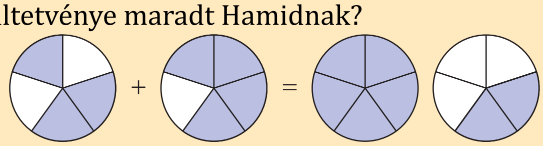
2. példa

Hamidnak 2 egyforma nagyságú kertje is van. Az egyik $\frac{3}{5}$-ében, a másik $\frac{4}{5}$-ében termel datolyát.

a) Hamid kertjeinek hányad részén termel datolyát?

b) A második kert $\frac{2}{5}$ részében sajnos kipusztultak a datolyapálmák. Hány kertnyi datolyaültetvénye maradt Hamidnak?

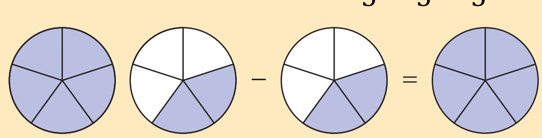
Megoldás



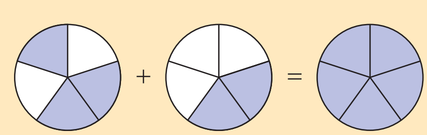
a) $\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$

Hamidnak $\frac{7}{5}$ kertnyi datolyaültetvénye van.

b) Kezdetben $\frac{7}{5}$ kertnyi datolyaültetvénye volt, $\frac{7}{5} - \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$ kertnyi datolyapálmája maradt.



Másképpen: A második kertben $\frac{2}{5}$ kertnyi datolyapálma marad.



$\frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1.$

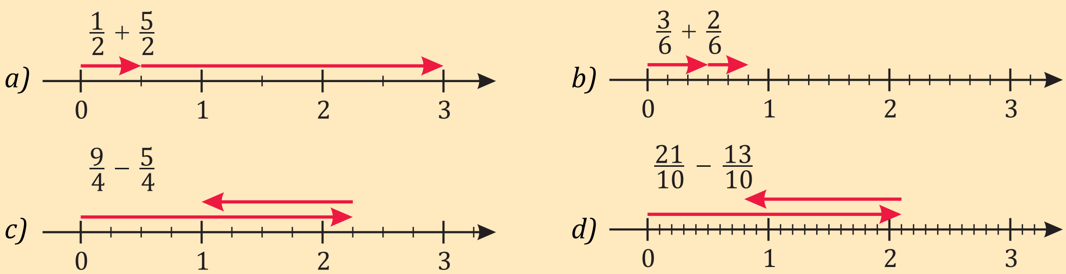
3. EGYENLŐ NEVEZŐJŰ TÖRTEK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA

3. példa

Ábrázoljuk számegyenesen!

a) $\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$; *b)* $\frac{3}{6}+\frac{2}{6}$; *c)* $\frac{9}{4}-\frac{5}{4}$; *d)* $\frac{21}{10}-\frac{13}{10}$.

Megoldás



Egyenlő nevezőjű törteket úgy adunk össze (vonunk ki), hogy a törtek számlálóját összeadjuk (kivonjuk). A nevező változatlan marad.

Feladatok

1. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}$; *b)* $\frac{6}{20}+\frac{9}{20}$; *c)* $\frac{5}{14}+\frac{6}{14}$; *d)* $\frac{15}{28}-\frac{13}{28}$; *e)* $\frac{8}{5}-\frac{6}{5}$; *f)* $\frac{17}{25}-\frac{11}{25}$.

2. Rajzolj egy számegyenest a füzetedbe! Ábrázold a felsorolt számokat és a műveletek eredményét!

$\frac{3}{2}+\frac{4}{2}$; $\frac{7}{6}-\frac{2}{6}$; $\frac{8}{5}-\frac{5}{5}$; $\frac{21}{11}-\frac{13}{11}$.

3. *a)* Válassz ki minden színből egyet, és állítsd a törteket nagyság szerinti sorrendbe!

b) Válassz két egyszínű törtet! Add össze őket!

c) Válassz két egyszínű törtet, minden színből egy-egy párt és vond ki a nagyobbikból a kisebbiket!

$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{3}$
$\frac{15}{7}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{4}$
$\frac{11}{12}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{12}{3}$	$\frac{4}{25}$
$\frac{23}{25}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{8}{7}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{10}{25}$

4. János beszolgáltatta a tizedet a várúrnak és egy másik tizedet a templomnak. $\frac{3}{10}$-et elvitt a lánya lakodalma. A termés hányad része maradt meg a családnak?

Különböző nevezőjű törtek összeadása és kivonása

1. példa

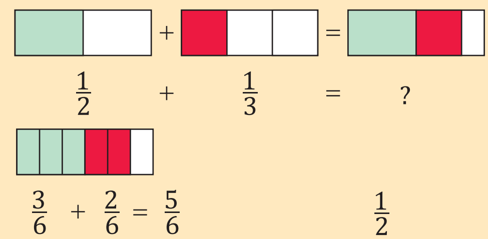
Panniék hazafelé epret vettek. Az eper felét Panni kapta, a harmadát meg anya ette meg.

a) Hányad része fogyott el az epernek?

b) Mennyivel kapott többet Panni, mint anya?

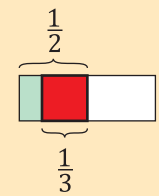
c) Mennyi eper maradt apának?

Megoldás



a) Azonos nevezőjű törteket könnyű volt összeadni. Most bővítsük mindkét törtet úgy, hogy ugyanaz a szám legyen a nevezőben: $\frac{1}{2}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}$ és $\frac{1}{3}=\frac{1\cdot 2}{3\cdot 2}=\frac{2}{6}$.

Tehát az eper $\frac{5}{6}$ részét ették meg ketten együtt.



b) Most is az segít, ha ugyanaz a két tört nevezője, azaz hozzuk közös nevezőre, bővítsük a törteket: $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$.

Tehát Panni $\frac{1}{6}$ résszel kapott többet, mint anya.

c) Az 1 is felírható tört alakban: $1=\frac{6}{6}$. Vonjuk ki az 1 egész adag eperből, amit Panniék már megettek:

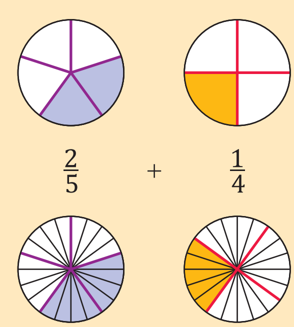
$1-\frac{5}{6}=\frac{6}{6}-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$. Tehát apa az eper hatodát kapta.

Az egész számok is felírhatóak tört alakban. Például: $3=\frac{3}{1}$, $6=\frac{6}{1}$; $-3=\frac{-3}{1}$; $0=\frac{0}{1}$; $23=\frac{23}{1}$.

Bővíthetjük az 1 nevezőjű törtet is: $10=\frac{10}{1}=\frac{20}{2}=\frac{1010}{101}$; $54=\frac{54}{1}=\frac{108}{2}$; ...

2. példa

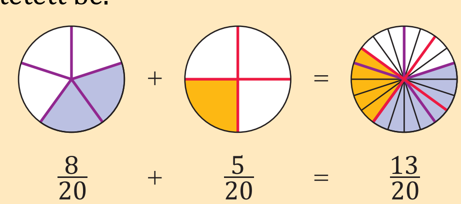
Alinak két egyenlő nagyságú kertje van. Első nap a kert $\frac{2}{5}$-ét vetette be, másnap az $\frac{1}{4}$-ét. A kert hányadrészét vetette be az első két napon?



Megoldás

Ha ugyanakkora részekre osztjuk a kerteket, akkor össze tudjuk őket hasonlítani, és meg tudjuk mondani, hogy a kertnek hányad része a két rész együttvéve. Osszuk fel mindkét kertet 20 egyenlő részre! Ali az első napon $\frac{2}{5}=\frac{2\cdot 4}{5\cdot 4}=\frac{8}{20}$ részt, a második napon $\frac{1}{4}=\frac{1\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{5}{20}$ részt ültetett be.

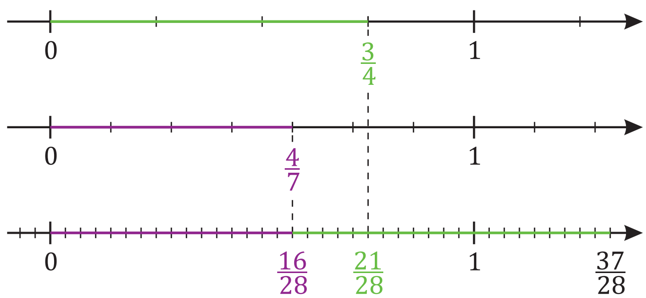
A közös nevező a 20, a törteket bővítettük.



Ali a kert $\frac{8}{20}+\frac{5}{20}=\frac{13}{20}$ részét vetette be az első két napon.

Különböző nevezőjű törtek összeadásakor vagy kivonásakor a törteket bővítéssel vagy egyszerűsítéssel közös nevezőre hozzuk, és úgy végezzük el a műveleteket.

4. KÜLÖNBÖZŐ NEVEZŐJŰ TÖRTEK ÖSSZEADÁSA ÉS KIVONÁSA



Az ábrán láthatjuk, hogy a számegyenes is hasznos lehet a törtek összeadásánál.

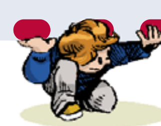
Például a $\frac{3}{4}+\frac{4}{7}=\frac{21}{28}+\frac{16}{28}=\frac{37}{28}$.

Játék

Alakítsatok párokat! Minden pár kap 2 kockát. Minden gyerek dob egy-egy kockával, a dobott szám lesz a saját törtjének a számlálója. Még egyszer dobnak, ez lesz a törtjük nevezője.

Az kap pontot, aki gyorsabban megmondja a pár által dobott két tört összegét (vagy különbségét). Például ha az első dobásnál Panni 1-et, Gerzson 5-öt dobott, a másodiknál Panni 3-at, Gerzson pedig megint 5-öt, akkor az $\frac{5}{5}+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ $\left(\text{vagy } \frac{5}{5}-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\right)$ eredménnyel lehet nyerni.

Játszatok 9 partit! Aki több pontot gyűjt, az nyer.



Feladatok

1. Végezd el a következő műveleteket!

a) $2+\frac{3}{7}$; *b)* $3+\frac{11}{20}$; *c)* $\frac{3}{14}+2$; *d)* $\frac{15}{12}-1$; *e)* $2-\frac{6}{10}$; *f)* $\frac{56}{25}-2$.

2. Számold ki!

a) $\frac{1}{6}+\frac{2}{3}$; *b)* $\frac{3}{8}+\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{1}{3}+\frac{6}{15}$; *d)* $\frac{7}{4}-\frac{11}{16}$; *e)* $\frac{11}{5}-\frac{23}{25}$; *f)* $\frac{129}{30}-\frac{13}{6}$.

3. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{3}{2}+\frac{4}{3}$; *b)* $\frac{3}{5}+\frac{3}{4}$; *c)* $\frac{3}{6}-\frac{2}{5}$; *d)* $\frac{7}{10}+\frac{4}{15}$; *e)* $\frac{21}{12}-\frac{23}{18}$; *f)* $\frac{53}{9}-\frac{37}{6}$.

4. Végezd el a következő műveleteket!

a) $\frac{1}{6}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{3}{10}+\frac{2}{5}-\frac{3}{2}$; *c)* $\frac{4}{3}-\frac{6}{5}+\frac{4}{15}$; *d)* $\frac{11}{4}-\frac{11}{16}-\frac{11}{8}$.

5. Pótold a kimaradt számokat a füzetedben!

a) $2 - \frac{\square}{3} = \frac{1}{3}$; *b)* $1 + \frac{2}{\triangle} = \frac{5}{3}$; *c)* $\frac{\bigcirc}{3} - 2 = \frac{2}{3}$; *d)* $\frac{19}{3} - 5 = \frac{\text{⬡}}{3}$;

6. Pótold a kimaradt számokat a füzetedben!

a) $3 - \frac{2}{6} = \frac{\diamond}{3}$; *b)* $5 + \frac{9}{6} = \frac{\text{⬠}}{2}$; *c)* $\frac{\text{▱}}{6} + \frac{5}{3} = \frac{7}{3}$; *d)* $\frac{13}{6} - \frac{\text{⏢}}{6} = 1$;

7. Pótold a kimaradt számokat a füzetedben!

a) $\frac{5}{4} + \frac{\square}{\bigcirc} = \frac{11}{7}$; *b)* $\frac{11}{8} - \frac{1}{3} = \text{⬡}$; *c)* $\frac{19}{21} - \triangle = \frac{1}{2}$; *d)* $\frac{101}{19} + \text{⬠} = \frac{201}{17}$;

8. Népdalországban a hivatalos fizetőeszköz a pénz. Egy pénz 16 000 Ft-nak felel meg. A bevásárló énekli:

„Én elmentem a vásárba félpénzzel.
Tyúkot vettem a vásárban negyedpénzzel.
Csirkét vettem a vásárban nyolcadpénzzel.
Récét vettem a vásárban tizenhatodpénzzel.
Ludat vettem a vásárban tizenhatodpénzzel.
Kárikittyom, édes tyúkom, elfogyott a félpénzem.”

Számold ki, hogy mennyi forinttal ment a vásárba, hány forintba került egy csirke, egy réce, egy lúd! Vajon valóban elfogyott-e a vásárló összes pénze?

9. Újlakiék lakásfelújításba fogtak.

a) A festők három teli vödör festékkel kezdték a munkát. Végül az egyik vödörben $\frac{2}{3}$, a második vödörben $\frac{2}{5}$, a harmadik vödörben $\frac{4}{15}$ részig maradt festék. Mennyi festék maradt összesen?

b) A 10 méter hosszú folyosó lefedésére maradék padlószőnyeget szántak. Az egyik szoba lefedéséből $\frac{49}{12}$ méter, a második szoba lefedéséből $\frac{33}{15}$ méter, a harmadik szoba lefedéséből $\frac{157}{60}$ méter maradt. Le lehet-e fedni velük a folyosót?

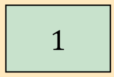
c) $\frac{26}{7}$ méter hosszú szőnyegből levágtak $\frac{5}{3}$ métert. Mekkora hosszúságú szőnyeg maradt?

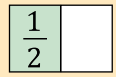
5. TÖRT SZORZÁSA TERMÉSZETES SZÁMMAL

1. példa

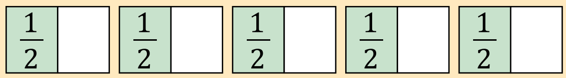
Mennyi $\frac{1}{2}\cdot 5$?

Megoldás

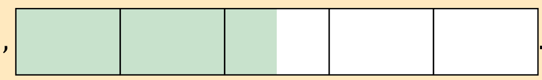
Ha ez egy egész: 

, akkor ez egy fél: 

.

Az 5 darab $\frac{1}{2}$, az 

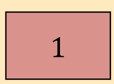
$\frac{1}{2}\cdot 5=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$,
vagyis a számlálót szorozzuk 5-tel.

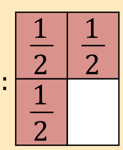
Ez ugyanannyi, mint az öt fele, azaz $\frac{5}{2}$, .

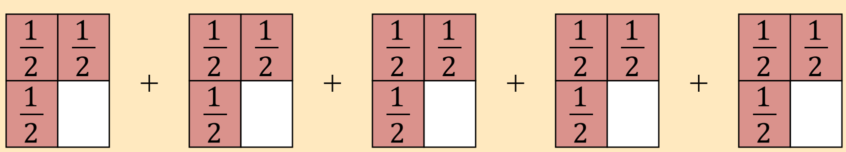
2. példa

Mennyi $\frac{3}{2}\cdot 5$?

Megoldás

Ha ez egy egész: 

, akkor ez három ketted: 

Az 5 darab $\frac{3}{2}$ az: 

$\frac{3}{2}\cdot 5=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}$, vagyis a számlálót szorozzuk 5-tel, $\frac{3}{2}\cdot 5=\frac{15}{2}$.

Törtet természetes számmal úgy szorzunk, hogy **a tört számlálóját megszorozzuk a természetes számmal, a nevezőt pedig változatlanul leírjuk.**

Ha egy törtet megszorzunk egy egész számmal, akkor előfordulhat, hogy egyszerűsíthetünk a szorzás után, például: $9\cdot\frac{1}{12}=\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{\underset{4}{\cancel{12}}}=\frac{3}{4}$.

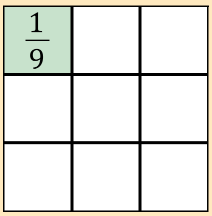
Lehetséges, hogy még a szorzás elvégzése előtt tudunk egyszerűsíteni, például: $4\cdot\frac{5}{24}=\frac{\overset{1}{\cancel{4}}\cdot 5}{\underset{6}{\cancel{24}}}=\frac{5}{6}$.

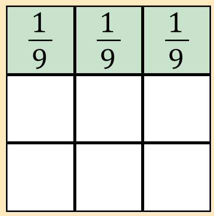
Ez éppen azt jelenti, hogy a nevezőt osztottuk néggyel: $4\cdot\frac{5}{24}=\frac{5}{24:4}=\frac{5}{6}$.

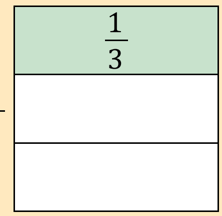
3. példa

Mennyi $\frac{1}{9} \cdot 3$?

Megoldás



$\cdot\, 3 =$


$= \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{9:3} = \frac{1}{3}$


vagyis a nevezőt osztottuk 3-mal.

Törtet természetes számmal úgy is szorozhatunk, hogy a tört nevezőjét osztjuk a természetes számmal, a számlálót pedig változatlanul leírjuk.
Ezt a módszert akkor alkalmazhatjuk, ha a szorzó osztója a tört nevezőjének!

Feladatok

1. Végezd el a szorzásokat! Ha lehet, akkor egyszerűsíts!

a) $\frac{7}{9} \cdot 4$; *b)* $\frac{4}{15} \cdot 6$; *c)* $2 \cdot \frac{10}{3}$; *d)* $4 \cdot \frac{5}{6}$; *e)* $\frac{6}{14} \cdot 7$; *f)* $\frac{8}{15} \cdot 3$; *g)* $\frac{3}{14} \cdot 0$;
h) $7 \cdot \frac{8}{5}$; *i)* $8 \cdot \frac{5}{6}$; *j)* $10 \cdot \frac{6}{5}$; *k)* $9 \cdot \frac{4}{3}$; *l)* $\frac{5}{36} \cdot 17$; *m)* $\frac{5}{56} \cdot 16$.

2. Kati naponta $\frac{3}{4}$ liter tejet iszik meg. Hány liter tejet iszik meg
a) 3, *b)* 4, *c)* 5, *d)* 7, *e)* 10, *f)* 28
nap alatt?

$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{22}{5}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{15}{7}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{23}{4}$	3	$\frac{1}{6}$	$\frac{14}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{12}{3}$
5	$\frac{12}{5}$	$\frac{11}{8}$	$\frac{1}{4}$	4	6
7	$\frac{12}{3}$	11	$\frac{3}{8}$	$\frac{11}{3}$	$\frac{21}{2}$

3. Szorozd meg a törteket az ugyanolyan színű dobozokban lévő természetes számmal $\left(\text{pl: } \frac{2}{3} \cdot 3 = \right)$!

4. Istvánék lakásától $\frac{5}{8}$ kilométerre van az iskola. Hány kilométert tesz meg jövet-menet
a) naponta, *b)* egy hét alatt, ha egy héten öt nap zajlik tanítás, *c)* négy hét alatt?

5. A kiscica 1 nap alatt a macskaeledel $\frac{3}{80}$ részét eszi meg. Mennyi macskaeledelt eszik meg
a) 5 nap, *b)* 10 nap, *c)* 15 nap, *d)* 20 nap alatt?
e) Megközelítőleg hány napra elég egy zacskó macskaeledel?

6. TÖRT OSZTÁSA TERMÉSZETES SZÁMMAL

1. példa

Kalózok foglalták el a szigetet, és felosztották 15 egyenlő részre. 8 rész Jack kapitánynak jutott, aki négy gyermekének adta a területeket. Így a kalózgyerekek két-két részt kaptak a 15 részre osztott szigetből. A birtoklevélbe a következő bejegyzés került:

Thomas a sziget $\frac{2}{15}$ részének birtokosa, a saját területén ő mindennek az ura. Ugyanez állt Liza, Robert és Jenna birtoklevelében is. Hogyan számoltak?

Megoldás

$\frac{8}{15} : 4 = \frac{8:4}{15} = \frac{2}{15}$

A tört számlálóját osztjuk a természetes számmal, és a nevezőt változatlanul hagyjuk.

Sajnos ez nem mindig lehetséges. Például a sziget maradék részét, a $\frac{7}{15}$ részt ezzel a módszerrel nem tudjuk 4 egyenlő részre osztani, mert a 7 nem osztható néggyel.

2. példa

A kalózok a sziget kincsét is magukhoz vették. Jack kapitány vette el a legnagyobb részt, az arany $\frac{3}{5}$-ét, de ezt is egyenlően osztotta szét a gyerekei között. Mennyit kapott Jenna?

Megoldás

A 3 nem osztható 4-gyel, úgyhogy a számlálót nem tudjuk osztani, más módszert kell keresni. Minden ötödöt osszunk fel 4 részre, azaz a teljes kincset ne ötödökre, hanem huszadokra osszuk! A $\frac{3}{5}$ törtet bővítjük:

$\frac{3}{5} : 4 = \frac{12}{20} : 4 = \frac{3}{20}$. Vagyis $\frac{3}{20}$ rész lett Jennáé.

Összegyűjtöttük, hogy az előző példában milyen műveleteket végeztünk:

Először bővítettünk, azután egyszerűsítettünk: $\frac{3}{5} : 4 = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} : 4 = \frac{3 \cdot \cancel{4}}{5 \cdot 4} : \cancel{4} = \frac{3}{5 \cdot 4} = \frac{3}{20}$.

A két példa alapján az osztás elvégzésére két módszerünk van.

Törtet természetes számmal úgy osztunk, hogy

1. **a tört nevezőjét megszorozzuk a természetes számmal, és a tört számlálóját változtatás nélkül leírjuk.**
   Ez a módszer mindig alkalmazható.
2. **a tört számlálóját osztjuk a természetes számmal, és a tört nevezőjét változtatás nélkül leírjuk.**
   Ezt csak akkor tehetjük meg, ha a természetes szám osztója a tört számlálójának.

Feladatok

1. Végezd el a következő osztásokat! Ha lehet, egyszerűsíts!

a) $\frac{7}{9}:4$; *b)* $\frac{10}{3}:5$; *c)* $\frac{12}{5}:4$; *d)* $\frac{2}{3}:3$; *e)* $\frac{7}{5}:2$; *f)* $\frac{3}{10}:4$;

g) $\frac{7}{9}:7$; *h)* $\frac{5}{12}:5$; *i)* $\frac{2}{3}:5$; *j)* $\frac{6}{15}:5$; *k)* $\frac{9}{7}:2$; *l)* $\frac{8}{9}:4$.

2. Laci egy könyv $\frac{6}{25}$ részét olvasta el 3 óra alatt. István ugyanennek a könyvnek $\frac{10}{27}$ részét 5 óra alatt olvasta el. Melyik fiú olvasott gyorsabban?

3. Számítsd ki!

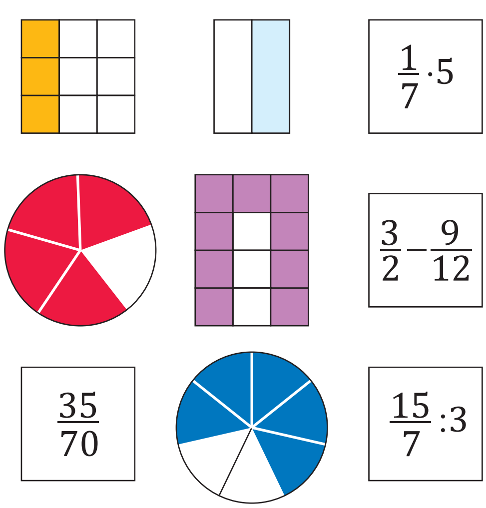
a) 9 doboz joghurt tömege $\frac{18}{5}$ kilogramm. Hány kilogramm 1 doboz joghurt tömege? Hány kilogramm 4 doboz joghurt tömege?

b) Zoliék 12 nap alatt a telek $\frac{36}{49}$ részét művelték meg. Hányad részét művelték meg 1 nap alatt?

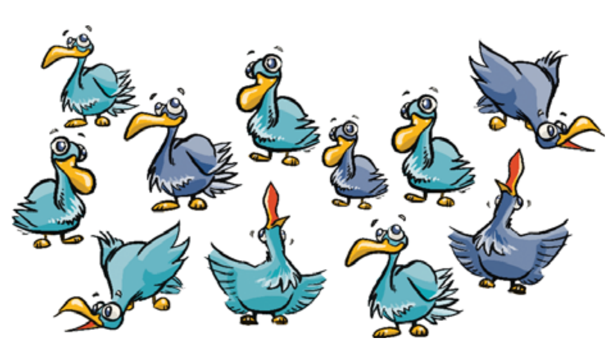
c) 10-en 4 nap alatt $\frac{7}{2}$ kilogramm kenyeret ettek meg. Mennyi kenyeret evett meg 1 ember 4 nap alatt? Mennyi kenyeret evett meg 1 ember 1 nap alatt?

4. Az irodalmi versenyen az Arany csapat is indult. 100-nál kevesebb pontot értek el, de a megszerezhető pontok $\frac{12}{13}$ részével így is elsők lettek. A csapatban 5 gyerek volt, akik fejenként ugyanannyi ponttal járultak hozzá a sikerhez. Hány pontot lehetett szerezni a versenyen?

5. Melyiknek nincs párja?



6. A képen látható madarak közül kettő, aztán a maradék harmada elrepül. Hány madár marad?



7. VEGYES SZÁMOK

1. példa

Írjuk át a $\frac{67}{15}$-öt vegyes szám alakba!

Megoldás

Elvégezzük a maradékos osztást.

$67 : 15 = 4$
$\;\;7$

Tehát az eredmény 4 egész és még $\frac{7}{15}$, azaz $4\frac{7}{15}$.

Találkozhatunk ilyen számokkal: $5\frac{1}{2}$; $3\frac{2}{5}$; $10\frac{1}{7}$; ...

Ezek a számok egy egész és egy tört számból állnak, ezért vegyes számnak hívjuk őket. Az $5\frac{1}{2}$-et olvashatjuk „öt és fél”-nek vagy „öt egész egykedted”-nek is. Jelentése: $5 + \frac{1}{2}$.

2. példa

A kalózok levelet kaptak az elfoglalt sziget kormányzójától. Csak a kalózgyerekek tudtak olvasni, így Robert olvasta fel az apjának, Jacknek:

„Hódolatunk jeléül mi, a sziget lakosai, havonta $37\frac{1}{2}$ arany adót fizetünk Jack kapitánynak.”

Mennyi aranyat kap a kapitány 1 év alatt?

Megoldás

Mivel ez egy összeg, az évi adót kétféleképpen is kiszámíthatjuk.

1. A vegyes számot átírhatjuk tört alakba:

   $37\frac{1}{2} = 37 + \frac{1}{2} = \frac{74}{2} + \frac{1}{2} = \frac{75}{2}$ és $\frac{75}{2} \cdot 12 = \frac{900}{2} = 450.$

2. A vegyes szám két részét külön-külön is megszorozhatjuk 12-vel:

   $37 \cdot 12 = 444$ és $12 \cdot \frac{1}{2} = 6.$

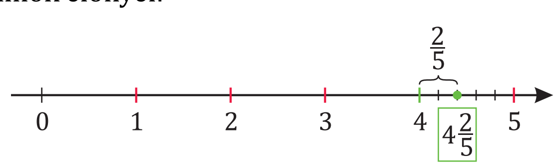
   $444 + 6 = 450$

Bárhogyan számolunk, a kapitány évente 450 aranyat kap.

Láttuk, hogy a vegyes szám egy egész szám és egy egynél kisebb tört összege.

Például: $\frac{22}{5} = 4\frac{2}{5} = 4 + \frac{2}{5}$. Pont ebben rejlenek a vegyes számok előnyei:

I. A számegyenesen megkeressük az egész számot, és csak az utána lévő egészet osztjuk fel a megfelelő részekre.



II. A vegyes számot könnyű egyszerűsíteni vagy bővíteni, mivel csak a tört részével kell foglalkoznunk, a természetes szám változatlan marad.

Egyszerűsítés: $3\frac{6}{24} = 3 + \frac{\overset{1}{\cancel{6}}}{\underset{4}{\cancel{24}}} = 3\frac{1}{4}$

Bővítés: $5\frac{2}{3} = 5\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = 5\frac{10}{15}$

III. Vegyes számok összeadásánál az egészeket és a törteket külön-külön is össze lehet adni, csak vigyáznunk kell, mivel az összegben lévő tört egynél nagyobb is lehet, s ekkor azt még tovább kell alakítani.

$4\frac{2}{5} + 3\frac{5}{6} = 7 + \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{6}\right) = 7\frac{37}{30} = 8\frac{7}{30}$

IV. Vegyes számot könnyű megszorozni egy természetes számmal, mert az egész számot és a számlálót is elég külön-külön megszorozni. (Hiszen a vegyes szám egy összeg.)

$$4\frac{2}{5}\cdot 7=(4\cdot 7)+\frac{2\cdot 7}{5}=28+\frac{14}{5}=30\frac{4}{5}$$

Ha akarjuk, akkor a műveletek elvégzése előtt átalakíthatjuk a vegyes számot törtté. Ezt mindig megtehetjük.

Feladatok

1. Alakítsd át a törteket vegyes számokká!

a) $\frac{5}{2}$; *b)* $\frac{9}{2}$; *c)* $\frac{10}{3}$; *d)* $\frac{5}{3}$; *e)* $\frac{5}{4}$; *f)* $\frac{7}{4}$;

g) $\frac{17}{5}$; *h)* $\frac{21}{5}$; *i)* $\frac{13}{6}$; *j)* $\frac{17}{7}$; *k)* $\frac{9}{8}$; *l)* $\frac{20}{9}$.

2. Írd át törtté!

a) $2\frac{1}{2}$; *b)* $5\frac{1}{2}$; *c)* $1\frac{1}{3}$; *d)* $1\frac{2}{3}$; *e)* $5\frac{3}{4}$; *f)* $9\frac{1}{4}$;

g) $2\frac{2}{5}$; *h)* $4\frac{3}{5}$; *i)* $5\frac{5}{6}$; *j)* $1\frac{2}{7}$; *k)* $3\frac{5}{8}$; *l)* $5\frac{4}{9}$.

3. Rajzolj egy számegyenest a füzetedbe, és ábrázold az összeget a számegyenesen!

a) $1\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}$; *b)* $1\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}$; *c)* $3\frac{2}{5}+2\frac{3}{10}$; *d)* $1\frac{2}{5}+2\frac{1}{2}$; *e)* $1\frac{1}{2}+1\frac{2}{3}$; *f)* $\frac{5}{6}+3\frac{2}{3}$.

4. Végezd el a következő műveleteket, és az eredményeket állítsd csökkenő sorrendbe!

a) $5\frac{5}{6}-1\frac{1}{3}$; *b)* $2\frac{2}{3}+1\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{1}{6}+1\frac{11}{12}$; *d)* $5\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}$;

e) $4-1\frac{3}{4}$; *f)* $2+1\frac{2}{3}$; *g)* $3\frac{7}{15}-\frac{1}{5}$; *h)* $6\frac{2}{3}-1\frac{8}{12}$.

5. Egy kisdobozos almalé $\frac{1}{5}$ liter.

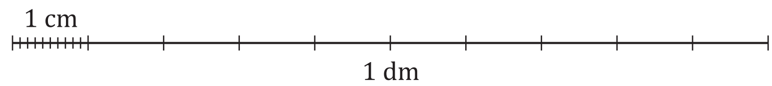
a) Hány liter egy hatos pakk?
b) Egy fóliában 12 hatos pakk van. Hány liter üdítőt tartalmaz egy fólia?
c) Hány liter üdítőt vásárolt a vendéglős, ha 4 fóliányi üdítőt vásárolt?

6. Melyik természetes számmal szorozhatjuk meg a $2\frac{3}{5}$-öt, hogy $10\frac{4}{5}$-nél kisebb számot kapjunk? Keresd meg az összeset!

7. Egy könyvesboltban az egyik polcon háromféle könyvet tartanak. A mesekönyv $2\frac{4}{7}$ cm széles, és 5 darab van a polcon. A kalandregény $4\frac{2}{7}$ cm széles, és 8 darab van a polcon. A gyermekregény $3\frac{1}{7}$ centiméter széles, és 5 darab található a polcon. Milyen széles a polc, ha több könyv már nem fér rá?

8. TIZEDES TÖRTEK

Tizedes törtekkel lépten-nyomon találkozunk. A hosszúság mérésénél is használtunk tizedeket, századokat és ezredeket.



A méter **tized**e a deciméter. A *deci* latin szó, jelentése tized. $\frac{1}{10}$ m = 1 dm

A méter **század**a a centiméter. A *centi* latin szó, jelentése század. $\frac{1}{100}$ m = 1 cm

A méter **ezred**e a milliméter. A *milli* latin szó, jelentése ezred. $\frac{1}{1000}$ m = 1 mm

Amikor egy számot 10-zel, 100-zal vagy 1000-rel szoroztunk, akkor a szám jegyeit 1, 2 vagy 3 hellyel balra léptettük. A szám jegyeinek helyiértékei változtak meg.
Hasonló dolog történik, ha 10-zel, 100-zal vagy 1000-rel osztunk, csak ebben az esetben a számjegyek 1, 2 vagy 3 hellyel jobbra lépnek.

$$\ldots,\quad 1000 \overset{\cdot 10}{\leftarrow} 100 \overset{\cdot 10}{\leftarrow} 10 \overset{\cdot 10}{\leftarrow} 1 \overset{\cdot 10}{\leftarrow} \frac{1}{10} \overset{\cdot 10}{\leftarrow} \frac{1}{100} \overset{\cdot 10}{\leftarrow} \frac{1}{1000}$$

$$1000 \xrightarrow{:10} 100 \xrightarrow{:10} 10 \xrightarrow{:10} 1 \xrightarrow{:10} \frac{1}{10} \xrightarrow{:10} \frac{1}{100} \xrightarrow{:10} \frac{1}{1000}$$

A helyiértékek sorát tetszőlegesen tudtuk növelni. Az 1 után a 10 jött, majd a 100, 1000, ... úgyhogy semmilyen akadálya nem volt annak, hogy egy számot 10-zel, 100-zal, 1000-rel, ... megszorozzunk. Ez annyit jelentett, hogy a szám jegyeit balra léptettük 1, 2 vagy 3 hellyel, és a keletkezett üres helyekre 0-t írtunk. Mit tegyünk, hogy ne legyen akadálya az osztásnak sem? Folytassuk a helyiértékek sorát a másik irányba is! A helyet, ahol az egészek véget érnek és a tizedek, századok kezdődnek, megjelöljük egy vesszővel, ez a tizedesvessző.

A tized, század, ezred, tízezred, százezred, milliomod ... számok használata a középkorban vált általánossá Európában. A számok egész részét és tört részét sokáig fölülvonással, vagy indexbe írással különítették el, de körülbelül 500 évvel ezelőtt elterjedt a tizedesvessző használata.

1,435

egészrész tizedesvessző törtrész

Magyarországon az egészeket a tizedektől, századoktól ... egy vesszővel választjuk el, ez a tizedesvessző. Európa néhány államában a tizedespont jelölés terjedt el.

1. példa

Osszuk el a 12-t 10-zel, 100-zal, 1000-rel.

Megoldás

A hányadosok sorban

$\frac{12}{10}, \frac{12}{100}, \frac{12}{1000},$

azaz tizedes tört alakban

$\frac{12}{10}, \frac{12}{100}, \frac{12}{1000}.$

...	ezer	száz	tíz	egy		tized	század	ezred	tízezred	...
	1000	100	10	0		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{10\,000}$	
			1	2	,					
				1	,	2				
				0	,	1	2			
				0	,	0	1	2		

A szám jegyeit a helyiérték táblázatban 1-gyel, 2-vel, 3-mal jobbra kellett léptetni, és a keletkezett helyeket 0-val kellett feltölteni.

Írjuk fel az 1 mm hosszúságot többféleképpen!

10 mm = 1 cm	1 mm = $\frac{1}{10}$ cm	1 mm = 0,1 cm
100 mm = 1 dm	1 mm = $\frac{1}{100}$ dm	1 mm = 0,01 dm
1000 mm = 1 m	1 mm = $\frac{1}{1000}$ m	1 mm = 0,001 m

A lázmérő tized pontossággal mutatja a test hőmérsékletét. A képen látható lázmérőn 39,6 °C látható, igen magas lázat mutat.

A nagy versenyeken is század-, sőt ezredmásodperc pontossággal mérik a sportolók idejét.

2. példa

Írjuk a felsorolt törteket helyiérték-táblázatba, majd írjuk fel őket tizedes tört alakban is!

a) $5\frac{1}{10}$; *b)* $5\frac{1}{100}$; *c)* $103\frac{24}{100}$; *d)* $\frac{4}{1000}$

Megoldás

…	ezer	száz	tíz	egy		tized	század	ezred	…
	1000	100	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
				5	,	1			
				5	,	0	1		
		1	0	3	,	2	4		
				0	,	0	0	4	

tehát *a)* $5\frac{1}{10}=5{,}1$; *b)* $5\frac{1}{100}=5{,}01$; *c)* $103\frac{24}{100}=103{,}24$; *d)* $\frac{4}{1000}=0{,}004$.

A tizedes tört alakban írt számokat ugyanúgy olvassuk ki, mintha vegyes tört alakba lennének írva.

8. TIZEDES TÖRTEK

3. példa

George Stephenson, angol mérnök tervezte és építette az első sikeres személyszállító vonatot húzó mozdonyt, amelyet Rocketnek nevezett el. A mozdony nyomtáva 1435 mm volt. Ez lett a mai normál vasúti nyomtáv szabványa.
Írjuk fel ezt a nyomtávot cm-ben, deciméterben és méterben is!

Megoldás

nyomtáv	ezer	száz	tíz	egy		tized	század	ezred		
	1000	100	10	1		$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$		
mm-ben	1	4	3	5						
cm-ben		1	4	3	,	5			143,5	143 egész 5 tized cm
dm-ben			1	4	,	3	5		14,35	14 egész 35 század dm
m-ben				1	,	4	3	5	1,435	1 egész 435 ezred m

Kutatómunka

Gyűjtsetek tizedes törteket egy bevásárlás során. Vigyetek be az osztályba olyan címkéket, amelyeken tizedes törtek vannak.

Feladatok

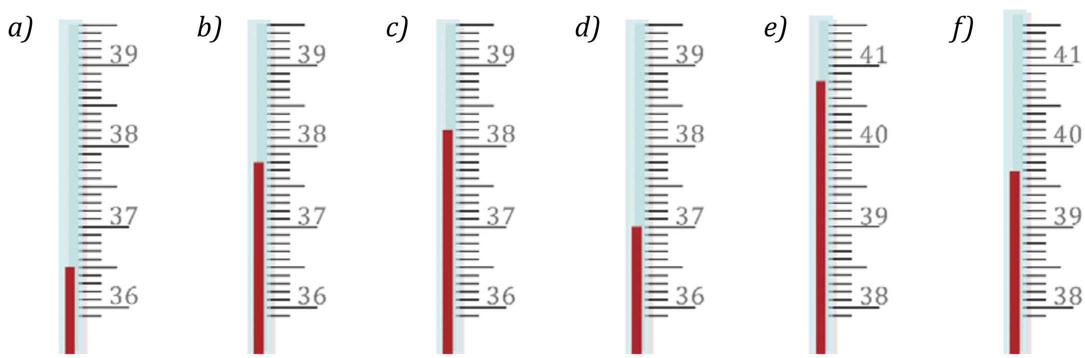
1. Írd le a füzetedbe számjegyekkel a következő számokat!
a) kétszáztizenhárom egész három tized; *b)* nulla egész hat század;
c) 49 egész 76 század; *d)* 103 egész 103 ezred;
e) hatvanhét egész kilenc század; *f)* huszonnyolc egész harminckilenc ezred;
g) nulla egész kétszáz ezred; *h)* nulla egész nyolcezer tízezred.

2. Írd le betűvel a következő tizedes törteket!
a) 1,45; *b)* 24,012; *c)* 73,6; *d)* 803,06; *e)* 70,006; *f)* 65,450; *g)* 47,3500.

3. Írd le a következő hosszmennyiségeket tizedes tört alakban, méterben!

Árpád magassága:	1 méter 3 deciméter 5 centiméter
Árpád szobájának hossza:	4 m 2 dm 6 cm
Árpád szobájának szélessége:	3 m 4 dm 1 cm
Árpád horgászbotjának hossza:	3 m 2 dm 6 cm

4. Olvasd le és írd le a lázmérők által mutatott testhőmérsékleteket!



5. Írd át tizedes tört alakba!

a) $\frac{7}{10}$; *b)* $3\frac{7}{10}$; *c)* $\frac{14}{100}$; *d)* $\frac{314}{100}$; *e)* $\frac{31\,415}{10\,000}$;
f) $-\frac{2}{10}$; *g)* $-\frac{1}{5}$; *h)* $\frac{3}{20}$; *i)* $-\frac{9999}{100}$; *j)* $-\frac{9999}{1000}$!

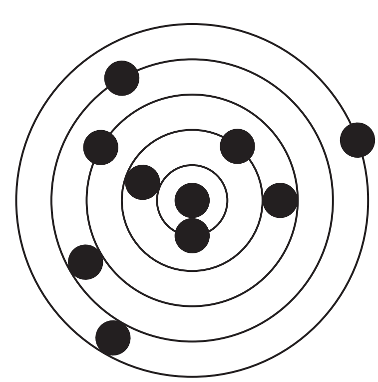
6. Írd át tört alakba

a) 0,1; *b)* 0,01; *c)* −0,11; *d)* −0,101; *e)* 0,0101;
f) 2,25; *g)* −2,2; *h)* −8,1; *i)* 3,14; *j)* 2,023!

7. Írd a törteket helyiérték-táblázatba

a) 10,2; *b)* 100, 2; *c)* 100,02; *d)* 10, 02; *e)* 1, 102;
f) 12,26; *g)* 12,06; *h)* 128,64; *i)* 64,008; *j)* 7,0103!

8. Árpi délutánonként lövészetre jár. Az ábrán az egyik gyakorlat utáni lőlapja látható. A körvonalak a kör közepétől 0,5 cm, 1 cm, 1,5 cm, 2 cm és 2,5 cm-re vannak. A lövedékek átmérője 0,5 cm. Olvasd le, hogy milyen messzire csapódtak be a lövedékek a lőlap közepétől!



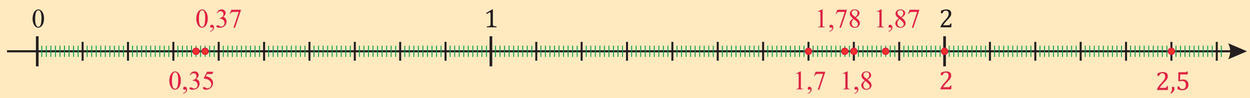
9. TIZEDES TÖRTEK ÁBRÁZOLÁSA ÉS RENDEZÉSE

1. példa

Ábrázoljuk számegyenesen a következő törteket, majd írjuk fel őket növekvő sorrendben!
1,78; 1,87; 0,35; 2; 2,5; 0,37; 1,8; 1,7

Megoldás

Osszuk fel az egészek közötti részeket tíz-tíz egyenlő részre, azaz tizedekre! Ha az egyes tizedeket is felosztjuk 10 egyenlő részre, akkor századokat kapunk.



A számegyenesről leolvasható a növekvő sorrend.

$0{,}35 < 0{,}37 < 1{,}7 < 1{,}78 < 1{,}8 < 1{,}87 < 2 < 2{,}5$

A tizedes törtek nagyság szerinti rendezéséhez nincs szükség számegyenesre.
Először hasonlítsuk össze a számok egész részét, hiszen minden 0-val kezdődő szám kisebb minden 1-gyel kezdődő számnál.
A két legkisebb szám a 0,35 és a 0,37, mivel csak ezek kezdődnek 0-val.
Ha két szám egész része egyenlő, akkor hasonlítsuk össze a következő helyiértéken álló számjegyeket! Ezek most a tizedek.
Ha ezek is egyenlők, akkor lépjünk tovább a századokra:
$0{,}35 < 0{,}37$, mert $5 < 7$.

Hasonlóan folytathatjuk.
Az eggyel kezdődő számok az 1,78; 1,87; 1,8; 1,7.
Az 1,78 és az 1,7 számok tizedes helyiértékén 7 áll, tehát ezek következnek a nagyság szerinti sorban.
Hogyan haladjunk tovább, ha az egyik számban elfogytak a számjegyek?
Egészítsük ki 0-val!

Ha a tizedes tört végére 0-kat írunk, illetve ha a tizedes tört végéről 0-kat hagyunk el, akkor a tizedes tört értéke nem változik.
Ha a tizedes tört végére 0-kat írunk, akkor bővítjük a tizedes törtet.

1,7	=	1,70	=	1,700
$1\frac{7}{10}$	=	$1\frac{70}{100}$	=	$1\frac{700}{1000}$

Ha a tizedes tört végéről 0-kat hagyunk el, akkor egyszerűsítjük a tizedes törtet.
Az $1{,}70 < 1{,}78$, mert $0 < 8$.
Hasonlóan folytatva: $1{,}80 < 1{,}87 < 2{,}0 < 2{,}5$.

Más lehetőség:
Azt is megtehettük volna, hogy az összes számot 100 nevezőjű tört alakban írjuk fel, hiszen tudjuk, hogy azonos nevezőjű pozitív törtek közül az a nagyobb, amelyiknek a számlálója nagyobb.

$$\frac{35}{100} < \frac{37}{100} < \frac{170}{100} < \frac{178}{100} < \frac{180}{100} < \frac{187}{100} < \frac{200}{100} < \frac{250}{100}$$

Ha ki akarjuk hangsúlyozni, hogy egy számnak nem a tizedes tört alakját, hanem a két egész szám hányadosaként felírt alakját akarjuk használni, akkor ez utóbbit szoktuk a szám közönséges tört alakjának is hívni.

Csapatmunka

Minden tanuló felír egy lapra egy tetszőleges – legfeljebb ezred helyiértéket tartalmazó –, 0 és 2 közé eső tizedes törtet. A tanár kihívja az első tanulót, aki a lapját csöndben maga előtt tartva, az osztállyal szembe fordulva kiáll a tábla elé. A következő tanuló, mint egy képzeletbeli „számegyenesen”, beáll a társa mellé, attól függően, hogy ő milyen számot írt fel a saját lapjára. Ezt követi a harmadik, negyedik stb. tanuló, egészen addig, amíg az osztály minden tanulója megtalálja helyét.

TIZEDES TÖRTEK KEREKÍTÉSE

A tizedes törteket hasonlóan kerekítjük, mint az egész számokat. A tizedes tört kerekítésénél is meg kell határozni, hogy melyik helyi értékre szeretnénk kerekíteni. Így lehet például egyesre, tizedre, századra, stb. kerekíteni.

2. példa

Kerekítsd a 19,3389 számot százasra, tízesre, egyesre, tizedre, századra, ezredre, tízezredre!

Megoldás

	Kerekített érték						
A szám	százasra	tízesre	egyesre	tizedre	századra	ezredre	tízezredre
19,3389	0	20	19	19,3	19,34	19,339	19,3389

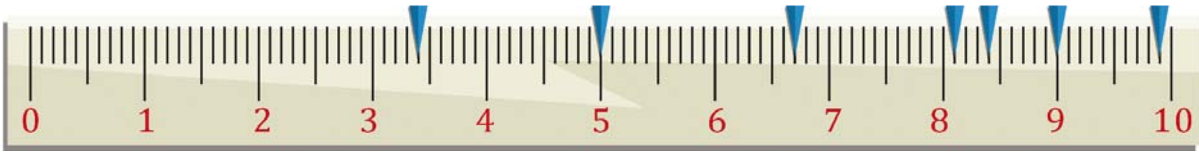
PONTOSSÁG

A számok kerekítésével utalhatunk azok pontosságára is. Kerekítsük a 2,3286-et
ezredekre: 2,329 – ekkor három tizedesjegy pontossággal adtuk meg a számot;
századokra: 2,33 – ekkor két tizedesjegy pontossággal adtuk meg a számot;
tizedekre: 2,3 – ekkor egy tizedesjegy pontossággal adtuk meg a számot!
Ha egy szám nagyon sok számjegyből áll, akkor általában úgy kerekítjük, hogy lehetőleg csak az első néhány darab legyen nullától különböző. Például, ha három nullától különböző számjegyre kerekítünk, akkor azt mondjuk, hogy **három értékes jegyre** kerekítünk.
1,256789 → 1,26
0,023456 → 0,0235
2 345 678,5 → 2 350 000
0,01999999 → 0,0200
Egy mérés eredményénél a tizedesjegyek száma is fontos lehet, mert a mérés pontosságát ezzel írjuk le. A kellő tizedesjegyek számát a szükséges nullák kiírásával adjuk meg. Például a 120 cm hosszúságúnak mért asztal 1,20 méter és nem 1,2 méter.

9. TIZEDES TÖRTEK ÁBRÁZOLÁSA ÉS RENDEZÉSE

Feladatok

1. Olvasd le a számegyenesről a megjelölt számokat!



2. Készíts a füzetedbe számegyenest és jelöld be rajta a következő számok helyét!
4,2; 4,6; 5,8; 5,5; 5,1; 5; 4,3; 6
A számegyenes melyik részét érdemes felrajzolnod?

3. Melyik nagyobb?
a) 2,1 vagy 2,01 *b)* 3,08 vagy 3,081 *c)* 0,001 vagy 0,019 *d)* 10,01 vagy 10,10
e) 0,003 vagy 0,002 *f)* 0,023 vagy 0,003 *g)* 0,003 vagy 1,002 *h)* 12,003 vagy 11,003

4. Kerekítsd tizedekre a következő tizedes törteket!
a) 4,023; *b)* 5,006; *c)* 4,101; *d)* 3,7856; *e)* 10,997; *f)* 15,6.

5. Kerekítsd századokra a következő tizedes törteket!
a) 5,345; *b)* 123,56; *c)* 56,00; *d)* 56,346; *e)* 9,919; *f)* 7,95.

6. Kerekítsd három értékes jegyre a következő számokat!
a) 125,345; *b)* 23,5678; *c)* 6,34567; *d)* 0,73491; *e)* 0,012349; *f)* 0,0076992.

7. Írd fel a számokat növekvő sorrendben!
a) 1,79; 1,27; 2,09; 1,28; 1,18; 1,08
b) 10,2; 9,99; 10; 11,203; 11,202; 10,999
c) −1,79; −1,27; −2,09; −1,28; −1,18; −1,08
d) 3,34; −3,43; 4,33; −4,3; 3,35; −4,04; 3,98; −3,04
e) 2,4; 2,41; −2,4; −2,41; 2,39; −2,39

8. Rendezd nagyság szerint csökkenő sorrendbe a képen látható törteket!

A TENGERVÍZ SÓÖSSZETÉTELE

Só	g/l	%
nátrium-klorid	35	3,4
magnézium-klorid	3,8	0,37
magnézium-szulfát	1,6	0,16
kalcium-szulfát	1,2	0,12
kálium-szulfát	0,9	0,09
kalcium-karbonát	0,1	0,01

Nézz utána, hogy miért nem szabad tengervizet inni!

1. példa

A Formula–1-es spanyol nagydíj edzésén a pálya három szakaszán mérték a versenyzők idejét. Minden szakaszon Lewis Hamilton volt a leggyorsabb, Sebastian Vettel lemaradt. A három részidejük a táblázatban szerepel. Mennyi idő alatt tették meg a teljes kört? Mennyivel volt gyorsabb Hamilton, mint Vettel?

	Lewis Hamilton	Sebastian Vettel
1. szakasz	23,549 s	24,483 s
2. szakasz	32,715 s	34,470 s
3. szakasz	30,435 s	31,326 s

Megoldás

Össze kell adni a három-három részidő eredményét. Teljesen hasonlóan csináljuk, mint az egész számok esetében. Ügyeljünk arra, hogy a tizedesvesszőket egymás alá írjuk, azaz a megfelelő helyiértékek egymás alá kerüljenek! Összeadjuk a számokat, mintha egész számok lennének, és kitesszük a tizedesvesszőt a megfelelő helyre. Kivonásnál is az egészeknél megszokott módon járunk el.
Ügyeljünk a tizedesvessző helyére!
A leggyorsabb köridő Hamiltoné volt: 86,699 másodperc, azaz 1 perc 26,699 másodperc.
Vettel körideje 90,279 másodperc volt, ez 3,58 másodperccel több volt, mint Hamiltoné.

Hamilton	*Vettel*
23,549	24,483
32,715	34,470
+30,435	+31,326
86,699	90,279

$$\begin{array}{r} 90{,}279 \\ -86{,}699 \\ \hline 3{,}580 \end{array}$$

Tizedes törteket úgy adunk össze, hogy a számjegyeket helyiérték szerint egymás alá írjuk, a legkisebb helyiértéktől indulva követjük az összeadás lépéseit. Amikor az összeadás során elérünk a tizedesvesszőhöz, kitesszük.

Tizedes törteket úgy vonunk ki egymásból, hogy a számjegyeket helyiérték szerint egymás alá írjuk, a legkisebb helyiértéktől indulva követjük a kivonás lépéseit. Amikor a kivonás során elérünk a tizedesvesszőhöz, kitesszük.

Feladatok

1. Végezd el az összeadásokat a füzetedben!

a) 12,786 + 3,504

b) 103,19 + 81,81

c) 78,87 + 12,105

d) 393,098 + 987,99

e) 1001,99 + 48,28

f) 8896,5677 + 124245,3506

g) 653,726 + 7482,8

h) 3243,7664 + 2387,9837

2. Végezd el a kivonásokat a füzetedben!

a) 12,786 – 3,504	*b)* 103,19 – 81,81	*c)* 78,87 – 12,105	*d)* 393,098 – 987,99
e) 1001,99 – 48,28	*f)* 8896,5677 – 124245,3506	*g)* 653,726 – 7482,8	*h)* 3243,7664 – 2387,9837

3. Végezd el a következő műveleteket!

a) 3,6 + 12,7; *b)* 13,5 – 5,05; *c)* 3,25 + 4,17; *d)* 50,07 – 10,40;
e) 5,56 – 2,5; *f)* 6,34 – 2,42; *g)* 6,43 + 23,5; *h)* 5,34 – 2,34.

4. Végezd el a következő műveleteket!

a) 12,23 + 5,56; *b)* 3,457 + 5,987; *c)* 54,9 – 39,34; *d)* 0,432 + 0,078;
e) 0,345 – 0,562; *f)* 56,346 + 2,213; *g)* 4,301 – 2,732; *h)* 5,432 – 6,3.

5. Melyik a nagyobb?

a) 2,23 + 3 vagy 2,25 + 3; *b)* 2,23 – 1 vagy 2,25 – 1;
c) 2,23 – 3 vagy 2,25 – 3; *d)* 4,55 – 1 vagy 2,55 + 1;
e) 2,23 – 3 vagy 3 – 2,25; *f)* 6,28 + 1,56 vagy 3,26 + 4,59.

6. Árpád a piacon almát vásárolt. Az eladó almákat rakott a mérlegre. A mérleg 0,893 kilogrammot mutatott. Ekkor az eladó rátett még egy almát a mérlegre, és a mérleg nyelve 1,037 kilogrammnál állt meg. Árpád megörült, mert ki tudta számolni az utolsó alma tömegét. Hogyan?

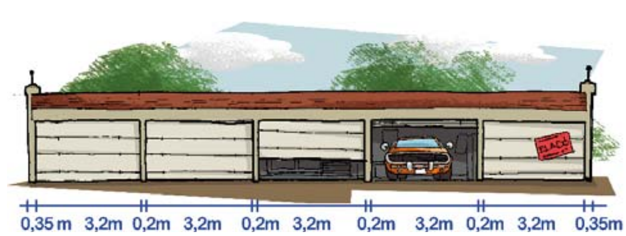
7. Tamásék a lakásfelújítás miatt megmérték a falak hosszát és magasságát.

a) Az egyik szoba hosszúságát a fal közepén álló szekrény miatt így mérték meg: A szekrény előtti falhossz 2,34 méter. A szekrény hossza 0,80 méter. A szekrény utáni falhossz 1,45 méter. Milyen hosszúságú a fal?

b) A 4,15 méter hosszú falhoz két 1,47 méter széles szekrényt akarnak beállítani. Elférhet-e a falhoz még egy 1,2 méter széles asztal?

c) A festők 3,56 méteres falmagassághoz állították be 1,83 méter magas létrájukat. Elérhetik-e a mennyezetet?

8. Az udvari épületben 5 garázs helyét alakították ki. Egy garázs belül 3,2 méter széles és az elválasztó falak 0,2 m vastagok. A két szélső fal 0,35 m vastag. Hány méter hosszú az épület külső mérete?



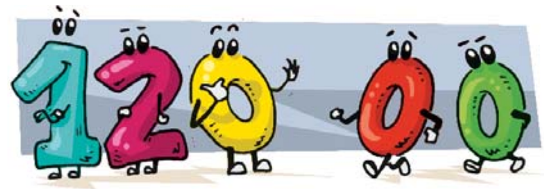
9. Füstös Géza, a felesége és két gyerekük vonattal akartak eljutni a szomszéd faluba. Ha a vonaton vesz jegyet a család, akkor a felnőttek 12,4, a gyerekek 6,2 eurót fizetnek. Ha elővételben megveszik a neten a jegyeket, akkor a felnőttek 11,4, a gyerekek 6 eurót fizetnek fejenként.

a) Mennyit fizet a Füstös család, ha a vonaton vesznek jegyet?

b) Mennyit fizet a Füstös család, ha a neten vesznek jegyet?

c) Mennyivel fizetnek kevesebbet, ha a neten vesznek jegyet?

TIZEDES TÖRTEK SZORZÁSA TERMÉSZETES SZÁMMAL



Az egész számokat könnyű volt tízzel, százzal, ezerrel szorozni.
$12 \cdot 10 = 120$; $12 \cdot 100 = 1200$; $12 \cdot 1000 = 12\,000$; ...
Annyi 0-t írtunk a szám végére, ahány 0 a szorzóban szerepelt.
Ha egy egész számot írunk le, akkor nem szoktuk kiírni a tizedesvesszőt, mert felesleges. Nincs olyan törtrész, amelyet el kell választani a számtól. Például: 12,0.
Ha azonban a 12 helyett mégis 12,0-et vagy 12,000-et gondolunk, akkor jobban látszik, hogy mi történik a tizedesvesszővel, ha 10-zel szorzunk.
Minden számjegy 10-szeres értéket fog jelenteni, azaz eggyel nagyobb helyiértékre lép, vagy ami ugyanezt jelenti, a tizedesvessző eggyel jobbra kerül. Ha százzal szorzunk, akkor a tizedesvessző két hellyel, ha ezerrel, akkor három hellyel kerül jobbra stb.
A 10-zel, 100-zal, 1000-rel … szorzott tizedes törtben a tizedesvesszőt egy, kettő, három … helyiértékkel jobbra visszük.

$2,41 \cdot 10 = 24,1$

tízes	egyes	,	tized	század
	2	,	4	1
2	4	,	1	

szorzandó \ szorzó	10	100	1000
12,000	120,00	1200,0	12 000
2,4167	24,167	241,67	2416,7

Az osztás a szorzás fordított művelete. A 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. osztott tizedes törtben a tizedesvesszőt egy, kettő, három stb. helyiértékkel balra visszük.

$2,41 : 100 = 0,0241$

egyes	,	tized	század	ezred	tizezred
2	,	4	1		
0	,	0	2	4	1

osztandó \ osztó	10	100	1000
12 000	1200	120	12
2,4167	0,241 67	0,024 167	0,002 416 7

Példa

Az iskolaudvaron betonozni fognak, ezért az egyik terem ablaka elé ledobáltak 26 egyforma deszkát. Gazsi, Berta és Panni azon törte a fejét, hogy ha egymásra pakolják a deszkákat, akkor felér-e a deszkakupac a 90 cm magasan lévő ablakig. Az egyik deszkán lévő papír szerint a deszkalapok vastagsága 2,54 centiméter.
$2,54 \cdot 26 = ?$

I. Megoldás

Gazsi úgy számolta ki a szorzatot, hogy a 2,54-ot fejben megszorozta 100-zal – azért, hogy egész szám legyen –, így 254-et kapott.
Az egész számot már meg tudta szorozni egész számmal:

Aztán fejben elosztotta 100-zal a szorzatot, a végeredmény 66,04 cm.

II. Megoldás

Berta a 2,54 kiejtéséből indult ki. A 2 egész 54 század, úgy hangzik, mint egy vegyesszám: $2\frac{54}{100}$.

Közönséges törtté alakítva: $\frac{254}{100}$.

A közönséges törtet meg tudjuk szorozni egy egész számmal: $\frac{254}{100} \cdot 26 = \frac{6604}{100}$.

A végeredmény visszaalakítható vegyes törtté, majd tizedes törtté:

$\frac{6604}{100} = 66\frac{4}{100} = 66{,}04$ cm.

III. Megoldás

Panni abból indult ki, hogy a tizedes törteket ugyanúgy kellett összeadni és kivonni, mint a természetes számokat, úgyhogy a tizedesvesszővel nem törődve összeszorozta a két számot. Ha egymás alá 26-szor leírta volna a 2,54-ot és összeadta volna, akkor két tizedesjegyet kellett volna kijelölnie az összegben. Ebből adódóan ennyit jelölt ki a szorzatban is.

2 helyiérték az egyik tényezőben	2,54 · 26
	508
	+ 1524
2 helyiérték a szorzatban	66,04

A gyerekek szerint Panni módszere volt a legegyszerűbb, úgyhogy azt ajánlották a többieknek.

A deszkakupac magassága 66,04 cm.

Tizedes törtet természetes számmal úgy szorzunk, mintha egész számok lennének, majd a szorzat végén annyi tizedesjegyet jelölünk ki, amennyi a tizedes törtben szerepelt.
(A 0 is számjegy!)

Feladatok

1. Végezd el a következő műveleteket!

a) 3,6 · 10; *b)* 0,36 · 10; *c)* 0,036 · 10; *d)* 0,0036 · 10;
e) 675,67 · 100; *f)* 67,567 · 100; *g)* 6,7567 · 100; *h)* 0,67567 · 100;
i) 1,2345 · 1000; *j)* 45,672 · 1000; *k)* 15,25 · 1000; *l)* 0,0045 · 1000.

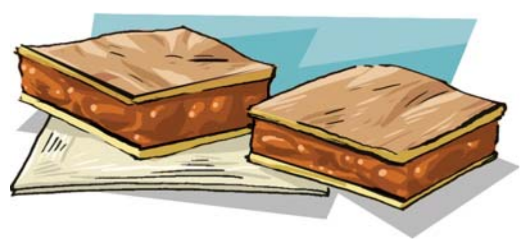
2. Végezd el a következő műveleteket!

a) 567 : 10; *b)* 34,57 : 10; *c)* 5,9 : 10; *d)* 0,123 : 10;
e) 435,2 : 100; *f)* 26,42 : 100; *g)* 4,02 : 100; *h)* 0,023 : 100;
i) 1234,5 : 1000; *j)* 45,19 : 1000; *k)* 1,025 : 1000; *l)* 0,045 : 1000.

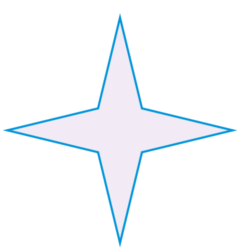
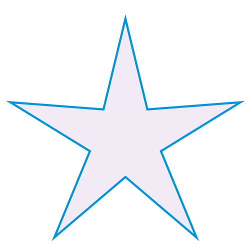
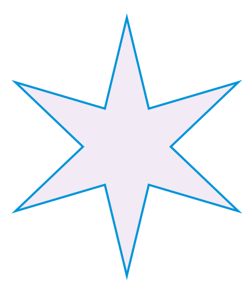
3.
a) Váltsd át centiméterbe a következő mennyiségeket!
0,123 m; 2,37 dm; 14,5 m; 123 mm; 2,34 dm; 9854 mm.
b) Váltsd át deciméterbe a következő mennyiségeket!
3,56 m; 12,372 m; 0,51 cm; 763 mm; 102,34 mm; 985 cm.
c) Váltsd át centiméterbe a következő mennyiségeket!
0,34 m; 9,07 m; 14,59 dm; 1123 mm; 23,72 dm; 5674 mm.

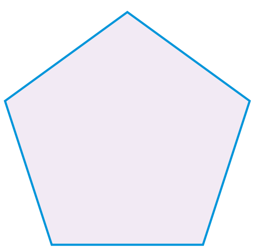
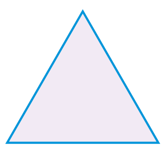
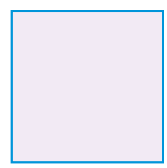
4. Végezd el a következő szorzásokat!
a) $8{,}7 \cdot 5$; *b)* $0{,}37 \cdot 9$; *c)* $0{,}057 \cdot 6$; *d)* $0{,}0047 \cdot 51$;
e) $12{,}3 \cdot 72$; *f)* $0{,}27 \cdot 21$; *g)* $6{,}75 \cdot 13$; *h)* $0{,}67 \cdot 35$.

5. Recept szerint 1 adag almás süti tésztájához a következő összetevők szükségesek: 0,1 deciliter tej, $\frac{1}{4}$ csomag sütőpor, 4 dkg liszt, 1 dkg porcukor, csipet só.



a) Mennyi hozzávalóra van szükség 8 adag tészta elkészítéséhez?
b) Mennyi hozzávalóra van szükség 12 adag tészta elkészítéséhez?
c) Mennyi hozzávalóra van szükség 7 adag tészta elkészítéséhez?
d) Minden mennyiséget tudtál értelmezni?

6. Milyen hosszúak a következő vonalak, ha egy kék szakasz hossza 0,34 dm?
a)

b)

c)


7. Mekkora a vonalhossz, ha a kék szakasz hossza 0,167 m?
a)

b)

c)


8. Egy papírlap vastagsága 0,025 cm. Milyen vastag egy 1250 oldalas Biblia?

9. A teniszt egy $26 \cdot 9$ yard méretű (páros esetén $26 \cdot 12$ yard) pályán játsszák. Mekkora a pálya méterben, ha 1 yard = 91,44 cm?

12. TIZEDES TÖRTEK OSZTÁSA TERMÉSZETES SZÁMMAL

1. példa

Az ékszerész 6 egyforma gyűrűt szeretne csinálni, a nála lévő 19,44 gramm aranyból. Hány grammos lesz egy gyűrű?

Megoldás

Az eredmény kicsit több lesz, mint 3, mert 18 : 6 = 3.
Osszuk el a 19,44-ot 6-tal!

19-ben a 6 meg van 3-szor, marad az 1. Elértünk a tizedesvesszőhöz. Ha tovább folytatjuk az osztást, akkor már nem egészeket kapunk, ezért kitesszük a tizedesvesszőt a hányadosban.

14-ben a 6 meg van 2-szer, marad a 2.

24-ben a 6 meg van 4-szer, nem marad semmi.

19,44 : 6 = 3,24
14
24
0

Egy gyűrű 3,24 g tömegű lesz.

2. példa

Szofi az edzésen 16 hosszt úszott egy 25 méteres medencében 6 perc 33 másodperc alatt. Egy hossz leúszásához körülbelül mennyi időre volt szüksége? Kerekítsük a kapott eredményt!

Megoldás

393 : 16 = 24
73
9

6 perc 33 másodperc = 393 másodperc. Osszuk el a 393-at 16-tal!

A 16-tal való osztás után marad 9, de most már ismerjük a tizedes törteket. Képzeljük oda a tizedesvesszőt és a nem felírt nullákat, majd folytassuk az osztást! Szofi egy 25 méteres hosszt körülbelül 24,5625 másodperc alatt úszott le, ami kerekítve 25 másodperc.

393, : 16 = 24,5625
73
90
100
40
80
0

Ellenőrzés: 24,5625 · 16 = 393

Panni szerint most is érdemes az egész számok osztásánál tanult módszert követni. Csak a tizedesvessző helyére kell figyelni!

A tizedes törtet úgy osztjuk el, mintha egész számokat osztanánk, de amikor az osztás végrehajtása során elérünk a tizedesvesszőhöz, akkor kitesszük a hányadosban.

3. példa

A versenyen 54 érmet osztottak ki, amelyekért a sportegyesület összesen 105,3 eurót fizetett. Mennyibe került egy érem?

```
105,3 : 54 = 1,95
 513
  270
    0
```

Megoldás

Egy érem 1,95 euróba került.

Ellenőrzés:

```
 1,95 · 54
 975
   780
105,30
```

Feladatok

1. Végezd el a következő osztásokat!

a) 3,6 : 3; *b)* 0,72 : 9; *c)* 0,042 : 7; *d)* 0,0099 : 9;
e) 184,96 : 8; *f)* 68,046 : 6; *g)* 5,6175 : 5; *h)* 0,67567 : 100.

2. Végezd el a következő osztásokat!

a) 103,68 : 32; *b)* 0,85 : 17; *c)* 0,451 : 11; *d)* 9,45 : 45;
e) 141,22 : 23; *f)* 76,8 : 32; *g)* 5,6175 : 5; *h)* 0,67567 : 100.

3. Végezd el a következő osztásokat úgy, hogy az osztót 10-zé, 100-zá stb. bővíted!
(Például: A 3 : 2 esetében az osztót és az osztandót megszorozzuk 5-tel: 15 : 10-et kapunk. A tizedesvesszőt eggyel balra mozgatva megkapjuk az 1,5-et.)

a) 5 : 2; *b)* 12 : 5; *c)* 0,45 : 5; *d)* 0,7 : 2;
e) 4 : 25; *f)* 1 : 4; *g)* 0,37 : 50; *h)* 17 : 20.

4. Végezd el a műveleteket!

a) (2,45 + 8,35) : 3; *b)* (12,6702 + 67,266) : 4;
c) (167,62 + 987,123) : 5; *d)* (12,67 – 2,35) : 3;
e) (34,234 – 10,08) : 4; *f)* (989,078 – 98,763) : 5;

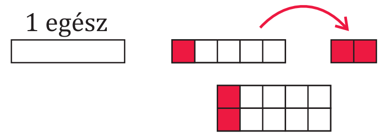
5. Csongi, Matyi és Zozó is segített a szüretnél. Az egyik ládában 45,6 kg szőlő volt, de azt nem bírták odébb vinni, ezért három egyforma részre osztották. Hány kg szőlő jutott egy-egy gyerekre?

6. A sportversenyen a 4-szer 60 méteres futáson a gyerekek eredményei 12,3; 14,2; 10,7 és 10 másodperc volt.

a) Hány másodperc alatt futották le összesen a 4-szer 60 métert?
b) Ha minden gyerek ugyanannyi idő alatt futotta volna le a távot, akkor mennyi időbe telt volna egy 60 méteres táv teljesítése?

13. KÖZÖNSÉGES TÖRTEK TIZEDES TÖRT ALAKJA

A $\frac{2}{5}$ tört egyszerre jelenti
- az ötödrész kétszeresét;
- a két egész ötödrészét;
- a 2 osztva 5-tel műveletet.



$\frac{2}{5} = 2 : 5 = 0{,}4$

1. példa

Alakítsuk át tizedes tört alakba!

a) $\frac{3}{10}$; *b)* $3\frac{8}{100}$; *c)* $-2\frac{18}{1000}$.

Megoldás

A számok már most 10, 100, illetve 1000 nevezőjű törtek. Csak a tizedesvesszőre és a 0-k helyére kell ügyelnünk.

a) $\frac{3}{10} = 0{,}3$; *b)* $3\frac{8}{100} = 3{,}08$; *c)* $-2\frac{18}{1000} = -2{,}018$.

2. példa

Alakítsuk át a közönséges törteket tizedes törtekké!

a) $\frac{2}{5}$; *b)* $\frac{17}{8}$; *c)* $\frac{21}{105}$.

Megoldás

a) 2 : 5 = 0,4 $\quad \frac{2}{5} = 0{,}4$
20
0

b) 17 : 8 = 2,125 $\quad \frac{17}{8} = 2{,}125$
10
20
40
0

c) 21 : 105 = 0,2 $\quad \frac{21}{105} = 0{,}2$
210
0

$0{,}4 = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{5}{\cancel{10}}} = \frac{2}{5}$ $\qquad 2{,}125 = \frac{\overset{17}{\cancel{2125}}}{\underset{8}{\cancel{1000}}} = \frac{17}{8}$ $\qquad 0{,}2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} = \frac{21}{105}$

Egy törtnek mindig azt az alakját használjuk a feladat megoldása során, amelyiket érdemes.
A mostani példák esetében bővítéssel és/vagy egyszerűsítéssel is 10, 100 vagy 1000 nevezőjű törtet kaphatunk.

a) $\frac{2}{5} = \frac{2 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ $\qquad$ *b)* $\frac{17}{8} \cdot \frac{125}{125} = \frac{2125}{1000} = 2{,}125$

c) $\frac{21}{105} = \frac{\overset{1}{\cancel{21}}}{\underset{5}{\cancel{105}}} = \frac{1}{5} = \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2}{10} = 0{,}2$

Ha az osztás végén 0 maradékot kapunk, akkor az eredmény **véges tizedes tört.**

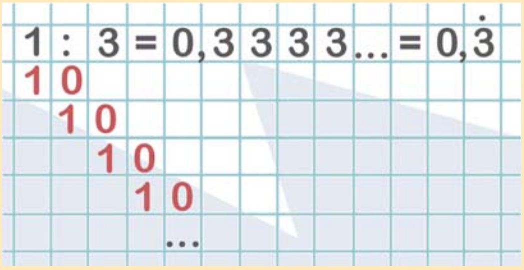
3. példa

Alakítsuk át a közönséges törteket tizedes törtekké!

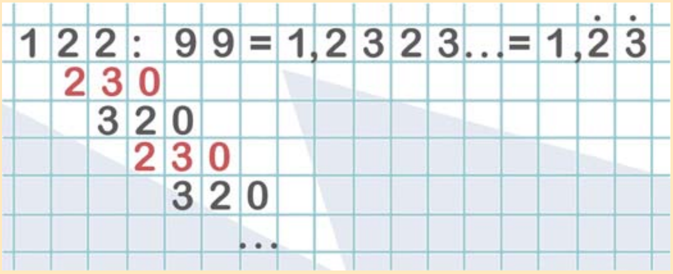
a) $\frac{1}{3}$; *b)* $\frac{122}{99}$; *c)* $\frac{3}{21}$.

Megoldás

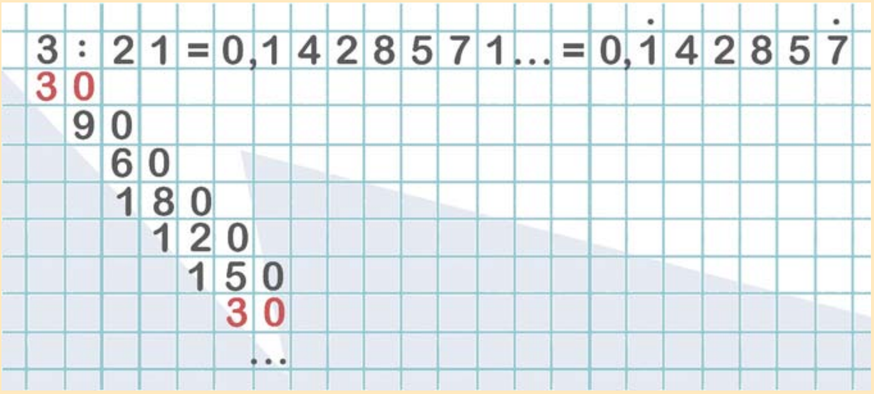
a) Mindig ugyanaz a maradék ismétlődik, azaz az osztás – és vele együtt a tizedes tört – soha nem ér véget. Egy végtelen sok jegyet tartalmazó számot nem lehet leírni, ezért az ismétlődő számot úgy jelöljük, hogy egy pontot teszünk fölé: $0{,}\dot{3}$. (Az ismétlődő számot régebben felülvonással is jelölték: $0{,}\overline{3}$.)



b) A hányadosban felváltva ismétlődik a 2-es és a 3-as maradék, vagyis a 23. Az ismétlődő szám neve **szakasz**. Az *a)* feladatban a szakasz egyetlen számjegyből áll, a 3-ból. A *b)* feladatban a szám tizedes tört alakja $1{,}\dot{2}\dot{3}$.



c) Az első ismétlődő maradék a 3. Ettől a számtól kezdve ismétlődnek a hányados jegyei. Ilyenkor nem szoktunk minden számjegy fölé pontot tenni, csak a szakasz első és utolsó számjegye fölé.



Ha az osztás során soha nem kapunk 0 maradékot, akkor valamelyik maradék ismétlődni fog, és ezért **végtelen szakaszos tizedes tört**et kapunk.

13. KÖZÖNSÉGES TÖRTEK TIZEDES TÖRT ALAKJA

4. példa

Írjuk fel a 0,125 ezredet közönséges tört alakban!

Megoldás

$0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$.

Véges tizedes törtet mindig át lehet alakítani közönséges törtté.

Feladatok

1. Írd fel a törteket tizedes tört alakban!

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{1}{4}$; *c)* $\frac{1}{8}$; *d)* $\frac{1}{16}$; *e)* $\frac{1}{32}$; *f)* $\frac{3}{15}$; *g)* $\frac{33}{55}$; *h)* $3\frac{3}{40}$.

2. Írd fel a törteket tizedes tört alakban!

a) $\frac{1}{9}$; *b)* $\frac{2}{9}$; *c)* $\frac{8}{9}$; *d)* $\frac{20}{9}$; *e)* $\frac{2}{3}$; *f)* $\frac{2}{7}$; *g)* $\frac{3}{7}$; *h)* $\frac{4}{7}$.

3. Alakítsd át a tizedes törteket közönséges törtté! Ahol lehet, egyszerűsíts!

a) 0,2; *b)* 0,5; *c)* 0,8; *d)* 0,25; *e)* 0,35;
f) 0,45; *g)* 0,75; *h)* 1,2; *i)* 1,25; *j)* 4,5.

4. *a)* Mi lesz az $\frac{1}{3}$ tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 3. számjegy?

b) Mi lesz az $\frac{1}{3}$ tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 12. számjegy?

c) Mi lesz az $\frac{1}{3}$ tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 1235. számjegy?

d) Mi lesz az $\frac{1}{6}$ tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 4. számjegy?

e) Mi lesz $\frac{1}{49}$ tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 12. számjegy?

f) Mi lesz $\frac{1}{81}$ tizedes tört alakjában a tizedesvessző utáni 10. számjegy?

5. Folytasd a 0,101101110 szám tizedesjegyeit úgy, hogy a kapott szám

a) végtelen szakaszos tizedes tört legyen; *b)* végtelen legyen, de ne legyen benne szakasz!

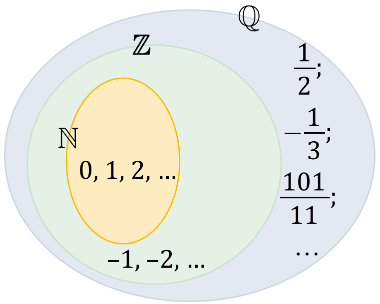
KUTATÓMUNKA

Az $\frac{1}{7}$ szám tizedes tört alakja $\frac{1}{7} = 0,\dot{1}4285\dot{7}$. Szorozd meg a számot 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel és 6-tal, azaz írd fel a $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ számokat is. Nézd meg a szakaszok jegyeit! Mit tapasztalsz? Jobban látszik az érdekesség, ha a számokat szépen elrendezve írod egymás alá. Nézz utána az interneten, hogy mely számokat hívjuk főnix számoknak!

A **természetes számok** a {0; 1; 2; 3; ...} számhalmaz elemei, azaz a nemnegatív egész számok. A természetes számok jele: N vagy $\mathbb{N}$, a latin *naturalis* (jelentése: természetes) szó első betűje alapján.

Az **egész számok** a {...; −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; ...} számhalmaz elemei, azaz a természetes számok és az ellentettjeik. Az egész számok jele: **Z** vagy $\mathbb{Z}$.
Minden természetes szám egész szám, azaz $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

A **racionális számok** a két egész szám hányadosaként felírható számok.



Ilyenek például a $\frac{2}{3}$; $\frac{-3}{4}$; $\frac{5}{1}$; $\frac{1}{5}$; $\frac{2}{-123}$; ... A racionális számok jele: **Q** vagy $\mathbb{Q}$, a latin *quotiens* (jelentése: hány, hányados) szó első betűje alapján. Minden egész szám racionális szám, azaz $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Egy közönséges tört tizedes tört alakja lehet
- véges, ha az osztás során 0 maradékot kaptunk;
- végtelen szakaszos, ha az osztás során soha nem kapunk 0 maradékot.

A három nyolcad egy tört, amelyet így írunk le: $\frac{3}{8}$.

$\frac{3}{8}$ – számláló, törtvonal, nevező

Az egész számok egyben törtszámok is, nevezőjük 1.

Bővítés:
Példa: $\frac{1}{5} = \frac{3 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{3}{15}$

Egyszerűsítés:
Példa: $\frac{4}{28} = \frac{4 \cdot 1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{7}$

Különböző nevezőjű törtek összeadása, kivonása: $\frac{3}{12} + \frac{2}{4} - \frac{1}{3} = \frac{3}{12} + \frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{3 + 6 - 4}{12} = \frac{5}{12}$

Tört szorzása egész számmal: $8 \cdot \frac{1}{12} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} = \frac{2}{3}$ vagy $4 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{12:4} = \frac{1}{3}$

Tört osztása egész számmal: $\frac{21}{17} : 3 = \frac{21:3}{17} = \frac{7}{17}$ vagy $\frac{17}{21} : 3 = \frac{17}{21 \cdot 3} = \frac{17}{61}$

Tizedes törtek összeadása és kivonása:

$$\begin{array}{r} 8{,}291 \\ +34{,}05 \\ \hline 42{,}341 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 34{,}05 \\ -\ 8{,}291 \\ \hline 25{,}759 \end{array}$$

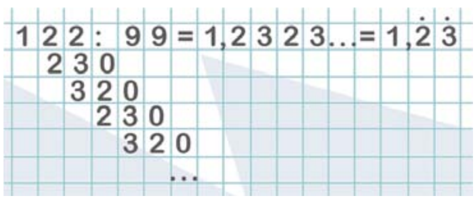
Tizedes törtek szorzása és osztása:
(A 0 is számjegy!)

$$\begin{array}{r} 2{,}19 \cdot 91 \\ \hline 1971 \\ +\ \ 219 \\ \hline 199{,}29 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2{,}19 : 4 = 0{,}5475 \\ \ \ 19 \\ \ \ \ \ 30 \\ \ \ \ \ \ \ 20 \end{array}$$

Véges és végtelen szakaszos tizedes törtek alakja: $\frac{21}{105} = 0{,}2$

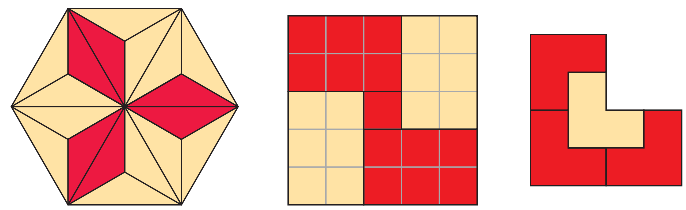
$$\begin{array}{l} 21 : 105 = 0{,}2 \\ 210 \\ \ \ \ 0 \end{array}$$

A $\frac{122}{99}$ tizedes tört alakja: $1{,}\dot{2}\dot{3}$.



Feladatok

1. Az itt látható csempék
a) hányad része piros;
b) hányad része sárga?



2. Bővítsd a törteket 2-vel, 10-zel, 7-tel!

a) $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{3}{10}$; *c)* $\frac{91}{7}$; *d)* $\frac{1}{140}$; *e)* $\frac{5}{34}$.

3. Egyszerűsítsd a törteket!

a) $\frac{18}{10}$; *b)* $\frac{18}{9}$; *c)* $\frac{32}{6}$; *d)* $\frac{18}{36}$; *e)* $\frac{180}{144}$.
f $\frac{1024}{32}$; *g)* $\frac{972}{45}$; *h)* $\frac{2014}{19}$; *i)* $\frac{2014}{106}$; *j)* $\frac{214}{215}$.

4. Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{42}{10}+\frac{18}{10}$; *b)* $\frac{10}{9}+\frac{17}{9}$; *c)* $\frac{14}{8}+\frac{30}{8}$; *d)* $\frac{18}{7}+\frac{11}{7}$; *e)* $\frac{18}{144}+\frac{17}{144}$.
f) $\frac{42}{10}-\frac{18}{10}$; *g)* $\frac{10}{9}-\frac{17}{9}$; *h)* $\frac{14}{8}-\frac{30}{8}$; *i)* $\frac{18}{7}-\frac{11}{7}$; *j)* $\frac{18}{144}-\frac{17}{144}$.

5. Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{10}{32}+\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{3}{45}-\frac{3}{9}$; *c)* $\frac{3}{19}-\frac{9}{57}$; *d)* $\frac{11}{12}+\frac{12}{13}$; *e)* $\frac{12}{13}-\frac{11}{12}$.
f) $\frac{17}{10}+\frac{31}{100}$; *g)* $\frac{121}{81}-\frac{4}{3}$; *h)* $\frac{114}{18}-\frac{114}{24}$; *i)* $\frac{59}{60}+\frac{23}{24}$; *j)* $\frac{111}{57}-\frac{11}{38}$.

6. Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{11}{32}\cdot 16$; *b)* $\frac{9}{7}\cdot 14$; *c)* $\frac{4}{18}\cdot 9$; *d)* $\frac{3}{17}\cdot 51$; *e)* $\frac{13}{14}\cdot 42$.
f) $\frac{11}{32}\cdot 1024$; *g)* $\frac{19}{45}\cdot 225$; *h)* $\frac{3}{19}\cdot 361$; *i)* $\frac{11}{12}\cdot 168$; *j)* $\frac{19}{121}\cdot 11$.

7. Végezd el a műveleteket!

a) $\frac{32}{11}:16$; *b)* $\frac{14}{9}:7$; *c)* $\frac{17}{2}:9$; *d)* $\frac{8}{11}:4$; *e)* $\frac{24}{7}:21$.
f) $\frac{1024}{11}:32$; *g)* $\frac{45}{19}:5$; *h)* $\frac{1024}{11}:11$; *i)* $\frac{168}{7}:24$; *j)* $\frac{43}{13}:23$.

8. Végezd el a szorzásokat!

a) $0,4\cdot 50$; *b)* $0,25\cdot 440$; *c)* $0,2\cdot 66$; *d)* $0,125\cdot 80$; *e)* $0,125\cdot 800$.
f) $0,23\cdot 5$; *g)* $42,23\cdot 592$; *h)* $15,173\cdot 248$; *i)* $1,63\cdot 128$; *j)* $23,854\cdot 985$.

9. Végezd el az osztásokat!

a) $65,4:10$; *b)* $8,67:100$; *c)* $0,2:1000$; *d)* $0,125:5$; *e)* $0,12:125$.
f) $21:75$; *g)* $102,6:18$; *h)* $100,1:24$; *i)* $168:175$; *j)* $25000,16:592$.

10. Egy híd alatt haladó út mellett az itt látható KRESZ-tábla van kirakva. Mit jelent a tábla? Átmehet-e a híd alatt a kamion, ha a platója 1,6 méter magasan van és 2,35 méter magas kisgépeket szállít?

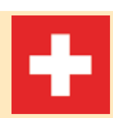
11. Anya telefonjának a memóriája 8 GB (gigabyte). Ebből a telefon működéséhez szükséges program 1,13 GB-ot foglal, a letöltött programok 3,18 GB-ot, a zenék pedig 1,89 GB-ot. Hány GB szabad hely van anya telefonjának a memóriájában?

12. Keress az irodalomkönyvedben egy olyan részt, ahol 5 szövegsor követi egymást! Mérd meg a vonalzóddal, hány milliméter magas ez az 5 sor! Milyen távol van két egymás utáni sor alja? Ismételd meg a mérést és a számítást 10 egymás utáni sorral!

13. Apa a nyaraláshoz forintot vált át a 15. feladatban látható árfolyamon. Egyéb költség nincs. Mennyi
a) angol fontot; *b)* eurót; *c)* svájci frankot; *d)* amerikai dollárt;
kapna 60 000 Ft-ért?

14. Anyuék lakáshitele még 12 000 svájci frank. Mekkora összeg ez forintban? Ha 7 évvel ezelőtt csak 140,23 forint volt 1 svájci frank, akkor hány forintot ért 7 éve 12 000 svájci frank?

15.

			
Angol font (GBP)	Euro (EUR)	Svájci frank (CHF)	Amerikai dollár (USD)
371,83	303,58	248,79	221,17

Egy kisvállalkozó forinttal akar fizetni az interneten, és a bank pénzváltási oldalán a táblázatban látható értékeket találta. Egyéb költség nincs. Hány forintba kerül, ha
a) 100 euró értékben vásárol;
b) 120 angol fontért vásárol;
c) 210 amerikai dollárért vásárol;
d) 49 svájci frankért vásárol?

16. Alakítsd át a törteket tizedes törtté!

a) $\frac{308}{10}$; *b)* $\frac{2}{3}$; *c)* $\frac{6}{3}$; *d)* $\frac{8}{3}$; *e)* $\frac{8}{6}$.

f) $\frac{32}{1024}$; *g)* $\frac{121}{1331}$; *h)* $\frac{124}{8}$; *i)* $\frac{43}{26}$; *j)* $\frac{2145}{75}$.

17. Az egész telkes jobbágynak a következő adókat kellett fizetnie egy 300 munkanapos évben:

– 25 napnyi napszámos jövedelemmel kellett adóznia a földesurának.

– 50 nap robot a földesúr részére igásállattal, vagy 100 napnyi igásállat nélkül.

– 10% terményadó az egyházközségnek és 10% a földesurának.

– Rendkívüli adók, egy évben körülbelül 30 napnyi munka.

a) Ha egy évben 300 munkanap volt, akkor egy egésztelkes jobbágynak az év hányad részében kellett az adó megfizetéséért dolgoznia?

b) János csak féltelkes jobbágy volt és a családjának 6 olyan tagja is volt, aki ledolgozhatta az adókat. (A féltelkes jobbágynak az egésztelkes jobbágy adójának a felét kellett megfizetnie.) Hány napot kellett fejenként dolgozniuk az adó megfizetéséért?

18. Süssünk mézeskalácsot

Egy adag tésztához jól gyúrjuk össze a felsorolt alapanyagokat, majd csomagoljuk fóliába a tésztát és pihentessük egy napig a hűtőszekrényben. Hozzávalók: 50 dkg finomliszt, 20 dkg porcukor, 1 kávéskanál szódabikarbóna, 6 dkg olvasztott vaj, 1 dl langyos tej, 20 dkg méz, 1 csomag vaníliás cukor, valamint fahéj, gyömbér, szerecsendió, szegfűszeg ízlés szerint, illetve díszíteni.

a) Körülbelül mennyi lesz a bekevert tészta tömege?

b) Ha egy kerek mézeskalácshoz 2,5 dkg tészta kell, akkor körülbelül hányat tud formázni Kristóf egy adag tésztából?

c) Kristóf talált a fiókban egy póni alakú formázót is, ami nagyobb volt, és 4,5 dkg tészta kell bele. Hány pónit tud formázni Kristóf egy adag tésztából?

d) Hányszorosra növeljék az alapanyagok mennyiségét, ha körülbelül 30-30 darabot akarnak készíteni a kétféle alakú mézeskalácsból?

e) Ha nagyon nagy a család és minden összetevőt megháromszorozunk, akkor mennyi lesz az egyes összetevők, illetve a bekevert tészta tömege?

19. Juli $1\frac{2}{3}$ órát tölt tanulással minden hétköznap. Gerzson csak napi $1\frac{1}{6}$ órát tölt tanulással, de hét végén még hozzácsap 3 órányi tanulást.

a) Melyik gyerek tölt több időt az otthoni tanulással egy hét alatt, és mennyivel?

b) Mennyit tanulna Gerzson naponta, ha a hétvégi 3 órát egyenletesen elosztaná a hétköznapokra?

III. Mérés és mértékegységek

– Emlékszel, amikor még a Jupiternél jártunk? – fordult Gerzson Bertához. – Akkor voltunk legtávolabb otthonról. Úgy körülbelül ötször messzebb a Naptól, mint a Földön.

– Vagyis öt csillagászati egységre – kotyogott közbe Okoska.

– Mondhattam volna én is, de nem akartam hasonlítani rád.

A másik nem zavartatta magát:

– Tudjátok, egy csillagászati egység az a körülbelüli Nap–Föld-távolság, és a Jupiter ötször van messzebb a Földnél. Hm, várjatok, megnézem a hajó wikikompján. – Önelégült mosoly terült el az arcán. – Jól mondtam! A Jupiter körülbelül 780 000 000 kilométerre van a Naptól, a Föld pedig kb. 150 000 000 kilométerre, az annyi, mint … 5,2-szeres távolság.

– Tudod ugyanezt fénypercekben is? – kérdezte huncut mosollyal Berta, de Okoska nem vette a lapot.

– Hát persze. A fény 300 000 kilométert tesz meg 1 másodperc alatt, úgyhogy, … ha jól számolom, $\frac{780\,000\,000}{300\,000}$ = 2600 másodperc, vagyis 43,33 perc kell a fénynek, amíg elér a Naptól a Jupiterig.

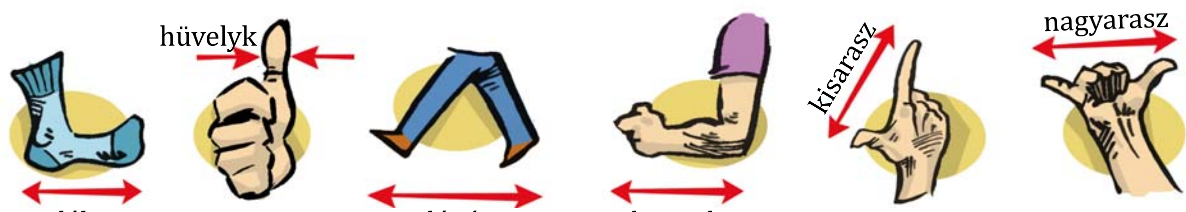
Mire Okoska felnézett a képernyőről, Gerzson és Berta már odébbálltak, és ez elég volt ahhoz, hogy fényévekre érezzék magukat.

1. A HOSSZÚSÁG MÉRÉSE

Csoportmunka

Válasszátok ki az osztályból a legalacsonyabb és a legmagasabb tanulót! Mindketten mérjék meg az osztálytermetek szélességét vagy hosszúságát a lábukkal és a lépésükkel is! Hány láb, illetve hány lépés lett a két gyerek által megmért távolság? (A többiek is kipróbálhatják.)

Láttuk, hogy a méréseink eredményét, a **mennyiség**et **mérőszám**mal és **mértékegység**gel tudtuk megadni. A hosszúság mérésénél is ezt fogjuk tenni. Valószínűleg a hosszúság lehetett az első **mennyiség**, amit mérhettek az emberek. A méréshez választaniuk kellett **egység**et, amihez viszonyítani tudtak. Mi lehetett a legkézenfekvőbb? Mit választhattak őseink egységnek?



A testrészeink mindig a rendelkezésünkre állnak, így nyilvánvaló, hogy ezeket gyorsan lehetett mérésekre alkalmazni.

Természetesen a környezetünkben megtalálható eszközeinket is felhasználhatjuk hosszúságmérésre.

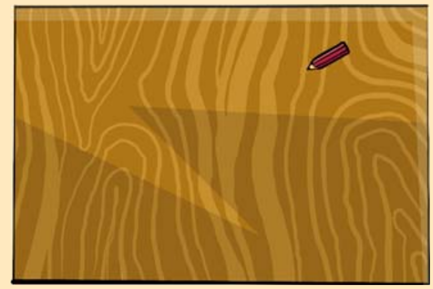
1. példa

A képen Csenge új íróasztalának lapja látható és rajta sok ceruza. Zsombornak a következő rövid üzenetet küldte:
„Új asztalt kaptam! Szélessége … ceruza, hosszúsága … ceruza. Végre kényelmesen tudok írni!!!”
Milyen számok szerepelhettek a kihagyott helyeken?
Használd az ábrát!

Megoldás

A rövid üzenet szerint Csenge a ceruza hosszát választotta mértékegységnek. Csenge ceruzája az asztallap rövid oldalára 4-szer, a hosszú oldalára pedig 6-szor fér rá. A **4** és a **6** lesz a mérőszám. Vagyis az asztallap **4 ceruza** széles és **6 ceruza** hosszú. Ezek a számok szerepelhettek az üzenetben.

2. példa



Ezen a képen Zsombor íróasztalának lapja látható és ezen is van egy ceruza. Válasszuk most ennek a ceruzának a hosszát egységnek! Adjuk meg Zsombor asztallapjának méreteit is!

Megoldás

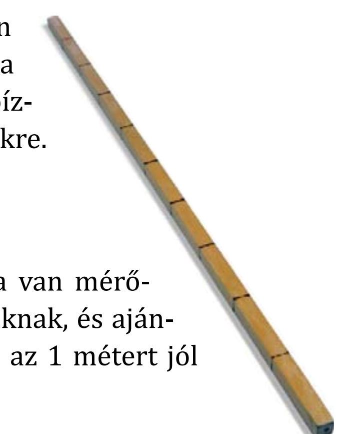
Az asztallap rövid oldalára ez a ceruza 6-szor fér rá, a hosszú oldalára pedig 9-szer.
Vagyis ez az asztallap **6 ceruza** széles és **9 ceruza** hosszú.

3. példa

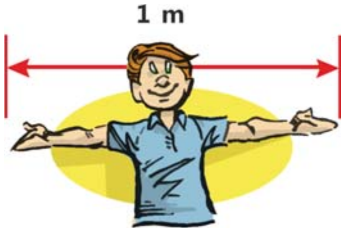
Hasonlítsuk össze az előző példákban kapott válaszokban lévő mennyiségeket! Ezek alapján mondhatjuk-e, hogy Zsombor asztala nagyobb, mint Csengéé?

Megoldás

Ha a két választ nézzük, akkor a Zsombor asztalával kapcsolatos mérőszámok valóban nagyobbak. Azonban semmit nem tudunk a két ceruza hosszáról. Nem várható el, hogy ezek pontosan egyformák legyenek, így nem tudjuk az asztalok nagyságát összehasonlítani.



A sokféle egység használata nagyon megnehezíti az összehasonlíthatóságot. Nagyon sokszor szeretnénk a méréseink eredményét összevetni. A testrészek használata során az okozta a gondot, hogy az így választott egységekkel sem lehetett ezt megbízhatóan és egyszerűen megtenni. Ez vezetett oda, hogy szükség lett rögzített egységekre.



A hosszúság esetén ez az egység az

1 méter.

Bútorok, szőnyegek vásárlásakor nagyon hasznos, ha van mérőeszközünk. A bútorboltok sokszor segítenek a vásárlóknak, és ajándékba adnak egy 1 méter hosszú mérőszalagot. Ezen az 1 métert jól láthatóan 10 egyenlő részre osztják.

Egy ilyen rész hossza .... **1 deciméter.**
A pontosabb mérés elvégzése érdekében az 1 decimétert is 10 egyenlő részre osztjuk.
Egy ilyen rész hossza .... **1 centiméter.**
A mindennapokban hasznos, ha az 1 centimétert is 10 részre vágjuk.
Az így kapott hosszúság az .... **1 milliméter.**
A nagy távolságok esetén az 1 méter ezerszeresét használjuk. Ez az .... **1 kilométer.**
A mértékegységeket írásban gyakran rövidítjük, ezt mutatja a következő táblázat.

A mértékegység neve	milliméter	centiméter	deciméter	méter	kilométer
A mértékegység rövidítése	mm	cm	dm	m	km

1 mm < 1 cm < 1 dm < 1 m < 1 km

$\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 10$ $\cdot 1000$

1. A HOSSZÚSÁG MÉRÉSE

4. példa

Olvassuk le a kép szélességét, magasságát milliméter pontossággal!

Megoldás

A kép szélessége 39 mm, a magassága pedig 37 mm.

Feladatok

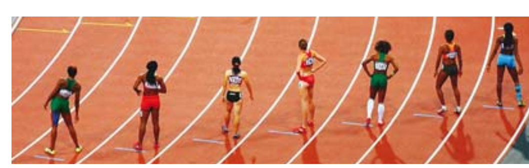
1. Párosával beszéljétek meg, és gyűjtsetek olyan távolságokat, amiket kilométer, méter, centiméter, milliméter pontossággal adnátok meg!

2. Először becsüld meg, majd mérd meg a matematikakönyved szélességét, magasságát és vastagságát milliméter pontossággal! Hány millimétert tévedtél az egyes becsléseknél?

3. Az iskolaudvar szélességéről megállapították, hogy 25 m-nél nagyobb, de 26 m-nél kisebb. Írjuk le ezt a megállapítást matematikai jelekkel! Ha ez a szélesség közelebb van a 25 m-hez, akkor ezt hogyan jegyezhetjük le rövid jelöléssel?

4. Péter pohara majdnem 2 dm magas, Pál pohara milliméter pontossággal 210 mm. Mennyivel lehet Pál pohara magasabb, mint Péteré?

5. Gyűjtsd össze, hogy a futók milyen távokat futnak az atlétikaversenyeken! Melyik mértékegységet használjuk ezek megadásakor?



6. Keressetek olyan távolságokat, amelyek
a) nem hosszabbak, mint 3 láb;
b) 1 hüvelyknél hosszabbak, de 1 lépésnél nem!

7. Az iskolai focicsapatban Zsolt 26 m-re tudja elrúgni a labdát, Gedeon 29 m-re, Viktória pedig 27 m-re. Jack azt mondja, hogy ő 30 yardra tudja elrúgni a labdát (1 yard körülbelül 91,5 cm). Sorba állítottuk a gyerekeket aszerint, hogy ki milyen messze tudja rúgni a labdát. Melyik lehet a megadottak közül a helyes sorrend?
a) Zsolt < Viktória < Gedeon < Jack
b) Jack > Gedeon > Viktória > Zsolt
c) Zsolt < Viktória < Jack < Gedeon
d) Viktória < Zsolt < Gedeon < Jack

8. Szerinted hány éves lehet az a leckékben szereplő fiú, aki széttárt karokkal 1 métert mutat? Fiatalabb nálad?

KUTATÓMUNKA

A magyar népmesékben régi mértékegységekkel is találkozhatsz! Nézz utána, hogy mit jelent a 7 sing, a 3 bakarasz!

TESTEK TÖMEGÉNEK MÉRÉSE 2.

Csoportmunka

Azt, hogy kinek mi és mennyire nehéz, nem tudjuk könnyen megállapítani. Próbálkozzatok például az iskolatáskáitokkal! Ránézésre nem lehet megállapítani, melyik a nehezebb. Emeljetek meg néhány táskát, és becsüljétek meg a tömegét!
Egy szobamérleggel ellenőrizhetitek a tippjeiteket.
A csoport egyik tagjának mindkét kezébe adjatok egy-egy táskát, és kérjétek meg, hogy állapítsa meg a tömegüket! Próbálja megtippelni, hogy szerinte melyik táska és mennyivel nehezebb!
Méréssel ismét ellenőrizhető a tipp.

A tömeg mérésének egyik legfontosabb eszköze a mérleg, amiből nagyon sokfélét láthattál már. Van szobamérleg, babamérleg, kétkarú mérleg, digitális mérleg, konyhai mérleg, stb.
A tömegek méréséhez is – csakúgy mint a hosszúság méréséhez – rögzített egységre van szükségünk.
Ez az egység az

1 kilogramm.

Rövid jelöléssel: **1 kg**.

A beszélt nyelvben gyakran eltérünk a hivatalos megfogalmazástól, és azt mondjuk: „Kérek egy kiló kenyeret." Ez teljesen természetes és helyénvaló. Ha mindig mindent teljesen hivatalosan mondanánk beszéd közben, akkor nyelvünk nem lenne élő. Sőt, a mindennapi szóhasználatban gyakran súlyt mondunk tömeg helyett. Ha valaki a bevásárlókosarunk súlyát szeretné tudni, akkor lényegében a tömegére szeretne rákérdezni. A gyakorlatban ez sem okoz zavart, de tudjuk, hogy a súly és a tömeg két különböző fogalom. Fizikaórákon fogsz erről részletesen tanulni.

Józsi 73 kg-os, a hátizsákja 4 kg, a kisfia biciklije 10 kg. Sok olyan helyzet fordulhat elő, amikor kényelmesebb ennél kisebb vagy ennél nagyobb egységgel számolnunk. Ezért a mindennapokban további mértékegységeket is használunk a tömeg mérésekor. A gyógyszerészek számára a milligramm is fontos. A szakácskönyvek receptjeiben gyakran találkozhatunk a dekagrammal. Egy teherautó rakományának tömegét megadhatjuk tonnában.
Ezeket a következő táblázatban foglaltuk össze:

A mértékegység neve	milligramm	gramm	dekagramm	kilogramm	tonna
A mértékegység rövidítése	mg	g	dkg	kg	t

$$1\ \text{mg} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\ \text{g} \xrightarrow{\cdot 10} 1\ \text{dkg} \xrightarrow{\cdot 100} 1\ \text{kg} \xrightarrow{\cdot 1000} 1\ \text{t}$$

$$1\ \text{mg} < 1\ \text{g} < 1\ \text{dkg} < 1\ \text{kg} < 1\ \text{t}$$

Nem szabványos, de például a mezőgazdaságban még most is használják a 100 kg-mal egyenlő 1 mázsa (1 q) elnevezést!

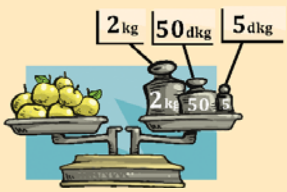
2. TESTEK TÖMEGÉNEK MÉRÉSE

Példa

A zöldséges egy kupac almát szeretne megmérni kétkarú mérleg segítségével. Most csak a kétkilós súlyokat használta. Mekkora lehet az almakupac tömege?

Megoldás

Láthatjuk a mérlegek állásából, hogy több, mint 2 kilogramm, de kevesebb, mint 4 kilogramm az almák tömege.



A zöldséges megtalálta a kisebb súlyokat is, és így sikerült kiegyensúlyoznia a mérleget. Mit mondhatunk ezután az almakupac tömegéről?
Azt mondhatjuk, hogy a tömege
2 kg + 50 dkg + 5 dkg = 2 kg + 0,5 kg + 0,05 kg = 2,55 kg.
Ezzel a méréssel már pontosabban megadtuk a tömeget, mint az előzőkkel.

Feladatok

1. Járj utána, hogy a következő hétköznapi helyzetekben melyik mértékegységet használjuk a tömeg mérésére:
a) poggyász, repülőgépen; *b)* egy híd teherbírása; *c)* ékszer;
d) egy gombóc fagyi; *e)* a tankönyv tömege; *f)* gyógyszerek összetétele!

2. Válaszd ki az alábbi mondatok közül azokat, amelyek helyesek, elhangozhattak egy beszélgetés során! Amelyik szerinted lehetetlen, azt javítsd ki, fogalmazd át úgy, hogy hihető legyen!
a) Örömmel tudatjuk, hogy 3530 g-mal és 53 cm-rel megszületett kislányunk, Anna.
b) 23 dkg lett a felvágott. Maradhat? Nem, hazavinném.
c) A daru maximális teherbírása 1 kg.
d) Megmértem magam a mérlegen, 43 dkg vagyok.
e) Vettem 2 kg faanyagot a kerti szerszámoskamra megépítéséhez, de nem tudom hazavinni, mert nem bírom el.

3. Szeleburdiék egy ház ötödik emeletén laknak. A hétvégi nagybevásárlásról hazaérkezve a lift előtt tanakodnak, mert annak ajtaján a következő szöveg olvasható:

Maximum 300 kg (4 fő) szállítására alkalmas.

Tudjuk, hogy a gyerekek 25 kg és 36 kg, az anyuka 60 kg, az apuka 75 kg tömegű. A csomagjaik tömegét nem ismerik. Mit tanácsolsz nekik? Beszállhatnak-e egyszerre az összes csomagjukkal a liftbe? (Nézz utána ki írt könyvet a Szeleburdi családról!)

4. Másold le a feladatot a füzetedbe! Add meg a hiányzó mértékegységeket!
a) 3,5 kg = 3500 ……; *b)* 0,3 t = 300 ……; *c)* 4,2 g = 4200 ……; *d)* 39 dkg = 390 ……;
e) 4800 mg = 4,8 ……; *f)* 0,2 dkg = 2 ……; *g)* 1450 g = 1,45 ……; *h)* 420 dkg = 4,2 …… .

5. Másold le a feladatot a füzetedbe! Add meg a hiányzó mérőszámot!
a) 1600 mg = …… g; *b)* 380 g = …… kg; *c)* 4600 dkg = …… kg; *d)* 370 kg = …… g;
e) 4,8 t = …… kg; *f)* 0,78 kg = …… g; *g)* 48 dkg = …… g; *h)* 0,38 g = …… mg .

Csoportmunka

Üljetek párosával! A pár egyik tagja válasszon 1 és 30 között egy számot, és mérjen az óráján (telefonján) ennyi másodpercet! Jelezze a mérés elejét és végét a társának, aki a végén megtippeli, hogy mennyi idő telt el! Jegyezzétek fel az eltérést a tipp és az eltelt idő között! Próbáljátok ki néhányszor! Figyeljétek meg, hogy javul-e a tippelésetek!

A körülöttünk lévő világban az idő múlását figyelve sok ismétlődést vehetünk észre. Ilyen például a nappalok és éjszakák, az évszakok váltakozása, a hold sarlójának változása.

Az idő mérésére használt mértékegységeket a táblázat mutatja: másodperc, perc, óra, nap, hét, hónap, év.

A mértékegység neve	másodperc	perc	óra	nap	hét	hónap	év
A mértékegység rövidítése	s	min	h	–	–	–	–

$$1\text{ s} \xrightarrow{\cdot 60} 1\text{ min} \xrightarrow{\cdot 60} 1\text{ h} \xrightarrow{\cdot 24} 1\text{ nap} \xrightarrow{\cdot 7} 1\text{ hét}$$

A további váltószámokat nem írtuk le, mert azok nem állandóak.

A nap és a hónap közé nem tudunk rögzített váltószámot írni, mert nem minden hónap ugyanolyan hosszú.

Ha ökölbe szorítod a kezed, az ujjaid tövénél lévő bütykök segítenek a 30, és a 31 napos hónapok számontartásában. Haladj végig a kisujjadtól a mutatóujjadig, és folytasd a másik kezed mutatóujjánál lévő bütyökkel: a bütyök 31 napos, két bütyök közti völgy 30 napos hónapot jelképez. Természetesen az első völgy, a februárt jelenti, amely vagy 28, vagy 29 napos. Nézz utána, hogy mikor 29 napos a február! Mit jelent a szökőév elnevezés?

Az idő mérésére szolgáló eszköz az óra. Van homokóra, karóra, digitális óra, falióra, toronyóra.

Az óra **időpont**ot mutat. Két időpont közt eltelt idő az **időtartam**.

1. példa

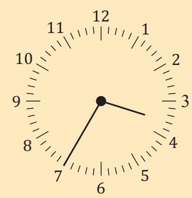
Hány hónapos vagy? Számold ki!

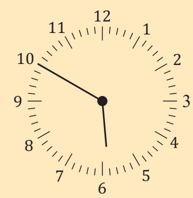
Megoldás

Hányadik születésnapodat ünnepelted már meg? Ennek a számnak vedd a tizenkétszeresét, és add hozzá a születésnapod óta eltelt hónapok számát! Ekkor megkapod, hogy hány hónapos vagy!

2. példa

A bal oldali óra azt a délutáni időpontot mutatja, amikor Töhötöm elindult az edzésre. A jobb oldali óra a hazaérkezésének időpontját mutatja. Mennyi ideig volt távol?



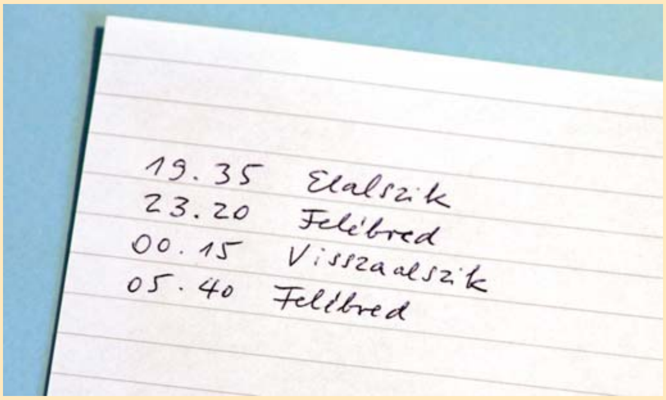


Megoldás

A bal oldali óra 15 óra 35 percet mutat. Ehhez képest 25 perc elteltével lesz 16 óra. Aztán eltelik 1 óra, és ekkor lesz 17 óra. Végül még 50 percnek el kell telnie, hogy 17:50 legyen a pontos idő.
Ez összesen: 25 perc + 1 óra + 50 perc = 2 óra 15 perc.
Vagyis a két időpont között 2 óra 15 perc telt el, ennyi ideig volt távol.
Számolhatsz másként is. 15 óra 35 perc és 15 óra 50 perc között tizenöt perc telik el, és aztán még két óra, míg 17 óra 50 perc lesz, azaz a teljes eltelt idő 2 óra 15 perc.

3. példa

Merse édesanyja egyik nap percre pontosan feljegyezte kisfia éjszakai felébredéseinek és elalvásainak időpontját:
Hány órát aludt Merse ezen az éjszakán?



Megoldás

Az elalvás és a felébredés közti időtartamokat kell összeadnunk.
19:35-től 23:20-ig aludt. Ez 3 óra 45 perc.
00:15-től 05:40-ig aludt. Ez 5 óra 25 perc.
Tehát Merse összesen 9 óra 10 percet aludt.

Feladatok

1. Add meg a hiányzó mérőszámokat!
a) 3,5 min = …… s; *b)* 4,25 h = …… min; *c)* 4,5 nap = …… h; *d)* 0,5 hét = …… h;
e) 720 s = …… min; *f)* 78 h = …… nap; *g)* 3 nap = …… hét; *h)* 3,5 hét = …… h .

2. Add meg a hiányzó mértékegységeket!
a) 330 s = 5,5 ……; *b)* 780 h = 32,5 ……; *c)* 336 h = 2 ……; *d)* 7200 s = 2 …… .

3. Milyen időmértékegységben adnád meg a választ a következő kérdésekre?
a) Mennyi idős vagy?
b) Mi a 100 méteres síkfutás világrekordja?
c) Ne haragudj, hogy késtem. Mennyit vártál rám?
d) Mennyi egy tíz éves gyerek napi alvásigénye?
e) Meddig bírod ki a víz alatt egy levegővétellel?
f) Mennyi idő alatt olvastad el a könyvet?
g) Mennyi idő alatt gyorsul az autód 100 km/h-ra?
h) Mennyi idő telik el két telihold közt?

4. Az ábra segítségével válaszolj a kérdésekre!

a) Összesen mennyi ideig van nyitva a bolt egy héten?
b) Este hét óra után hét perccel léptünk be a boltba. Hány percünk van még a vásárlásra?
c) A boltban két eladó dolgozik. Úgy osztották be a napokat, hogy az egyik hétfőn, szerdán és pénteken van a boltban, a másik kedden, csütörtökön és szombaton. Hetenként cserélnek, hogy igazságos legyen a beosztás. Hány órát dolgozik a két eladó hetente?
d) Zénó szerdán 12:26-kor zárva találja a boltot. Zénó nem nézi meg a nyitva tartásról szóló táblát, ezért távozni akar. Te mit tanácsolnál neki?

5. Váltsd át a következő mondatokban szereplő időtartamot olyan mértékegységbe, ami jobban illik a szövegkörnyezetbe!
a) A tűzoltók 300 másodpercen belül a helyszínre értek.
b) Ez a kisbaba 35 napos.
c) Fáradt vagyok, mert éjjel csak 300 percet aludtam.
d) Ha lágytojást szeretnél készíteni, akkor a tojást 180 másodpercig kell a forrásban lévő vízben tartanod.

6. Egy bank internetes szolgáltatása alapján az ügyfelek az előző három hónap pénzügyi adatait nézhetik meg. Hány napot jelenthet ez?

7. A Nap 2014. 03. 15-én, szombaton 5 óra 57 perckor kelt fel és 17 óra 49 perckor nyugodott le.
a) Milyen hosszú volt a nappal?
b) Milyen hosszú volt az ezt követő éjszaka, ha másnap 5 óra 55 perckor kelt fel a Nap?
c) Délután 4 óra előtt 12 perccel mennyivel van közelebb hozzánk a következő napnyugta, mint az előző napkelte?

8. Késő Klára minden reggel ébredés után háromnegyed órát készülődik az iskolába indulásig. Tíz perc alatt kiér a buszmegállóba, ahol az öt percenként közlekedő busz húsz perc alatt elviszi az iskoláig. A buszról leszállva öt percre van szüksége, hogy az osztályterembe érjen, elfoglalja a helyét, és előkészüljön az első órára. Az első órára 8 órakor csöngetnek be. Sajnos Klári sokszor elkésik. Amikor osztályfőnöke kérdőre vonja, azzal védekezik, hogy ő az általa kiszámított időben pontosan felkel.
a) Mikor kel fel Klára?
b) Szerinted mit javasolt neki az osztályfőnöke?

9. Rozi május 29-én elhatározta, hogy a következő naptól kezdve minden nap 10 percet fog futni, aztán ötnaponta fél perccel emeli az adagot. Rozi ezt a tervet tartotta június végéig.
a) Hány percet futott június 10-én?
b) Mely napokon futott Rozi 11 percet?
c) Hány órát futott összesen júniusban?

4. ÖSSZEFOGLALÁS

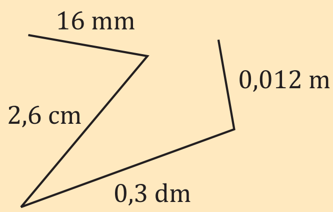
Az előző három leckében gyakran előfordult néhány szó, amit ha az alapegység elé írtunk, akkor új mértékegységet kaptunk. Ezek az úgynevezett előtagok szorzót jelentenek. Hatásukra az alapegység tízszeresét, százszorosát, ezerszeresét, illetve tizedét, századát, ezredét kapjuk. Összefoglalva:

milli	centi	deci	deka	hekto	kilo
ezredszeres (ezred rész)	századszoros (század rész)	tizedszeres (tized rész)	tízszeres	százszoros	ezerszeres

Ezért mondjuk az 1000 métert 1 kilométernek és az 1000 grammot 1 kilogrammnak.
Ezért mondjuk a 0,001 métert 1 milliméternek és a 0,001 grammot 1 milligrammnak.

Vannak olyan összetételek, amelyeket ma már nem használunk, de ezeket is értenénk.
Például a 10 métert régen mondták 1 dekaméternek (hiszen a deka tízszeres szorzót jelent), de ezt a mértékegységet ma már nem használjuk a mindennapokban.

1. példa



Encsi baba még nem tud járni, de már csúszik-mászik a gyerekszobában. Útvonalát az alábbi ábra szemlélteti. Ami az ábrán 1 centiméter, az a valóságban 1 méter. Hány métert tett meg összesen?

Megoldás

A töröttvonal hosszát centiméterben érdemes megadnunk, hiszen a valóságban a centiméterek métert fognak jelenteni.
Centiméterben a szakaszok hossza: 16 mm = 1,6 cm; 2,6 cm; 0,3 dm = 3 cm; 0,012 m = 1,2 cm.
Ez összesen 8,4 cm. Vagyis Encsi baba 8,4 métert tett meg.

2. példa

Liza újszülöttként 3025 grammos és 50 centiméteres volt. Egyéves korában 9,075 kilogrammos és 0,75 méteres.

a) Mennyivel nőtt a tömege és mennyivel a magassága?
b) Hányszorosára növekedett a tömege és hányszorosára a magassága?

Megoldás

a) Az egyéves Liza 9,075 kilogrammos, ami 9075 gramm. Kivonással megkapjuk, hogy 6050 grammal gyarapodott a tömege. (Ez 50 grammal több, mint 6 kilogramm.)
A magassága egyéves korában 0,75 méter, azaz 75 centiméter. Vagyis 25 centimétert nőtt.
b) Mivel 9075 : 3025 = 3, ezért a tömege megháromszorozódott.
Az 50 centiméternek a felével növekedett a magassága. Tehát a magassága másfélszeresére nőtt.

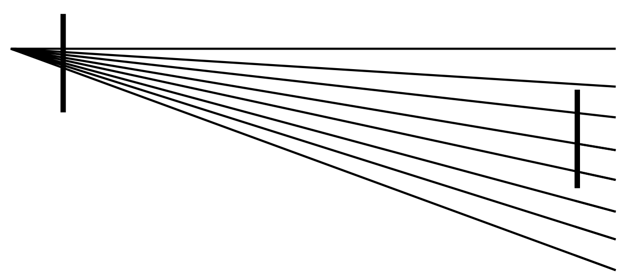
3. példa

László nézni kezdett egy 1:12:27 (azaz 1 óra 12 perc 27 másodperc) hosszúságú filmet. A lejátszást 21:36-nál megállította, mert kiment a konyhába teát főzni. A film nézését 1:01:48-nál is abbahagyta, mert megszólalt a telefonja. Milyen hosszúságú részekben tudta végignézni a filmet?

Megoldás

A lejátszóknál nem jelzik a mértékegységeket, de a látott adatok alapján tudjuk, hogy a film hossza: 1 óra 12 perc 27 másodperc. Az első megállításig 21 perc 36 másodperc telt el, vagyis ennyi az első rész hossza. A második megállításig 1 óra 1 perc 48 másodperc telt el a filmből. Az 1 óra 12 perc 27 másodperc és az 1 óra 1 perc 48 másodperc időtartamok kivonásával megkapjuk a harmadik rész hosszát: 10 perc 21 másodperc. Ezt is kivonjuk a film hosszából, és így megkapjuk a második rész hosszát: 40 perc 30 másodperc.

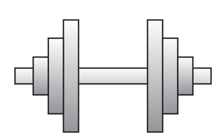
Csoportmunka



A padtársaddal döntsétek el, hogy szerintetek a két függőleges szakasz közül melyik a hosszabb? Becsüljétek meg az eltérést milliméterben! Ezután mérjétek meg! Mennyit tévedtetek?

Feladatok

1. Erős Pista otthon súlyzózik. Súlyzójának rúdja 3 kg. 40 dekagrammos, 75 dekagrammos, 1250 grammos és 230 dekagrammos fémtárcsái vannak. Mindegyikből két-két darab. A rúd mindkét végére három tárcsa fér rá, és mindig felszerel legalább egy-egy tárcsát.



a) Mekkora a legnagyobb súly, amivel dolgozhat?
b) Melyik tárcsákat szerelje fel a rúdra, ha 7 kilogrammal szeretne edzeni.
c) Mekkora az eltérés a legkönnyebb és a legnehezebb összeállítás között?

2. Bendegúz „vágja a centit”, azaz úgy várja a nyári vakációt, hogy minden nap levág a mérőszalagjából egy 1 centiméteres darabot. Úgy kezdte a vágást, hogy pont az utolsó tanítási napra fogyjon el a szalag.
Milyen hosszú volt a szalag, ha már 4 hete és 6 napja vágja a centiket, és még 3 hét, 2 nap, és további 18 cm hátra van?

3. A mozdony 50 tonna terhet bír elhúzni. Hány darab vagonnal indítható el az ábrán látható mozdony? A vagonoknak nem tudjuk megváltoztatni a sorrendjét.

4. Hogyan lehet egy 3 és egy 5 perces homokórával pontosan 4 percet mérni?

5. A néptáncegyüttes szabója pántlikának való szalagot vesz a lányok hajába. A 20 lány közül 14 egy copfba, 6 két copfba fonja a haját, egy copfba 120 cm hosszú szalag kell. A boltban csak méterre kerekítve lehet vásárolni. Mennyi szalagot vegyen a szabó?

6. Add meg ezeknek a mennyiségeknek a tízszeresét egy másik mértékegységgel!
a) 1 mm; *b)* 1 cm; *c)* 1 dm; *d)* 100 m;
e) 100 mg; *f)* 1 g; *g)* 10 dkg; *h)* 100 kg.

7. Írd le növekedő sorrendben a megadott mennyiségeket! Használj egy közös mértékegységet!
a) 1200 mm, 0,2 m, 32 cm, 0,25 km, 3 dm, 20 mm;
b) 25 000 mg, 24 g, 0,5 kg, 31 dkg, 0,006 t, 7,5 kg;
c) 0,5 nap, 1 hét, 200 h, 612 000 s, 3 nap, 7200 min.

8. Írd le egy kisebb egész számmal a következő mennyiségeket! Amelyiket lehet, azt add meg többféleképpen is! Sorold fel a megadott mennyiségek közül azokat, amelyekkel hosszúságot adtunk meg!
a) 2000 kg; *b)* 2800 cm; *c)* 15 000 g; *d)* 2800 dm;
e) 20 000 cm; *f)* 120 000 dkg; *g)* 48 h; *h)* 32 400 s;
i) 14 nap; *j)* 25 020 mm; *k)* 25 200 g; *l)* 15 840 min.

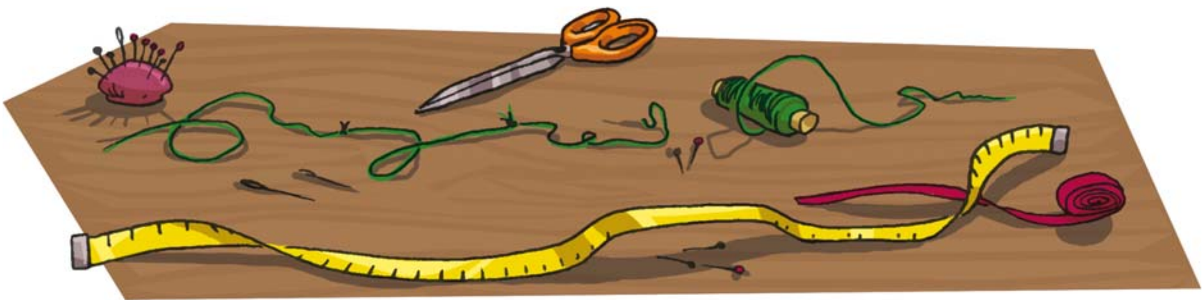
9. A következő mennyiségek összegét pótold 3 km-re!
a) 1400 m, 120 cm, 11 dm; *b)* 22 000 mm, 2020 m, 300 cm;
c) 2,1 km, 880 cm, 9900 mm; *d)* 150 000 cm, 1600 dm, 170 000 mm.

10. A következő mennyiségek összegét pótold 5 kg-ra!
a) 3400 g, 12 dkg, 1 kg; *b)* 12 000 mg, 988 g, 300 dkg;
c) 0,0002 t, 80 dkg, 1100 g; *d)* 4 g, 44 dkg, 4 kg.

11. Mennyivel több, mint egy nap a következő időtartamok összege?
a) 11 h, 120 min, 50 400 s; *b)* 300 min, 18 000 s, 15 h;
c) 0,5 nap, 11 h, 100 min; *d)* 15 000 s, 1200 min, 0,5 h.

12. Töhötöm a lakásajtajától 500 másodpercet ment a buszmegállóig, és utána 8,5 percet utazott busszal. A leszállás után 0,1 órát gyalogolt az iskoláig, ahová a házirend szerint 7:50-ig kell megérkeznie. Töhötöm általában negyed 8-kor indul az iskolába, és így nem szokott elkésni. Ezen a napon fél 8 előtt pontosan 3 perccel indult. Lehetséges-e, hogy ezen a napon sem késett el az iskolából?

13. A varródobozban lévő mérőszalag hossza 150 cm. Összekötöttünk három zsinórt, a hosszuk 59 cm, 630 mm és 3 dm. Megmérhető-e a mérőszalaggal az így kapott zsinór hossza egyszeri hozzáérintéssel?



14. Nagymama kétkarú konyhai mérleget használ. A mérleg egyik serpenyőjébe beleöntött fél kg porcukrot, 20 dkg lisztet, és beleütött két egyforma tojást. A mérleg másik serpenyőjébe beletett 3 darab 20 dkg és 2 darab 10 dkg feliratú súlyt. A mérleg most egyensúlyban van. Hány grammosak lehettek a tojások?

15. Két tehervagonban 16 tonna feketeszén van. Egy ház éves fűtéséhez és a család melegvíz-ellátásához 8000 kg szenet használ el. Hány ház ellátására elegendő a két vagonban lévő szén?

16. Az iskolai tanórák 45 percesek, de rendkívüli esetben lehetnek rövidített tanórák is, amelyek csak 40 percesek. Vezessük be a *tanóra* mértékegységet *th* rövidítéssel, és a *rövidtanóra* mértékegységet *rth* rövidítéssel. Vagyis 1 th = 45 min, 1 rth = 40 min.
Add meg a következő mennyiségeket th-ban és rth-ban!
a) 6 h; *b)* 1 nap; *c)* 720 min; *d)* 21 600 s.

17. A mérföld a hosszúságegységek egyik nagy csoportja, amelynek számos fajtáját még ma is használjuk, bár nem tartoznak a nemzetközileg elfogadott szabványhoz. A magyar mérföld 8353,6 méterrel, az angol mérföld 1609,3 méterrel, a tengeri mérföld 1852 méterrel egyenlő.
Add meg kilométerre kerekítve a következő hosszúságokat!
a) 10 magyar mérföld; *b)* 5 tengeri mérföld;
c) 4 angol mérföld; *d)* fél magyar mérföld.

18. Ha egy magyar mesében szereplő hős felveszi a „hétmérföldes” csizmáját, amiben minden lépése hét mérföld hosszúságú lesz, akkor körülbelül hány lépéssel jut el Sopronból Miskolcra? (Miskolc és Sopron távolsága légvonalban 327 km.) Használd az előző feladat szövegét!

19. Jani szeretné a 82 cm-es képátmérőjű televízióját a falra szerelni. Ehhez egy fali konzolt kell vásárolnia. Az üzletben található konzolokra colban írták rá, hogy milyen méretű televíziókhoz valók. Megvegye-e Jani a „max. 35 colos képátmérőjű televízióhoz" feliratú konzolt? Nyomozz, érdeklődj! Hány centiméter az 1 col?

20. Ha bemegyünk egy barkácsboltba, mert a kerti csaphoz locsolótömlőt szeretnénk vásárolni, akkor meg fogják kérdezni tőlünk, hogy hány colos csaphoz szeretnénk csatlakoztatni. Az ácsok, asztalosok, víz-, gáz-, fűtésszerelők is használják ezt a mértékegységet. A col másik elnevezése az inch, és ezek egyenlők a hüvelyk elnevezésű egységgel is. Írd le a következő mondatokat úgy, hogy milliméter szerepeljen bennük!

a) A kerítést 1 colos vastagságú deszkákból készítették.
b) Eladó egy 14 inch képátmérőjű monitor.
c) A mesebeli Hüvelyk Matyi magassága 7 hüvelyk.

21. Egy teherautónak Debrecenből Sopronba kell eljutnia közúton. A Debrecenben felrakott szállítmány egy részét Miskolcra, a másik részét Szegedre kell vinnie, de mindegy, hogy milyen sorrendben. Ezután Kecskemétről Sopronba kell fuvaroznia egy újabb rakományt. A városok közötti legrövidebb közúti távolságok a következők:
Debrecen – Kecskemét 182 km, Debrecen – Miskolc 98 km, Debrecen – Szeged 212 km,
Miskolc – Szeged 257 km, Miskolc – Kecskemét 185 km, Szeged – Kecskemét 86 km,
Kecskemét – Sopron 287 km.

a) Milyen lehetséges útvonalakat tudsz elképzelni?
b) Mekkora az eltérés a legjobb és a legrosszabb útvonal között?

22. A Békéscsaba és Gyula közötti távolságot András 165 perc, Botond 720 másodperc, Csaba 0,7 óra, Dániel pedig 1,75 óra alatt tette meg. Tudjuk, hogy autóval, kerékpárral, gyalogosan és futva haladtak. Ki melyik módszert használhatta?

23. Orosz regényírók műveiben találkozhatsz a verszta mértékegységgel: 1 verszta = 1066,78 m. Ha egy ilyen regényben azt olvasod, hogy a trojka 15 versztát tett meg a tajgában, akkor hány kilométert haladt?

24. A diós-szilvás süti receptjében ezek szerepelnek hozzávalóként nyolc személyre: 70 dkg magozott szilva, 10 dkg puha vaj, 10 dkg finomliszt, 10 dkg darált dió, 10 dkg cukor, 5 db tojás, 1 dkg sütőpor, 4 dkg őrölt fahéj, 5 dkg (kb. 1 db) citrom reszelt héja.

a) Ha ez összesen 1,5 kilogramm, akkor hány grammosak lehetnek a tojások?
b) Hány gramm alapanyagot kell felhasználni 1 személy részére?

25. Az egyik boltban párosával mintás cipőfűzőket lehet vásárolni. A cipőfűzők hossza 80, 100, 110, 120, 160 és 200 cm. Kétszeri vásárlás után van 4 darab cipőfűződ. A következő mennyiségek közül melyik lehet ezek hosszúságának összege?

a) 3600 mm;	*b)* 760 cm;	*c)* 56 dm;	*d)* 5 m;
e) 32 dm;	*f)* 6 m;	*g)* 70 dm;	*h)* 460 cm.

IV. Bevezetés a geometriába

„Az Europe szinte tökéletes gömbnek látszott, miközben leereszkedtünk. A legjobban az tetszett, hogy amikor korcsolyáztunk, akkorákat tudtam ugrani, amekkorát otthon soha” – írta Gazsi a számítógépébe, aztán a mentés gombra bökött, eltüntette a képernyőről a billentyűzetet, és fejére tette a holosisakot, hogy ismét átvágja magát a gonosz Zog csillagközi flottáján. A játék elején körpályán kellett várakoznia a Hold körül, majd adott jelre egyenes vonalban minél nagyobb sebességre gyorsítania. Aztán már csak az ügyességén múlt, hogyan tudja lerázni a hipertérből előbukkanó Zog-flottát. Gömb alakban fogták körül az ellenséges hajók. Gyorsan a déli pólus felé kanyarodott, és amikor követni kezdték, hirtelen észak felé fordult. Hiperűrsebességre kapcsolt, és a Zog-armada belegabalyodott a mögötte keletkező miniatűr fekete lyuk peremébe. A megmaradt pár hajót már könnyűszerrel hagyta maga mögött. Elégedetten állította meg a szeme előtt lebegő holoképet. 90 000 984 pontja lett, és ezzel sikerült rekordot döntenie a kilencedik szinten. Nekigyürkőzött volna a tizediknek is – amin már kétszer elbukott –, de Attila megpróbálta félretolni.

– Bocs, muszáj használnom a nagy wikikompot. Nem emlékszem, milyen sorrendben jártunk a Jupiter holdjain.

Gazsit azonban nem volt könnyű kimozdítani a helyéből, ha játékról volt szó. Kicsit elmélázott, aztán sorolta:

– Kívülről befelé haladtunk, úgyhogy Kallisztó, Ganümédész, Európe, Ió volt a sorrend. És hagyjál játszani, ez az én harminc percem! – Azzal a második szintre lépett az Attila elleni, és a tizedik szintre a Zog elleni harcban.

1. CSOPORTOSÍTÁSOK

Csoportmunka

Vegyetek elő a zsebetekből, táskátokból néhány tárgyat, olyanokat is lehet, amit matematikaórán nem szoktatok használni! Találjatok ki olyan szempontokat, amelyek alapján csoportosíthatjátok ezeket a tárgyakat! A csoportosítás szempontját és a kialakított csoportokba tartozó tárgyak nevét írjátok le a füzetetekbe!

Nagyon sok tárgy vesz körül minket. A tantermetekben, a lakásotokban, az utcán megfigyelhetitek ezeket. Vannak, amelyeket rendszeresen használunk, vannak, amelyek díszítik a környezetünket. Szinte észre sem vesszük, és rendezzük, csoportosítjuk ezeket a tárgyakat. Rengeteg szempont, tulajdonság alapján tehetjük ezt meg.

1. példa

Csoportosítsuk ezeket a tárgyakat!

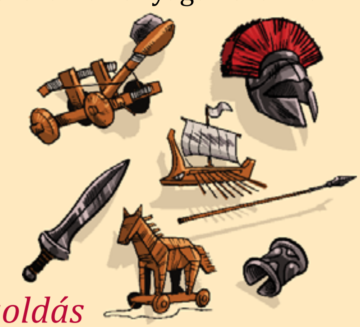
Megoldás

Pirosak: szoknya, nyereg, kendő, csizma.
Kékek: álarc, kard, kendő, üveggolyó.

A geometria a tárgyak alakjával foglalkozik. A tárgyak anyaga, színe nem tartozik a geometria vizsgálati szempontjai közé.

2. példa

Az ábrán látható tárgyakat rendszerezzük anyaguk szerint!



Megoldás

Fából készültek: faló, hajítógép, hajó, dárda.
Fémből készültek: karperec, spártai sisak, nyílhegy.

3. példa

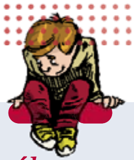
Találj ki egy geometriai szempontból fontos csoportosítást a képen látható dolgokról!

Megoldás

A geometria az alakkal foglalkozik. Az ábrán látunk olyan tárgyakat, amelyeket ha egy asztalra helyeznénk, akkor könnyen odébb gurulnának. Ezt figyelembe véve kialakíthatunk két csoportot.

Egyik csoport: labda, tojás, kenyér, zsemle. Másik csoport: tejes doboz, kockacukor. Természetesen más csoportosítás is tökéletes lehet.

CSOPORTOSÍTÁSOK 1.



Játék

Felsorolunk néhány szót:

vihar, tigris, ezer, nehéz, régen, zár, rét, sisak, könyv, körte, teke, kabát. Ezek közül azokat a szavakat rendezhetitek egy csoportba, amelyek egymáshoz fűzhetők. Próbáljatok a fenti szavakból ilyen módon két csoportot kialakítani úgy, hogy a lehető legtöbb szót felhasználjátok a felsoroltakból!

Egy lehetséges csoportosítás: KönyV – VihaR – RégeN – NehéZ – ZáR
TekE – EzeR – RéT – TigriS – SisaK – KabáT

Egy szó maradt ki: körte.

Lehetett volna így is: KönyV – VihaR – RégeN – NehéZ – ZáR
KörtE – EzeR – RéT – TigriS – SisaK – KabáT – TekE

Így pedig nem maradt ki egyik sem!

Készítsetek ti is ilyen feladványokat egymásnak! Hogyan tudnátok a felsorolt szavakat másképp csoportosítani?

Feladatok

1. Csoportosítsd a következő tárgyakat: tányér, kés, pohár, kanál, csésze, villa!
Milyen szempont alapján alakítottad ki a csoportokat?

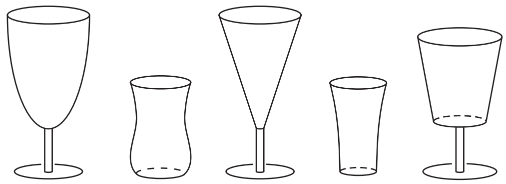
2. Gondolj a következő járművekre: motorkerékpár, hajó, személygépkocsi, kerékpár, autóbusz, roller, csónak, teherautó!
a) Rendezd őket két csoportba!
b) Rendezd őket három csoportba!
Milyen tulajdonság alapján alakítottad ki a csoportokat?

3. Felsorolunk néhány tárgyat: labda, dobókocka, írólap, üveggolyó, radír, emeletes ház, buszjegy, Hold, nápolyi szelet, lepedő, kártyalap, narancs, könyv.
Csoportosítsd őket a következő szempontok alapján: térbeliek, szögletesek, laposak, gömbölyűek! Egy tárgy több helyen is szerepelhet.

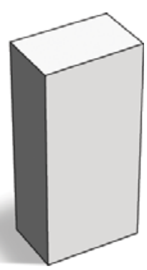
4. Európa térképéről a következő városokat választottuk: Budapest, Róma, Miskolc, Lisszabon, Varsó, Pozsony, Krakkó, Hamburg.
Hogyan csoportosítanád ezeket a városokat? Nézd meg a térképen, hol vannak ezek a városok!

5. Két csoportot alakítottunk ki. Rajzold le a füzetedbe ezeket a tárgyakat!
Egyik csoport: gyufásdoboz, dobókocka, kockacukor.
Másik csoport: gyűrű, műanyag kupak, fazék.
Milyen geometria tulajdonság alapján végezhettük ezt a csoportosítást?

2. TEST, FELÜLET, VONAL, PONT

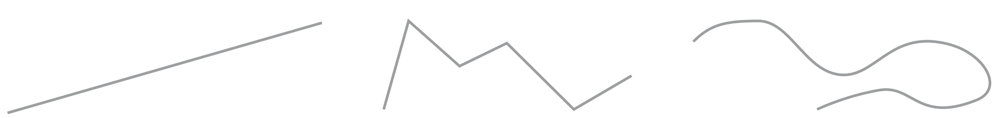


Előfordulhat, hogy a tárgyaknak csak a **formája** és a **mérete** fontos a számunkra. Ha egy szép alakú poharat vagy vázát tervezünk, akkor még nem feltétlenül gondolunk a tárgy anyagára, színére.
A geometria **test**ekkel is foglalkozik. Ilyenkor a tárgyaknak csak az **alak**ja és a **mérete** lesz fontos.



A testeket **felület** határolja. A felület egy darabját is felületnek mondjuk. A dobozt a felülete határolja, de külön a doboz tetejét is felületnek mondjuk. A dinnye külső határoló felülete, a héja, amit nem eszünk meg.
A geometriában a felületet egy hártyavékony lemezként szemléltethetnénk, de úgy kell elképzelnünk, hogy a **felületnek nincs vastagsága**.
Felület nem csak kívül lehet, például egy doboznak belül is van felülete.

A felületeket darabolhatjuk. Ezeket a darabokat **vonal**ak határolják.
A vonalakat szemléltethetjük például vékony cérnával, de úgy kell elképzelnünk, hogy a vonalaknak sem vastagságuk, sem szélességük nincs. A vonalak egy-egy darabját is vonalnak nevezzük.
A vonalakat görbéknek is mondhatjuk. A vonalak (görbék) közül külön kiemeljük azokat, amelyek egyenesek vagy egyenesek darabjaiból állnak.



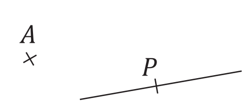
Vonalak

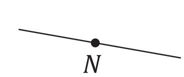
Síkgörbék, térgörbék

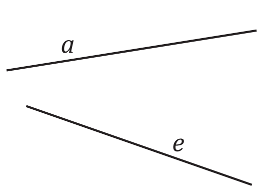
Vonalakból (görbékből) készíthetünk képet egy lapra vagy egy csésze oldalára (Simon András grafikái). Így **síkgörbék**et és **térgörbék**et kapunk.

Amikor egy vonalat feldarabolunk, akkor a darabokat **pont**ok határolják.
A pontot szemléltethetjük egy porszemmel, de úgy kell elképzelnünk, hogy semmilyen kiterjedése nincs. A pontokat nagybetűvel szoktuk jelölni. Az ábrán láthatjuk, hogy sokféleképpen lehet pontokat szemléltetni.

Az ábrán az A, P és N **pontokat** jelöltük.



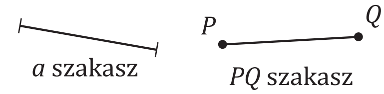


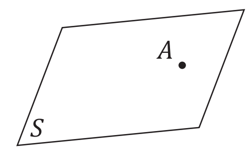


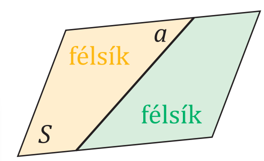
Az **egyenest tetszőleges hosszúságúnak képzeljük**. Azt mondjuk, hogy az egyenes végtelen hosszúságú. Minden darabja olyan, mint egy kifeszített cérnaszál. Az egyeneseket kisbetűvel szoktuk jelölni. Az egyenesnek mindig csak egy darabját tudjuk lerajzolni, de úgy képzeljük el, mintha az egészet látnánk.

Az egyenest egy pontja két **félegyenes**re, két különböző pontja pedig két félegyenesre és egy **szakasz**ra vágja:

A szakasz jelölésére használhatunk kisbetűket: a, b, c, …
vagy a két határoló pont nevét: PQ, RS, …
Sokszor használjuk a $PQ = 2$ cm jelölést is. Ez azt jelenti, hogy a PQ szakasz hossza 2 cm.
Már láttuk, hogy egyenes helyett is csak szakaszt tudunk rajzolni. Rajzban a szakasz két végét jelölnünk kell!
A **sík**ot is végtelen kiterjedésűnek képzeljük el.
A síkokat is nagybetűvel szoktuk elnevezni, de a rajzainkon próbáljuk kifejezni, hogy pontról vagy síkról van-e szó. Az ábrán egy S síkot és egy A pontot szemléltetünk.
A síkot egy egyenessel két **félsík**ra vágjuk.







Feladatok

1. Mit szemléltethetünk a következő tárgyakkal: testet, felületet, vonalat, pontot?
Ceruza, a füzet egyik lapja, egy babszem, egy porszem, az alma héja, a papírlapra rajzolt írott L betű.

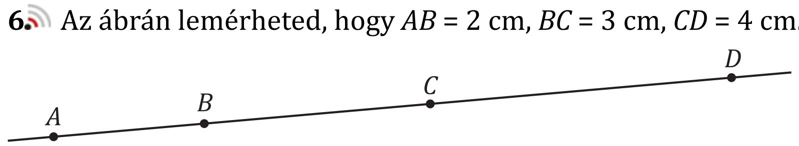
2. Rajzolj egy virágot a füzetedbe!
a) Rajzod csak görbe vonalakból álljon!
b) Rajzod csak egyenes vonalakból álljon!
c) Rajzod tartalmazzon egyenes és görbe vonalakat egyaránt!

3. Rajzolj öt pontot úgy, hogy
a) egy egyenesen legyenek;
b) semelyik három ne legyen egy egyenesen!

4. Sorolj fel olyan testeket, amelyeknek síklapjai és görbe lapjai is vannak!

5. Rajzoltunk a síkra három pontot: $PQ = 7$ cm, $QR = 4$ cm. Vitassátok meg, hogy mekkora lehet a PR szakasz hossza!

6. Az ábrán lemérheted, hogy $AB = 2$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 4$ cm.

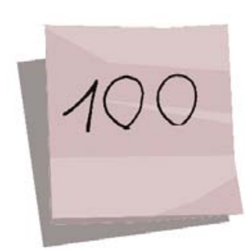


Rakd hosszuk szerinti növekedő sorrendbe a következő szakaszokat: AC, AB, CD, AD, BD, BC!

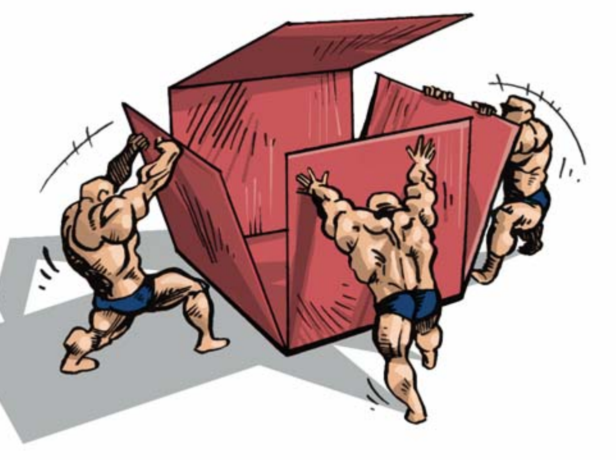
Mese

Rébusz bácsi egy írólapot mutatott a kisfiúnak. A papíron csak egy 100-as szám volt látható. Rébusz bácsi azt mondta, hogy ezt ő írta a lapra, és írás közben nem emelte fel a tollat. Vagyis egy vonallal megrajzolta az egészet. A kisfiú ezt hihetetlennek tartotta.

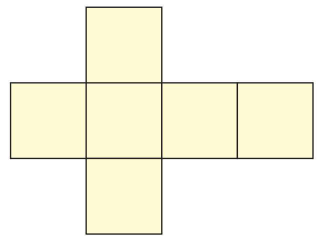
Pedig ez nem mese!!!

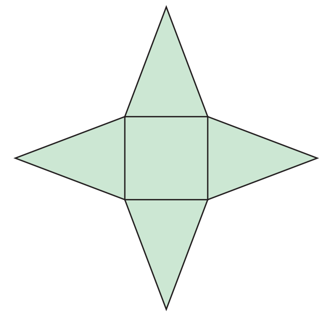


3. TESTEK ÉPÍTÉSE



Kartonlapokból kivághatjuk a test határoló felületét, és összeragaszthatjuk belőle a testet. Olyan testekre gondolunk, amelyeknek lapjai síkbeliek.

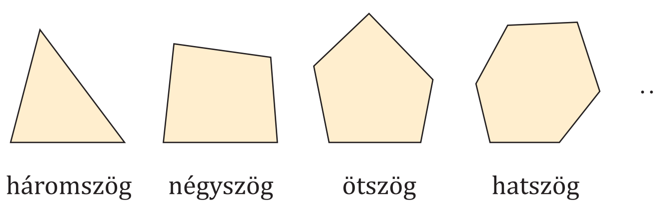


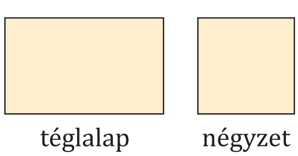


Ezek az ábrák egy-egy test hálózatát (hálóját) mutatják. Ha rajzlapra átmásolod és kivágod őket, akkor testeket ragaszthatsz össze belőlük. (Az illesztésnél használj ragasztószalagot!)

Szívószálakból, hurkapálcikákból, gyufaszálakból felépíthetjük a test élvázát. (Az élek rögzítéséhez használhatsz gyurmát.)

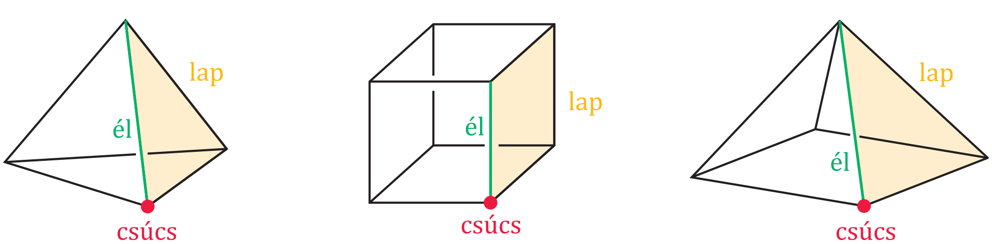
A testet határoló síklapokat a **test lapjai**nak nevezzük. Ezek a lapok lehetnek **háromszögek, négyszögek, ötszögek**, … .

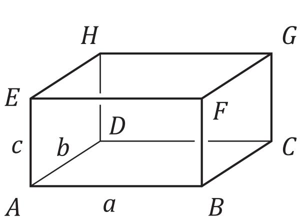




A négyszögek speciális fajtája a téglalap és a négyzet.

A test lapjainak metszésvonalát **él**nek, az élek metszéspontját **csúcs**nak nevezzük.

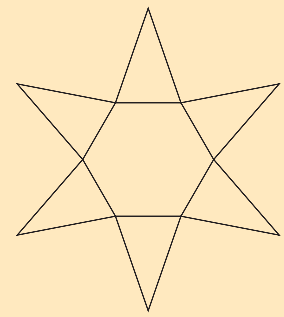




Az ábrán látható testeken színezéssel kiemeltünk egy-egy lapot, élt és csúcsot. A testek csúcsai pontok, ezért a testek csúcsait nagybetűkkel nevezzük el. A testek élei szakaszok, ezért a testek éleit a melléjük írt kisbetűvel vagy a végpontjaikhoz írt nagybetűkkel szoktuk elnevezni. Vagyis beszélhetünk *AB* élről, illetve *b* élről. A test lapjait is megfelelő nagybetűkkel tudjuk megadni: *ABCD* lap, *ADHE* lap.

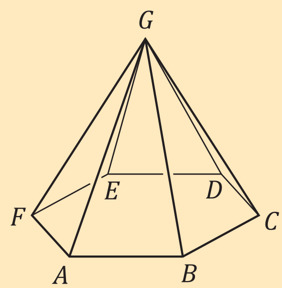
Példa

Rajzoljuk le annak a testnek az élvázát, amelyet a megadott hálóból lehet elkészíteni! Adjunk nevet a test csúcsainak! Sorojuk fel a test éleit, lapjait!



Megoldás

A test élváza a csúcsok elnevezésével:



A test élei:
AB, BC, CD, DE, EF, FA, AG, BG, CG, DG, EG, FG.

A test lapjai:
ABCDEF, ABG, BCG, CDG, DEG, EFG, FAG.

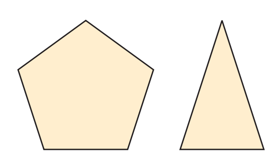
Feladatok

1. Készíts különböző testeket két egyforma gyufásdobozból! Két lap fedje egymást az összeillesztésnél! Hány különböző testet tudtál készíteni?

2. Rajzold le a füzetedbe a képen látható doboz élvázát, és nevezd el a csúcsokat!

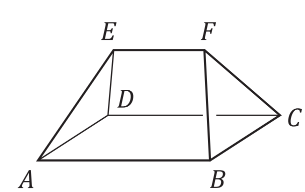
a) Sorold fel a test éleit! Használd a két nagybetűs megadási módot!
b) Sorold fel a test lapjait! Sorolj fel négy nagybetűt egy lap megadásakor!

3. Képzeld el azt a testet, amelyet az ábrán látható ötszögből és háromszögből készítenél! Rajzold le a test élvázát, ha egy darab ötszöget és öt darab háromszöget használnál fel!



4. Milyen test élvázát tudnád elkészíteni (összeragasztani) 12 darab gyufaszálból? Gondolkodj több megoldáson is!

5. Sorold fel az ábrán látható test éleit!



6. *a)* El tudsz képzelni olyan testet, amelyet négy síklap határol?
b) El tudsz képzelni olyan testet, amelyet három síklap határol?

7. Egyforma kockákból testeket építettünk. Ragasztás nélkül úgy helyeztük egymásra a kockákat, hogy teljes lapjukkal érintkezzenek egymáshoz. Az ábrák azt mutatják, hogy azon a helyen hány darab kockát tettünk egymásra. Rajzold le az építményeket szemből nézve!

1	2	3
1	1	2

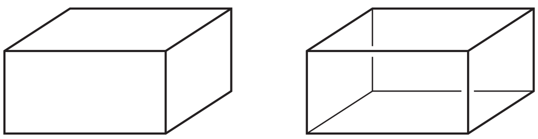
3	3	3
1	4	1

1	0	2
1	1	4

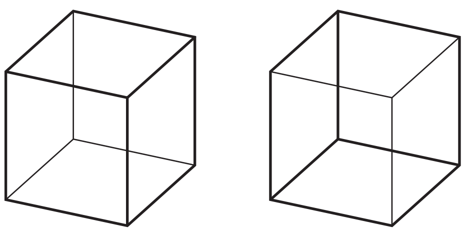
2	1	4
0	0	1

4. TESTEK SZEMLÉLTETÉSE

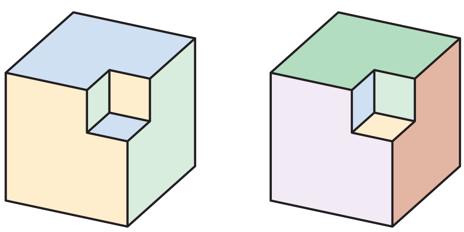
Papírból, szívószálból, dobozokból változatos testeket építhetünk. De hogyan tudnánk az alakjukat megörökíteni?
Megpróbálunk térbeli viszonyokat szemléltetni a füzetlapunkon. Vagyis síkban kell térbeli alakzatokat megjelenítenünk. A továbbiakban is így fogunk testeket ábrázolni.



Sokszor a nem látható éleket is jó lenne látni. Ezeket vékonyabb vagy szaggatott vonallal szoktuk megjeleníteni az ábráinkon.



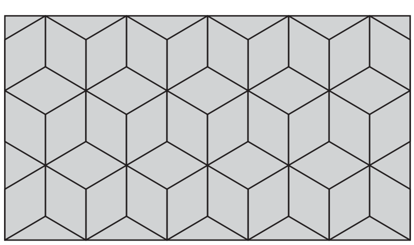
Megváltoztathatjuk a térbeli hatást a látható és a nem látható élek változtatásával.
Figyeld meg a következő ábrát!
Teljesen megegyező vonalakkal rajzoltunk két kockát, de a vonalak vastagsága nem egyezik a két ábrán.
Milyennek látod a két kockát?

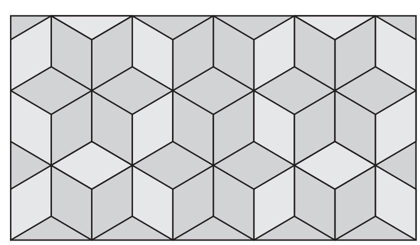


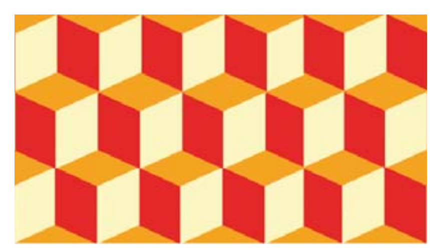
Megváltoztathatjuk a térbeli hatást színek segítségével is.

Ezeket a hatásokat alkalmazva szép és néha lehetetlennek tűnő, térhatású ábrákat kapunk. Mutatunk ilyeneket, de ti is tervezhetek hasonlóakat.

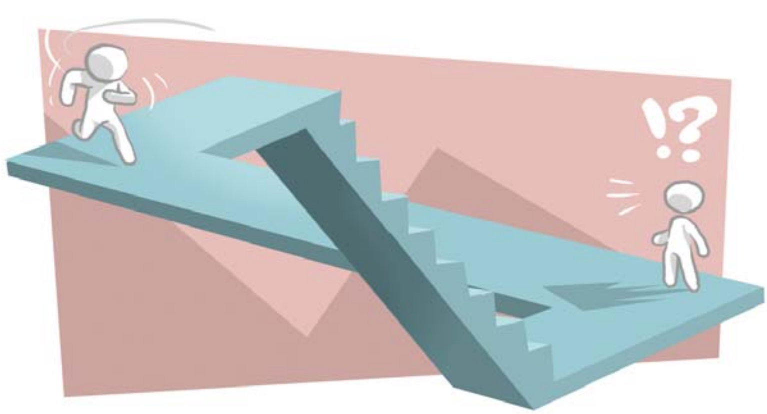
Első pillantásra hihetetlennek tűnik, hogy ugyanazt az ábrát látjuk háromszor. Csak a színezését változtattuk meg!

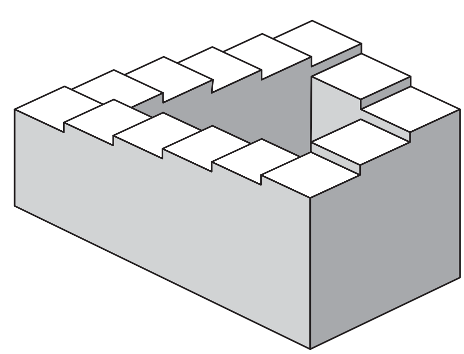




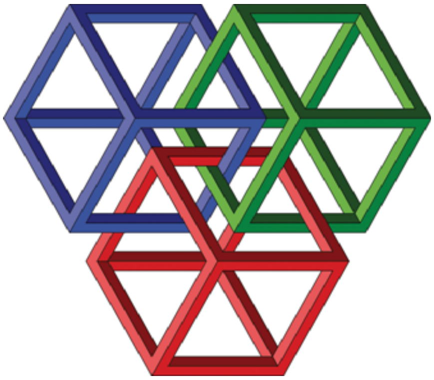


Ezen az ábrán egy lehetetlen lépcsőt látunk. Ha felmegyünk a lépcsőn, akkor nem jutottunk magasabbra.

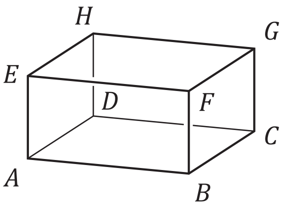




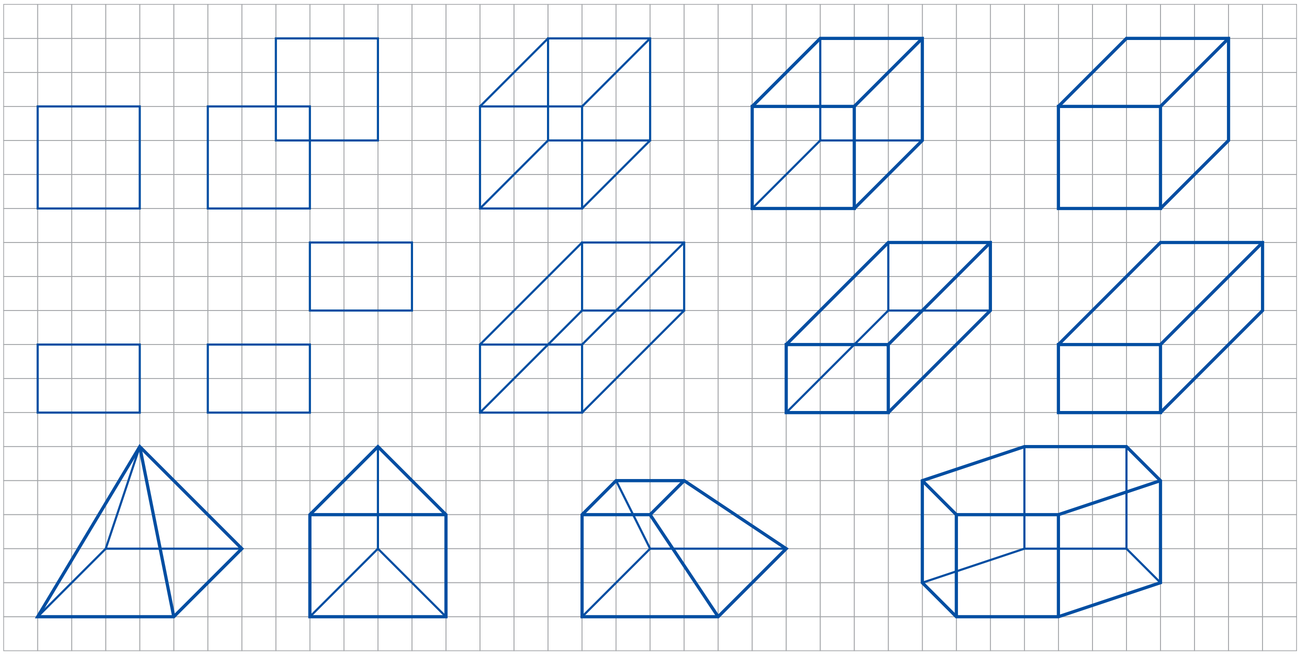
Térbeli formát mutat az itt látható rajz is. Ha jobban megnézzük, akkor megállapíthatjuk, hogy ez a forma ugyan térbelinek tűnik, de csak síkban létezik. Ezeket a lehetőségeket művészek is kihasználják és érdekes hatású képeket készítenek.



Hat téglalapból tudunk egy téglatestet építeni, de ha jobban megnézzük, az ábra nem tartalmaz egyetlen téglalapot sem. A fényképszerű ábrán torzulnak a formák. Mi mégis úgy gondoljuk, hogy hat téglalapot látunk.

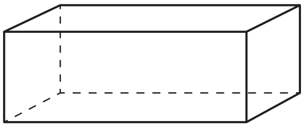


A négyzetháló sokat segít a testek szemléltetésében:



Próbáld meg lerajzolni ezeket a testeket a füzetedbe!

Feladatok



1. A képen látható testet másold le a füzetedbe, és illessz rá egy másik testet! A rajzod legyen olyan hatású, mintha egy házikót ábrázoltál volna! Tervezz ilyen módon többféle háztetőt! Rajzold be a nem látható éleket is!

2. Egy testnek 6 csúcsa van, és csak síklapok határolják. Rajzolj ilyet, ha tudsz, akkor többfélét is!

3. Egy testnek 9 éle van, és csak síklapok határolják. Rajzolj ilyet, ha tudsz, akkor többfélét is!

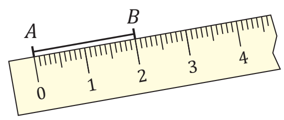
4. Egy testnek 10 lapja van, és csak síklapok határolják. Rajzolj ilyet, ha tudsz, akkor többfélét is!

5. Rajzolj két különböző testet, amelyeknek van egy-egy egyforma oldallapjuk! Az egyforma lapok mentén illeszd össze őket! Ábrázold a kapott testet!

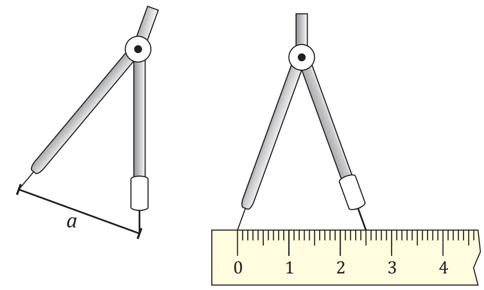
5. TESTEK GEOMETRIAI JELLEMZŐI

A síklapokkal határolt testeknek élei és csúcsai vannak. Mivel a testek élei szakaszok, ezért megmérhetjük a hosszúságukat.

A szakasz hosszát megmérhetjük közvetlenül vonalzóval vagy körző és vonalzó segítségével.

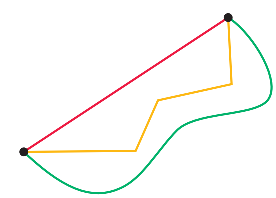


Mérés vonalzóval



Mérés körzővel és vonalzóval

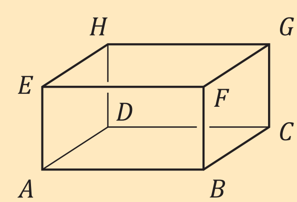
Az *AB* szakasz hossza 2 cm, az *a* szakasz hossza 25 mm.
Ezt röviden így írjuk: *AB* = 2 cm, *a* = 25 mm.
Az *AB*, illetve az *a* lehet a szakasz elnevezése, de jelölheti a szakasz hosszát is.
Két pontot különböző vonalakkal köthetünk össze.



Megállapíthatjuk, hogy a két pontot összekötő vonalak közül az egyenes szakasz a legrövidebb. Ezért azt mondjuk, hogy **két pont távolsága egyenlő az őket összekötő szakasz hosszával.**

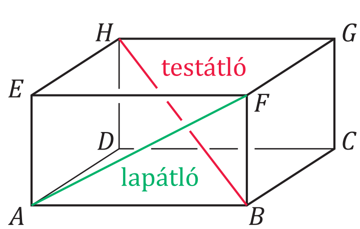
1. példa

Az ábrán látható *ABCDEFGH* test bármely két csúcsa lehet egy szakasz két végpontja. Soroljuk fel ezen szakaszok közül azokat, amelyek nem élei a testnek!



Megoldás

Az ábra jól mutatja, hogy az összekötött pontpárok a test élei, ezért azokat a párokat kell felsorolnunk, amelyek az ábrán nincsenek összekötve.
Ezek a következők: *AC, BD, EG, FH, AF, BE, DG, CH, BG, CF, AH, DE, AG, BH, CE, DF.*



Az előző példában felsorolt szakaszokat két csoportba oszthatjuk. Vannak közöttük olyanok, amelyek a test egy lapján találhatóak, és vannak olyanok, amelyek nem.

A lapra illeszkedő, nem szomszédos csúcsokat összekötő szakaszok neve **lapátló**. A lapra nem illeszkedő csúcsokat összekötő szakaszok neve **testátló**.

2. példa

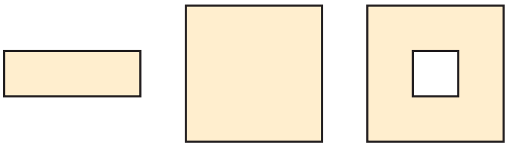
Az előző feladatban felsorolt szakaszokat csoportosítsuk aszerint, hogy testátlók vagy lapátlók-e!

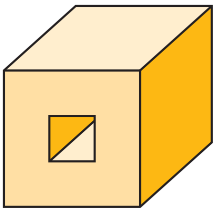
Megoldás

Lapátlók: *AC, BD, EG, FH, AF, BE, DG, CH, BG, CF, AH, DE.* Testátlók: *AG, BH, CE, DF.*

A testek élei, lapátlói, testátlói szakaszok, ezért beszélhetünk ezek hosszáról. Mondhatjuk, hogy például az *AB* él 12 cm, a *BG* lapátló 5 cm, az *AG* testátló 13 cm hosszú.

Nézzük az ábrán látható, síklapokkal határolt testet!
A jobbra lévő képen látható test határolólapjai: négy egyforma téglalap, négy egyforma négyzet és két egyforma lyukas négyzet.

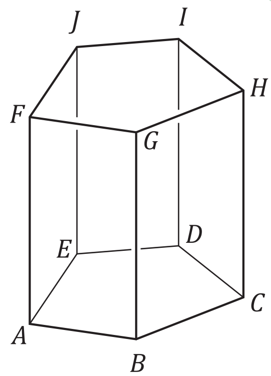




A lyukas négyzetet nem fogjuk négyzetnek nevezni. Mi a továbbiakban az ilyen lyukas sokszögekkel nem foglalkozunk.

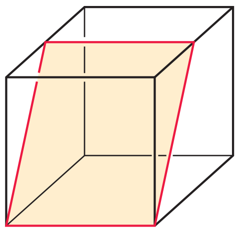
A körülöttünk lévő tárgyak olyan formákat is mutatnak, ahol a test felülete nem csupán síklapokból áll.
Egy golyónak nincs síklapja, egy konzervdobozt pedig nem csak síklapok határolnak.

Feladatok



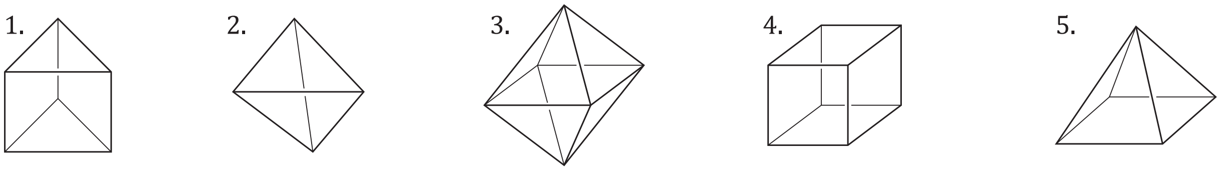
1. Adj meg néhány élt, lapátlót, testátlót a képen látható hétlapú testről!

2. Képzeld el, hogy egy kockát egyik éle és egyik lapjának felezővonala mentén, az ábrán látható módon szétvágsz! Hány csúcsa, éle, lapja lesz a keletkezett testeknek?



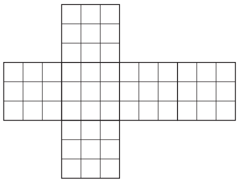
3. A következő állítások síklapokkal határolt testekre vonatkoznak. Döntsd el, hogy igazak-e ezek az állítások!
a) Van lapátlója.
b) Van testátlója.
c) Lehet, hogy lapátlója és testátlója sincs.
d) Ha van lapátlója, akkor testátlója is van.

4. Melyik mondatot tennéd a képen látható testekhez?

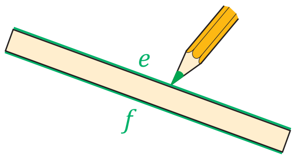


A) Van lapátlója, de nincs testátlója;
B) Nincs lapátlója, de van testátlója;
C) Nincs lapátlója, és nincs testátlója sem;
D) Van lapátlója, és van testátlója is.

5. Rajzolj a füzetedbe egy kockahálót, és minden lapját oszd fel $3 \cdot 3$ kisebb négyzetre! Színezd a 3-szor 3-as kocka hálózatát fekete-fehérre úgy, hogy összeillesztés után a kocka lapjai sakktáblaszerű színezésűek legyenek! A sarkokban mindenütt fekete szín legyen! (Egy kiskocka teljesen fehér vagy teljesen fekete.)
Ezt a nagy kockát 27 darab kiskockából megépíthetnéd.
a) Legkevesebb hány fekete kockára lenne szükséged?
b) Legfeljebb hány fekete kockád lehet?
c) Ha belül is ragaszkodsz a sakktáblaszerű illeszkedéshez, akkor hány darabra lesz szükséged a különféle színű kiskockákból?

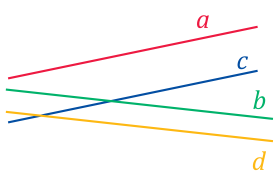


6. PÁRHUZAMOS EGYENESEK, MERŐLEGES EGYENESEK



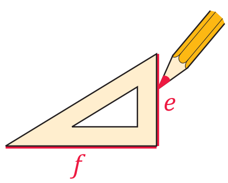
A párhuzamosság jele: $\parallel$.
Például: $e \parallel f$.

Vonalzó segítségével egyenest tudunk rajzolni. Ha az egyenes vonalzó mindkét oldala mentén rajzolunk egy-egy egyenest, akkor ezeknek az egyeneseknek nem lesz közös pontja. Azt mondjuk, hogy a lapunkra rajzolt két egyenes nem metszi egymást. A két egyenes **párhuzamos**.
Ha az a és a b egyenesnek pontosan egy közös pontja van, akkor nem párhuzamosak. Metszőnek nevezzük őket. Ezt így jelöljük: $a \nparallel b$.
A metsző egyenesek közös pontja a metszéspont.



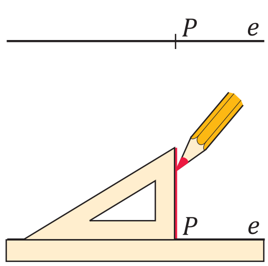
1. példa
Párosítsuk az ábrán látható egyeneseket, és döntsük el, hogy párhuzamosak vagy sem! Használjuk a matematikai jeleket!

Megoldás
Párhuzamos párok: $a \parallel c$, $b \parallel d$.
Nem párhuzamos párok: $a \nparallel b$, $a \nparallel d$, $c \nparallel b$, $c \nparallel d$.



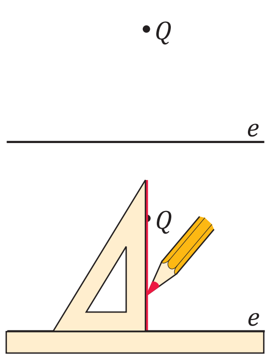
A merőlegesség jele: $\perp$.
Például: $e \perp f$.

A derékszögűnek nevezett vonalzó két rövidebb oldala mellett is rajzolhatunk egyeneseket. Ezek az egyenesek metszik egymást. Az így rajzolt – nagyon egyedi helyzetben lévő – két egyenes **merőleges** egymásra.



2. példa
Rajzolj a füzetedbe egy e egyenest és rá egy P pontot! Vonalzóink segítségével rajzoljunk a P ponton át egy az e egyenesre merőleges f egyenest!

Megoldás
Használjuk az egyenes- és a háromszögvonalzónkat!
Az egyenesvonalzót illesszük az egyenesre, majd a háromszögvonalzó egyik oldalát (nem a leghosszabbat) illesszük az egyenesvonalzóhoz! Ekkor az ábra szerint megrajzolhatjuk a merőleges egyenest.



3. példa
Vegyünk fel a füzetünkben egy e egyenest és rajta kívül egy Q pontot! Ebből a pontból állítsunk egy merőleges f egyenest az e-re!

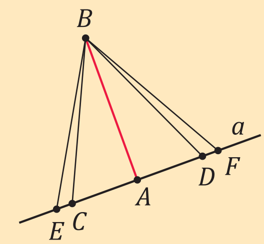
Megoldás
Használjuk az egyenes- és a háromszögvonalzónkat!
Az egyenesvonalzót illesszük az e egyenesre! A háromszögvonalzó egyik rövid oldalát illesszük az egyenesvonalzóhoz, és csúsztassuk a Q ponthoz az ábrán látható módon! Végül rajzoljuk meg a merőleges egyenest!

A mindennapi életben a **vízszintes** és a **függőleges** irány megállapítása nagyon fontos. Építkezésnél a kőműves vízmértéket használ a vízszintes és a függőleges meghatározására, és függőónt a függőleges megállapítására. (Ma már lézeres szintezőket is használnak.)

A vízszintes és a függőleges egyenesek is merőlegesek egymásra.

4. példa

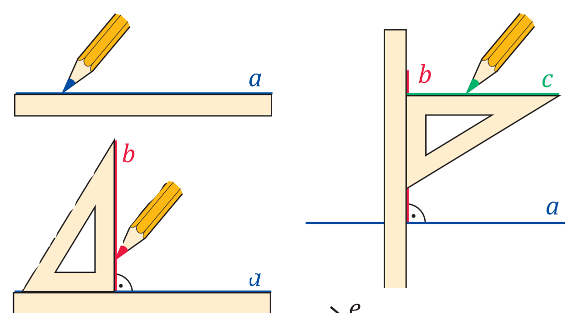
Vegyünk fel a rajzunk síkjában egy a egyenest és egy rá nem illeszkedő B pontot! Rajzoljuk meg a B pontból az egyenesre állított merőleges szakaszt! Ennek a szakasznak az a egyenesre eső végpontja legyen az A pont! Válasszunk az a egyenesen néhány további pontot, és ezeket is kössük össze a B ponttal! Az így rajzolt szakaszok közül melyik a legrövidebb?



Megoldás

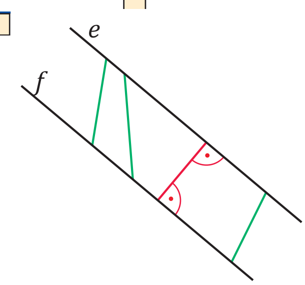
Megmérjük a szakaszok hosszát: $AB = 2$ cm, $CB = DB = 2{,}2$ cm, $EB = FB = 2{,}3$ cm. Méréseink azt sejtetik, hogy a merőleges szakasz hossza a legrövidebb. Ez a megállapításunk igazolható, de mi most csak elfogadjuk a tapasztalataink alapján.

Ezt a legrövidebb távolságot nevezzük a **pont és az egyenes távolságának.**
Azt mondhatjuk, hogy **pont és egyenes távolsága egyenlő a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz hosszával.**
A háromszögvonalzót az egyenesvonalzó mellett csúsztatva **párhuzamos egyenesek**et tudunk rajzolni.



Rajzoljunk egy a egyenest!
Állítsunk rá egy b merőleges egyenest! A rajzon ezt így jelöljük: ⊾.
A b egyenesre ismét állítsunk egy merőleges c egyenest!

Figyeljük meg! Az a és a c egyenes párhuzamos lesz egymással.
Méréssel meggyőződhetünk arról, hogy a párhuzamos egyenesek közötti szakaszok közül a merőlegesek a legrövidebbek!
Az ábrán a piros szakasz végeinél megfigyelhetjük a merőlegesség jelölését.
A két párhuzamos egyenes között a merőleges szakaszokat bárhol rajzoljuk, mindenütt egyenlő hosszúak lesznek. Ezek a hosszát nevezzük a **párhuzamos egyenesek távolságá**nak.



Feladatok

1. Rajzolj olyan nyomtatott nagybetűket, amelyben
a) vannak párhuzamos szakaszok, de nincsenek merőlegesek;
b) vannak merőleges szakaszok, de nincsenek párhuzamosak;
c) párhuzamos és merőleges szakaszok is vannak!

3. Rajzolj egy egyenest! Képzeld el az összes pontot, amely ettől az egyenestől 2 cm-re található! Mit alkotnak ezek a pontok?

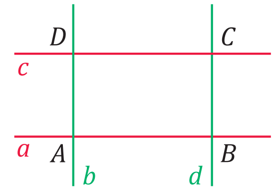
4. Rajzolj négy párhuzamos egyenest! Használj két megfelelő vonalzót! Milyen távol van egymástól a két szélső egyenes?

5. Rajzolj három egyenest a füzetedbe úgy, hogy bármelyik kettő
a) párhuzamos; *b)* merőleges legyen!
Mindkét ábrát el tudod készíteni?

7. TÉGLALAP, NÉGYZET

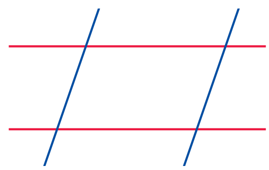
A címben szereplő síkidomok nem ismeretlenek a számodra. Negyedikben is találkoztunk ezzel a két speciális négyszöggel. Most vizsgáljuk meg ezeket egy kicsit alaposabban!

Az ábrán az a és c piros egyenesek, valamint a b és d zöld egyenesek **párhuzamos**ak egymással. Ezt röviden így írjuk: $a \parallel c$, $b \parallel d$.

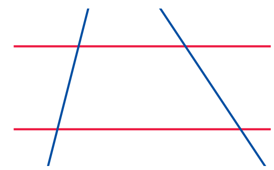


Bármelyik piros és zöld egyenest választjuk, azok metszik egymást. Így négy metszéspontot kapunk: A, B, C és D.
Ezek a pontok **téglalap**ot alkotnak, mert az ábránkon a piros és a zöld egyenesek **merőleges**ek egymásra. Írásban ezt röviden így jelöljük: $a \perp b$, $a \perp d$, $b \perp c$, $d \perp c$.

Metsszük el a két piros párhuzamos egyenest másik két egyenessel!

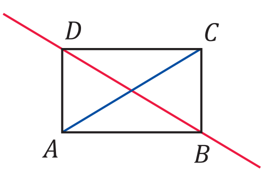


Ezek lehetnek párhuzamosak egymással.



De lehet, hogy nem párhuzamosak.

A piros egyenesekre nem merőlegesen rajzoltuk a kék egyeneseket. Az így kapott négy-négy metszéspont nem téglalapot határoz meg. Az első esetben **paralelogrammát**, a második esetben **trapézt** kaptunk.
A környezetünkben nagyon sok helyen látunk téglalapot. Általában téglalap alakúak a könyvek lapjai, az ajtók, az ablakok stb.



A téglalap szemközti csúcsait **átló**k kötik össze.
Az átlóról beszélhetünk mint szakaszról, és beszélhetünk mint egyenesről: AC átló (szakasz), BD átló (egyenes). A szövegből általában eldönthető, hogy egyenesként vagy szakaszként gondoljunk-e rá.

1. példa

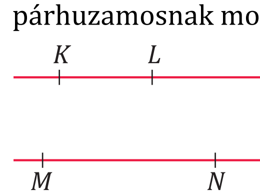
Milyen jelentése van az átló szónak a következő mondatokban?
a) Az AC átló 3 cm hosszú.
b) Az AC átló párhuzamos az e egyenessel.
c) Az AC átló a téglalap síkját két félsíkra vágja.

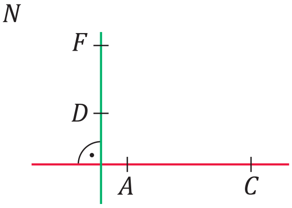
Megoldás

a) Ebben a mondatban az átló szakaszt jelent.
b) Ebben a mondatban az átló jelenthet szakaszt és egyenest is.
c) Ebben a mondatban az átló egyenest jelent.

Beszéltünk két egyenes párhuzamosságáról, illetve két egyenes merőlegességéről.

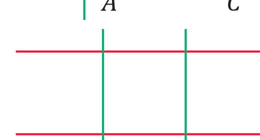
Ha két párhuzamos egyenesről választunk egy-egy szakaszt, akkor azokat is párhuzamosnak mondjuk: $KL \parallel MN$.





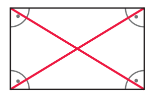
Ha két merőleges egyenesről választunk egy-egy szakaszt, akkor azokat is merőlegesnek mondjuk: $AC \perp DF$.

Rajzoljunk olyan téglalapot, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú!
Ezt a téglalapot **négyzet**nek nevezzük.
Négyzeteket láthatunk például a matematikafüzet lapjain vagy a dobókockán.



Gyűjtsük össze a **téglalap tulajdonságait**!

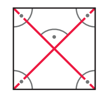
A téglalapot négy szakasz határolja, vagyis négy oldala van.
A téglalapnak négy csúcsa van.
A szemközti oldalai (oldalegyenesei) párhuzamosak.
A szomszédos oldalak (oldalegyenesek) merőlegesek egymásra.
A szemben fekvő oldalak hossza egyenlő.
A két átló (szakasz) hossza egyenlő.
A két átló (szakasz) felezi egymást.



Gyűjtsük össze a **négyzet tulajdonságait**!

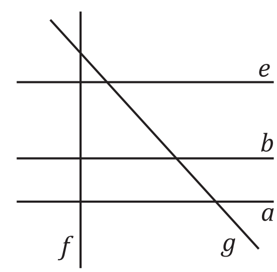
A téglalap minden tulajdonsága a négyzetnek is tulajdonsága, hiszen a négyzetek is téglalapok. Gyűjtsük össze a **négyzet további tulajdonságait**!

A négy oldala azonos hosszúságú.
A két átlója merőleges egymásra.

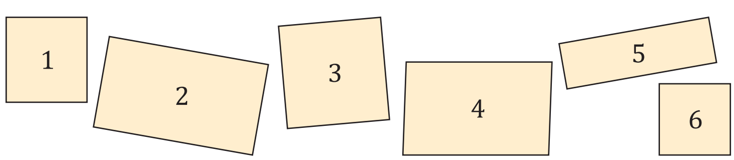


Feladatok

1. Keress párhuzamos és merőleges egyenespárokat az ábrán! A leírásnál használd a matematikai jelöléseket!

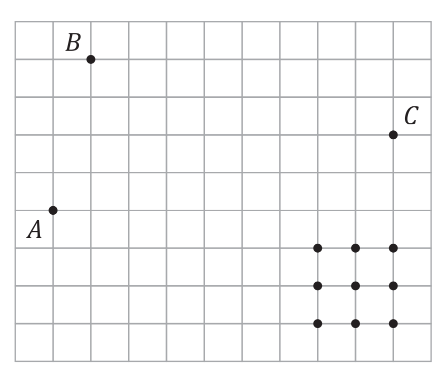


2. Igazak-e a következő állítások?
a) Minden négyzet téglalap.
b) Van olyan téglalap, amelyik négyzet.
c) Ha egy négyszög négyzet, akkor téglalap is.
d) Ha egy négyszög téglalap, akkor négyzet is.

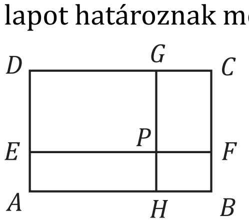


3. Döntsd el, hogy az ábrán látható síkidomok közül melyik négyzet! Használd a vonalzódat!

4. A négyzetrácson látható *A*, *B* és *C* pontokhoz melyiket válasszuk negyediknek, hogy egy téglalapot kapjunk?



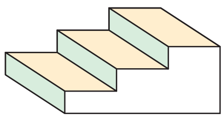
5. Keress az ábrán olyan pontnégyeseket, amelyek téglalapot határoznak meg!



6. A Százholdas Pagonyban Róbert Gida háza, a Méhecskék fája, Nyuszi háza, valamint Bagoly háza egy téglalap négy csúcsában helyezkedik el. A Méhecskék fájától délre haladva eljutunk Bagoly házához. Róbert Gida háza Nyuszi házától van a legtávolabb és a Méhecskék fájához van a legközelebb. Rajzolj egy lehetséges térképvázlatot!

7. Nézz utána, hogy néz ki egy teniszpálya, majd rajzolj egy ezt szemléltető ábrát a füzetedbe! Hány téglalapra vágják a vonalak a pályát?

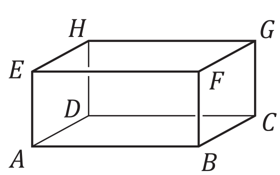
8. PÁRHUZAMOS ÉS MERŐLEGES SÍKOK



A lépcső felső, vízszintes lapjait és függőleges oldallapjait azonos színűre festettük. Az azonos színű lapokat párhuzamosnak, a különböző színűeket pedig merőlegesnek mondjuk.
Az azonos színű lapokra illeszkedő síkokat is párhuzamosnak mondjuk, a különböző színű lapokra illeszkedő síkokat pedig merőlegesnek.

Csoportmunka

Dolgozzatok párosával! Keressetek a tanteremben párhuzamos és merőleges síkokat! Az egész osztályban egyszerre kezdődik a munka. A példákat 1 perc alatt kell feljegyeznetek a füzetetekbe. Az idő leteltekor az első páros felolvassa, hogy miket gyűjtött. Amit többen is feljegyeztek, azokat a példákat mindenki aláhúzza a füzetében. Tovább folytatva a felolvasást eljutunk odáig, hogy már nincs mit megjelölni. Akiknek ekkor a legtöbb nem aláhúzott példájuk van, azok a játék győztesei.

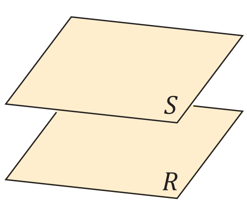


Példa

Az ábra egy dobozt szemléltet. Adjunk meg párhuzamos és merőleges lapokat!

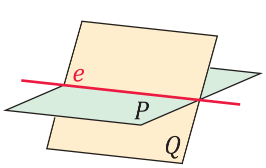
Megoldás

Az *ABCD* lap párhuzamos az *EFGH* lappal. $ABCD \parallel EFGH$.
A *BCGF* lap párhuzamos az *ADHE* lappal. $BCGF \parallel ADHE$.
Az *ABFE* lap párhuzamos az *DCGH* lappal. $ABFE \parallel DCGH$.
Az *ABCD* lapra merőleges az *ABFE*, a *BCGF*, a *CDHG* és a *DAEH* lap.
Az *EFGH* lapra merőleges az *ABFE*, a *BCGF*, a *CDHG* és a *DAEH* lap.
Ezeket röviden így írhatjuk: $ABCD \perp ABFE$, $ABCD \perp BCGF$, …



A síkokat nagybetűvel jelöljük. A szöveg és a szemléltető ábrák miatt nem fogjuk összekeverni a pontokkal.

Ha két különböző síknak nincs közös pontja, akkor párhuzamosak.
A képen: $S \parallel R$.



Ha két különböző síknak van közös pontja, akkor végtelen sok van, és ezek egy egyenest alkotnak. Ezt az egyenest metszésvonalnak nevezzük.

A képen: *Q* és *P* síkok metszik egymást, a metszésvonaluk az *e* egyenes.

Feladatok

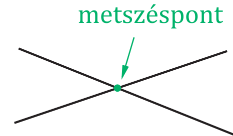
1. Hány párhuzamos és hány merőleges lappárja van a téglatest alakú tanteremnek?
2. Hol láttál az otthonod és az iskola között párhuzamos síkokat?
3. Keress a lakásotokban merőleges síkokat!
4. Egy almát két merőleges sík mentén egyforma darabokra vágtunk. Hány rész keletkezett?
5. A szalámidarabot 10 párhuzamos sík mentén feldaraboltuk. Hány részre vágtuk összesen?

Csoportmunka

Egy írólapot hajtsatok ketté, de a hajtásvonal ne legyen párhuzamos az írólap széleivel! Hajtsatok még egy hajtásvonalat a papírra! Figyeljétek meg, hogy milyen helyzetű lehet a két hajtásvonal!
Beszéljétek meg, hogyan lehetne segédeszközök nélkül ilyen módon párhuzamos egyeneseket, merőleges egyeneseket hajtogatni!
Készítsétek is el ezeket a hajtogatásokat!

Ha a második hajtást úgy végezzük el, hogy az előző hajtásvonalat önmagával fedésbe hozzuk, akkor két merőleges egyenest kapunk. Ezt megismételve az első és a harmadik hajtásvonal párhuzamos lesz egymással.
A papírunkon két egyenes vagy párhuzamos, vagy metsző.

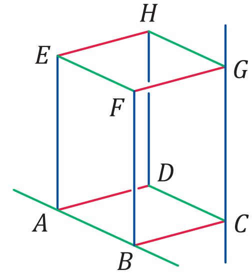
Ha a két különböző egyenes párhuzamos, akkor nincs közös pontjuk.

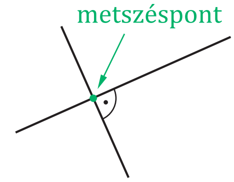


metsző egyenespár

A metsző egyeneseknek egy közös pontjuk van. Ezt metszéspontnak nevezzük. A testek építésekor láthattunk olyan élvázakat, amelyeken párhuzamos és merőleges élpárokat is megfigyelhettünk.

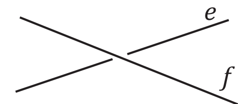
Ezen az ábrán az egymással párhuzamos éleket azonos színnel színeztük. Az egy csúcsból kiinduló különböző színű szomszédos élek pedig egymásra merőlegesek.
Vannak az ábrán különböző színű, de nem szomszédos élek is. Ezeket az éleket is merőlegesnek mondjuk, de a rájuk illesztett egyenesek nem metszők. Nincs közös pontjuk, de nem is párhuzamosak. Ilyenek például az AB és a CG egyenesek.





merőlegesen metsző egyenespár

Ha két egyenes nem metsző és nem is párhuzamos, akkor kitérő.



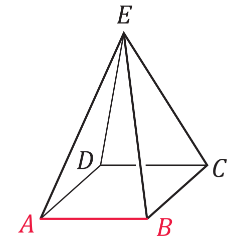
Az e és f egyenesek kitérőek. A rajz mutatja, hogy ezt hogyan tudjuk érzékeltetni. A párhuzamos és a metsző egyenespárok egy síkba esnek. A kitérő egyenesek nem esnek egy síkba.

Összegezzük a megállapításainkat!

Két különböző egyenes lehet: **párhuzamos**, **metsző** vagy **kitérő**.
Két különböző egyenes párhuzamos, ha egy közös síkra illeszkednek és nincs közös pontjuk.
Két különböző egyenes metsző, ha van közös pontjuk.
Két egyenes kitérő, ha nem párhuzamosak és nem metszők.

9. KITÉRŐ EGYENESEK

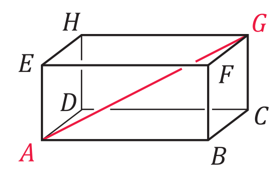
Feladatok



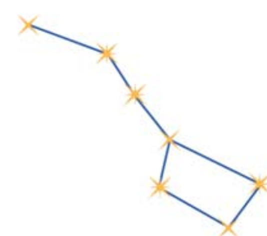
1. Keress a környezetedben különböző helyzetű egyenespárokat!

2. Hány kitérő élt találsz a képen látható test *AB* éléhez?

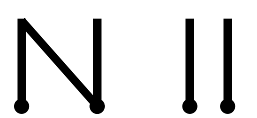
3. A levegőben a repülőgépek mögött gyakran láthatsz úgynevezett kondenzcsíkot. Milyen helyzetű lehet az a két kondenzcsík, ami metszőnek látszik?



4. A képen látható test egyik testátlója az *AG* egyenes.
a) Add meg az *AG* testátlóhoz kitérő éleket!
b) Add meg az *AG* testátlóhoz kitérő lapátlókat!
c) Van-e az *AG* testátlóval párhuzamos éle, lapátlója a testnek?

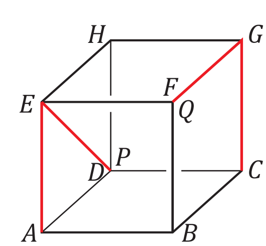


5. A Göncölszekért alkotó hét fő csillagot az ábrán látható módon szokták összekötni. Képzeld el az ábra négyszögének két átlóját is! Milyen helyzetűek lehetnek ezek az egyenesek valójában?



6. Nikolett három gombóc gyurmát tett az asztalra és mindháromba beleszúrt egy-egy pálcát. Az így kialakított térbeli alkotásról két képet készített. Az egyiken a neve kezdőbetűje látható, a másikon három párhuzamos szakasz.
Milyen helyzetűek valójában ezek a pálcák?
Készítsd el te is ezt a térbeli ábrát!

7. Egy 2 méter oldalhosszúságú négyzet mindegyik csúcsában áll egy-egy oszlop. Két szemközti oszlop magassága egyenlő, mindkettő 4 méter magas. A másik két szemközti oszlop 1 méter, illetve 5 méter magas. A két-két szemközti oszlop teteje között kifeszítettek egy-egy kötelet.
a) Milyen helyzetű ez a két kötél?
b) Rajzold le felülről és oldalról a négy oszlopot és a két kifeszített kötelet!



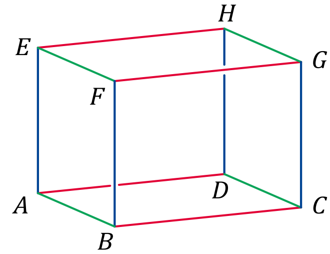
8. Az *ABCDEFGH* kocka élvázán beszíneztünk néhány szakaszt. Az *AE* és a *CG* a kocka egy-egy éle. A beszínezett *EP* a látszat ellenére nem lapátló, mert a *P* pont az *ABFE* lap középpontja. A szintén beszínezett *GQ* pedig nem éle a kockának, mert a *Q* pont a *CDHG* lap középpontja.
a) Rajzold le a színes szakaszokat, ha a kockát elölről, oldalról, felülről nézed!
b) Milyen helyzetű az *AE* szakaszhoz az *EP*, *GQ*, *CG*?

10. TÉGLATEST, KOCKA

A környezetünkben rengeteg olyan tárgy, doboz található, amelyeknek alakja a téglára emlékeztet minket.

A geometriában ezt a formát **téglatest**nek nevezzük.
A téglatestet **hat téglalap** határolja. **Tizenkét él**e és **nyolc csúcs**a van.
Az azonos színnel jelölt élek egyenlő hosszúságúak és párhuzamosak is.

$AB = DC = HG = EF$ és $AB \parallel DC \parallel HG \parallel EF$.
$AD = BC = FG = EH$ és $AD \parallel BC \parallel FG \parallel EH$.
$AE = BF = CG = DH$ és $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$.

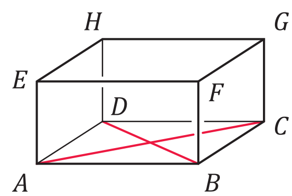


Az egy csúcsból induló élek merőlegesek egymásra.

Például: $AB \perp AD$, $AB \perp AE$, $AD \perp AE$.

Rajzoljunk körül egy téglatest alakú doboz két szemben lévő lapját. Vágjuk ki ezt a két téglalapot és helyezzük egymásra! Ha pontosan dolgoztál, akkor a két lap kölcsönösen fedi egymást.

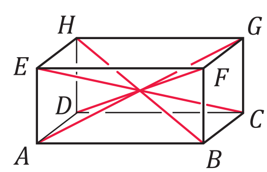
Ezen tapasztalat szerint a téglatest szemközti lapjait **egybevágó**nak mondjuk.



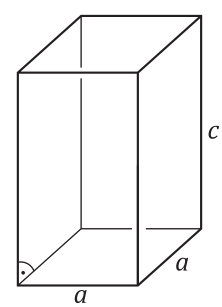
A téglatest minden lapjához két lapátló tartozik.

Például az $ABCD$ laphoz a lapátlók az AC és a BD.

A téglatestnek négy testátlója van: AG, BH, CE és DF.



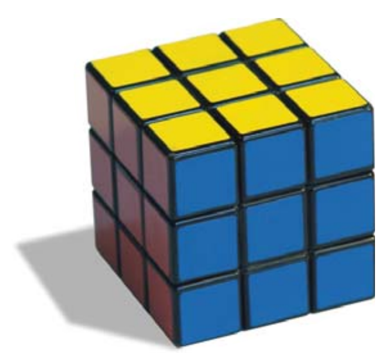
A lapátlókról és a testátlókról beszélhetünk mint szakaszról, és beszélhetünk mint egyenesről.



Az olyan téglatestet, amelynek két szemközti oldallapja egybevágó négyzet, **négyzetes oszlop**nak nevezzük.

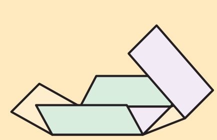
Az olyan téglatestet, amelynek minden oldallapja egybevágó négyzet, **kocká**nak nevezzük.

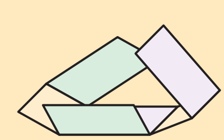
Kocka alakú például a dobókocka, a Rubik-kocka, de lehet kocka alakú egy sütemény is.



1. példa

Egy téglatest alakú papírdobozt bontsunk szét a ragasztások mentén! Vágjuk le a ragasztási felületeket! Rajzoljuk le az így kapott síkidomot! Nézzük meg milyen téglalapokból áll!

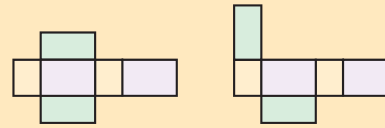




10. TÉGLATEST, KOCKA

Megoldás

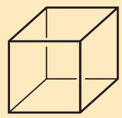
Kétféle szétvágást és a hozzá tartozó kiterítést mutatja az ábra. Az így kiterített síkidomot nevezzük a **téglatest hálózat**ának (hálójának).



A hálózat hat téglalapja közül kettő-kettő egybevágó, ezeket azonos színnel festettük be.

2. példa

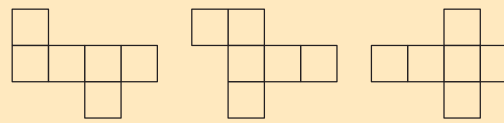
Készítsük el egy kocka hálózatát!



Megoldás

A téglatesthez hasonlóan járhatunk el, de most minden lap négyzet.

Megadtuk a kocka néhány hálózatát. A füzetedben gyűjtsd össze az összes lehetséges hálózatot!



Feladatok

1. Hány lapátlója van egy téglatestnek? Nevezd el a csúcsokat, és sorold fel a lapátlókat!

2. Hány egyenest határoz meg a téglatest 8 csúcsa?

3. Igazak-e a következő állítások?

a) Van olyan téglatest, amelyik kocka. *b)* Minden kocka téglatest.

c) Ha egy téglatestnek van három négyzetlapja, akkor az kocka.

d) Ha egy téglatestnek van két négyzetlapja, akkor az kocka.

e) Egy téglatestnek nem lehet pontosan négy lapja négyzet.

4. Színezd ki egy téglatest csúcsait úgy, hogy minden élnek különböző színű legyen a két vége! Törekedj arra, hogy kevés színt használj! Hány színnel sikerült megoldanod a színezést?

5. Hány különböző alakú tömör téglatest építhető 6 darab egyforma kockából?

6. Rajzold le annak a téglatestnek a hálózatát, amely két 2 cm-es élű kockára vágható szét!

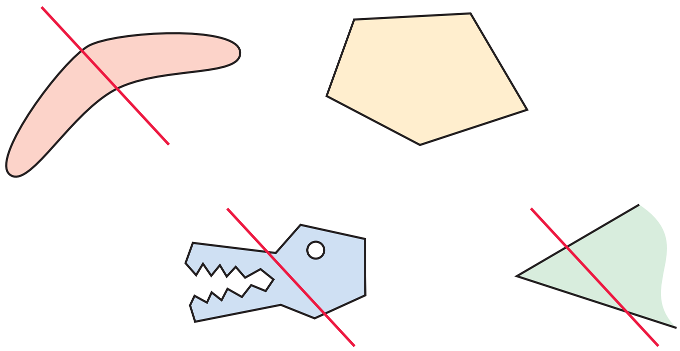
7. Az asztalon lévő téglatest alakú dobozoknak összeszámoltuk az éleit és a csúcsait. Ezek száma összesen 120. Hány doboz van az asztalon?

Kutatómunka

Gyűjts olyan szólásokat, szófordulatokat, amelyben a kocka szó szerepel!
Írj egy rövid ismertetőt a Rubik-kockáról!

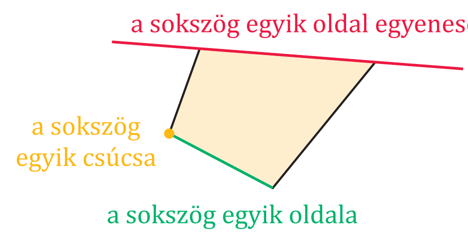
SÍKIDOMOK, SOKSZÖGEK 11.

A síkot gyakran egy papírlappal szemléltetjük. Ha ezt a szemléletet meg akarjuk őrizni, akkor azt mondhatjuk, hogy a papírlapra rajzolt alakzatot **síkidom**nak nevezzük.

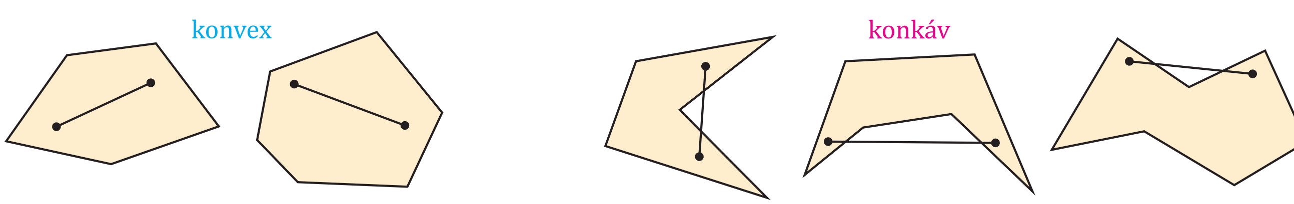


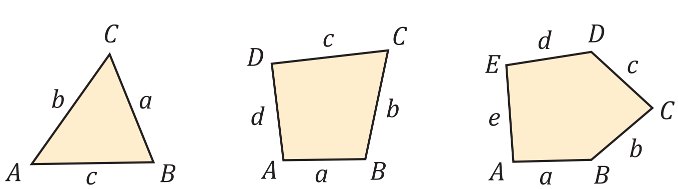
Vannak olyan síkidomok, amelyek nem férnek el egy lapon. Az ilyen végtelen nagy síkidomokat csak szemléltetni tudjuk. Síkidomok között nagyon bonyolultak is lehetnek, ezért mi csak az egyetlen, önmagát nem metsző, zárt vonallal határolt síkrészt gondoljuk síkidomnak.

Sokszögeknek nevezzük azokat a síkidomokat, amelyeknek a határvonala csak szakaszokból áll. Ezek a szakaszok a **sokszög oldalai**, a szakaszok végpontjai pedig a **sokszög csúcsai**.

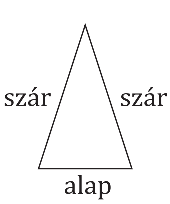


A síkidomok két tetszőleges pontját összeköthetjük egy szakasszal. Figyeld meg az ábrákat! A bal oldalon olyan síkidomokat látunk, amelyek bármely két pontját összekötő szakasz nem lép ki a síkidomból. Az ilyen síkidomokat **konvexnek** nevezzük. A jobb oldalon látható síkidomok esetén van olyan összekötő szakasz, amelyik kilép a síkidomból. Az ilyen síkidomokat **konkáv**nak nevezzük.

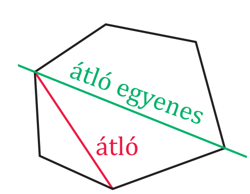




A sokszögek csúcsainak száma alapján **háromszög**ről, **négyszög**ről, **ötszög**ről ... beszélünk. Az ábrákon a sokszögek csúcsainak és oldalainak a szokásos elnevezését mutatjuk. A téglalap és négyzet is négyszög.

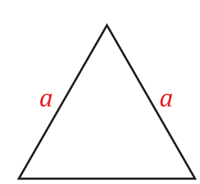


A testek lapjainak vizsgálatakor már beszéltünk átlókról.



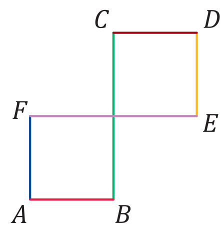
Vannak olyan háromszögek, amelyeknek két oldala egyenlő hosszú. Ezt a két egyenlő hosszúságú oldalt szárnak, a harmadik oldalt pedig alapnak nevezzük. Ezek az **egyenlő szárú háromszög**ek.

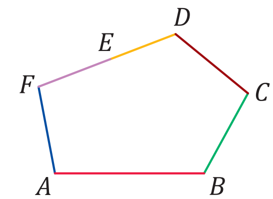
Ha az egyenlő szárú háromszög alapjának hossza egyenlő a szár hosszával, akkor mindhárom oldala egyenlő. Ebben az esetben **egyenlő oldalú háromszög**ről vagy más néven **szabályos háromszög**ről beszélünk.

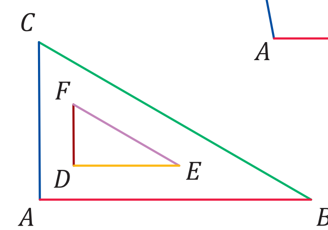


11. SÍKIDOMOK, SOKSZÖGEK

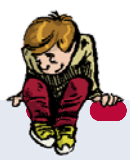
Mindhárom ábrán hat színes szakaszt jelöltünk. Ilyen értelemben mondhatnánk, hogy mindhárom ábrán *ABCDEF* hatszöget látunk. Mi az ilyen esetekkel nem fogunk foglalkozni.







A sokszögre úgy gondolunk, hogy
– az oldalai nem metszik egymást;
– a határoló töröttvonala mentén vissza lehet jutni a kiinduló csúcsba;
– nincsenek egy egyenesre illeszkedő szomszédos oldalai.



Játék

Vágjatok ki egy tetszőleges háromszöget egy papírlapból! Ezt három egyenes mentén vágjátok szét sok részre! Az így kapott sokszögeket adjátok át a padtársatoknak! Egyszerre kezdve rakjátok ki az eredeti háromszöget!
Egyszerűbb a játék, ha olyan papírt használtok, amelynek a két oldala nem egyforma színű!

Feladatok

1. Rajzolj konvex négyszöget, ötszöget, hatszöget!

2. Rajzolj konkáv négyszöget, ötszöget, hatszöget!

3. Melyik az a sokszög, amelynek nincs konvex és konkáv változata?

4. Melyik az a sokszög, amelynek nincs átlója?

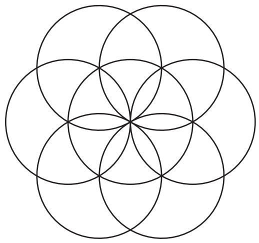
5. Rajzolj olyan négyszögeket, amelyeknek pontosan két egyenlő hosszú oldala van, és azok
a) szomszédosak; *b)* szemköztiek!

6. Rajzolj olyan négyszögeket, amelyeknek pontosan két szomszédos oldaluk merőleges egymásra!

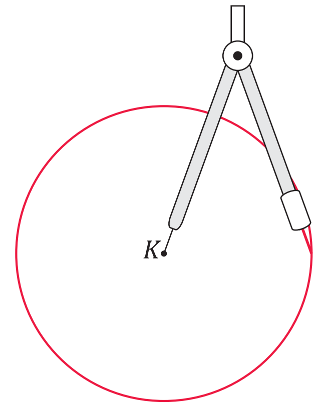
7. Rajzolj olyan sokszögeket, amelyeknek csak két szomszédos oldala merőleges egymásra!

8. Rajzolj olyan négyszöget, amelynek két szemközti oldala merőleges egymásra!

9. A konvex nyolcszög egy csúcsából megrajzoltunk két átlót. Milyen sokszögekre oszthatja a két átló a nyolcszöget?



Rajzold le a körződdel az alábbi alakzatot! Ha nagyobbat rajzolsz, sokkal könnyebb lesz! Találjatok ki ti is hasonlókat!



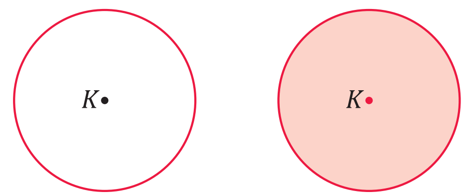
Jelölj ki egy pontot a ceruzáddal! Nyisd ki a körződet, és szúrd bele ebbe a pontba! Rajzolj egy kört! Az így kapott vonal minden pontja ugyanolyan messze van az előre kijelölt ponttól.

A **körvonal**at azok a síkbeli pontok alkotják, amelyek a sík egy adott pontjától ugyanakkora távolságra vannak.

Az adott pont a kör **középpont**ja. Ezt az ábrán *K*-val jelöltük.

A középpont és a körvonal egy pontjának távolsága a **sugár**. Jelölésére leggyakrabban az *r* betűt használjuk, mert az a radius szó első betűje.

Megkülönböztetjük egymástól a **körvonalat** és a **körlapot**.



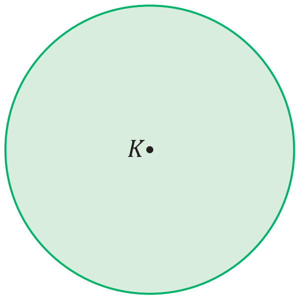
körvonal körlap

1. példa

Egy rádióadóról a következőt olvashatjuk a világhálón: *Eger és környékének teljes területén hallgatható. Eger 25 kilométeres sugarú környezetében sztereó, 35 kilométeres környezetben pedig mono minőségben fogható*. A mellékelt térképen jelöljük be ezeket a részeket!
Hallgatható-e ez a rádió a következő településeken: Füzesabony, Mezőkövesd, Ózd, Putnok?
Ha igen, akkor milyen minőségben?

Megoldás

A térképvázlaton látható a 25 km-es és a 35 km-es sugarú körvonal. Az így elkészített ábrán látható, hogy Füzesabony és Mezőkövesd a kisebb körvonalon belül van, így ebben a két városban sztereó minőségben hallgatható a rádió.
Látható, hogy a kis körön kívül, de a nagy körön belül található Ózd, itt már csak mono minőségben lehet rádiózni.
Putnok a nagy körön kívül található, itt már nem fogható a rádió adása.

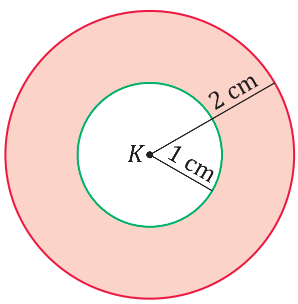


2. példa

Az ábrán egy 2 cm sugarú zöld körlapot látunk. Adjuk meg többféleképpen a zöld pontok és a *K* középpont távolságát!

Megoldás

A zöld pontok *K*-tól mért távolsága 2 centiméternél **kisebb vagy egyenlő**.
A zöld pontok *K*-tól mért távolsága **legfeljebb** 2 centiméter.
A zöld pontok *K*-tól mért távolsága **nem nagyobb**, mint 2 cm.
A zöld pontok *K*-tól mért távolsága **maximum** 2 cm.

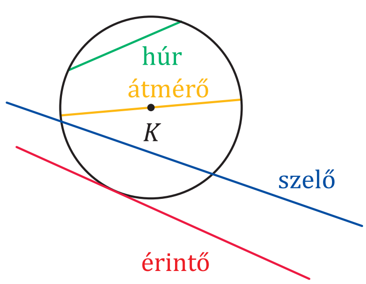


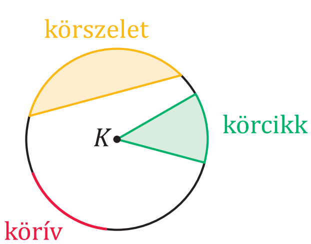
3. példa

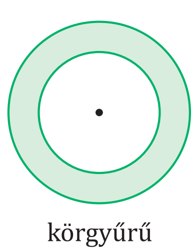
Mit mondhatunk az ábra piros pontjainak és a *K* középpontnak a távolságáról?

Megoldás

A kisebb körvonal nem piros, ezért a következőt állapíthatjuk meg:
Minden piros pont *K*-tól mért távolsága 1 cm-nél nagyobb, de 2 cm-nél nem nagyobb. Matematikai jelekkel így írjuk le röviden:
$1\text{ cm} < KP \leq 2\text{ cm}$,
ahol *P* egy tetszőleges piros pontot jelöl, a *KP* pedig a *K* és a *P* pont távolságát.







További elnevezések a körrel kapcsolatban:

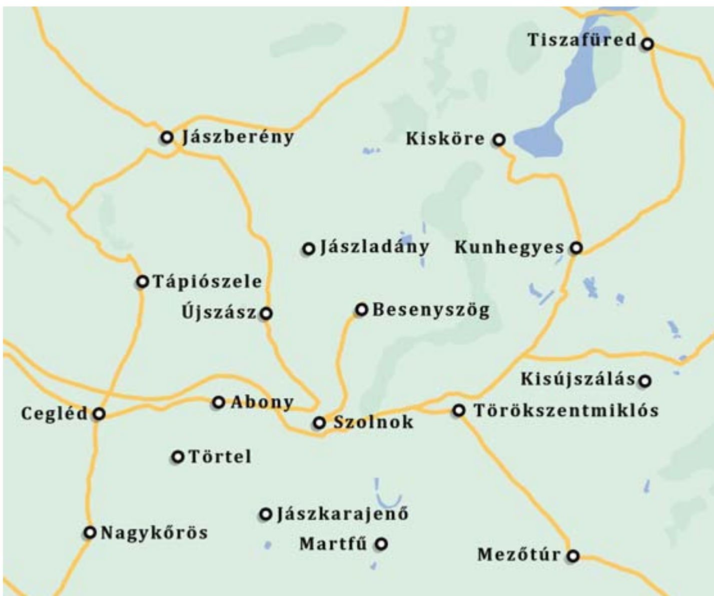
Húr: A körvonal két különböző pontját összekötő szakasz.
Átmérő: A kör középpontjára illeszkedő húr. Az átmérő a leghosszabb húr, a sugár kétszeresével egyenlő.
Szelő: Olyan egyenes, amelynek a körvonallal két közös metszéspontja van.
Érintő: Olyan egyenes, amelynek a körvonallal egy közös pontja van. Ezt a pontot érintési pontnak nevezzük.
Körív: A körvonal egy darabja.
Körszelet: Egy körív és egy húr által határolt síkidom. A kört egy húrja két körszeletre vágja.
Körcikk: Egy körív és a kör két sugara által határolt síkidom.
Körgyűrű: Két azonos középpontú körvonal által határolt síkidom.

Sok tárgy kör alakú. A kerék, a poharak, edények alja, de lehet ilyen egy fülbevaló, egy közlekedési tábla is.

Feladatok

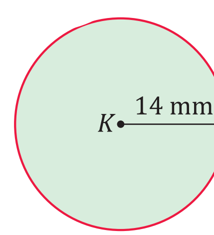
1. Rajzolj a füzetedbe egy *K* középpontú, 2 cm sugarú kört! Hol helyezkednek el a körlapon azok a pontok, amelyeknek a *K* ponttól mért távolsága 12 mm-nél
a) nagyobb; *b)* kisebb; *c)* nem nagyobb; *d)* nem kisebb?

2. A gyerekek biciklitúrára mentek Cegléd környékére.

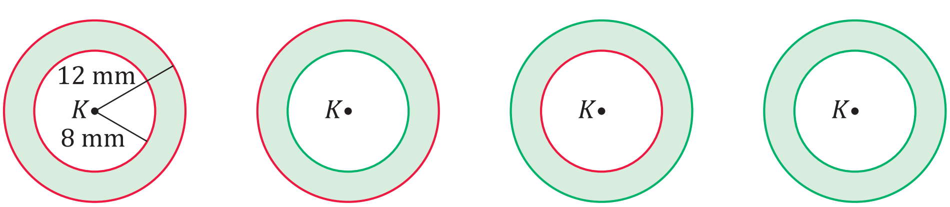


A térképvázlaton az Alföld egy részletét láthatod. A vázlat alapján válaszolj a kérdésekre!
Melyek azok a települések, amelyek Szolnokhoz közelebb vannak, mint Cegléd Kisköréhez?
Találsz-e olyan várost, amelyik Szolnoktól ugyanolyan messze van, mint Ceglédtől Kisköre?
Melyek azok a települések, amelyek Szolnoktól távolabb vannak, mint Ceglédtől Kisköre?

3. Add meg a zöld pontokat szöveggel és matematikai jelekkel is!



4. Add meg a zöld pontokat matematikai jelekkel!



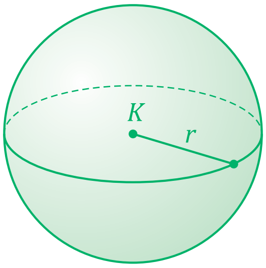
5. Vegyél fel egy *K* pontot a füzetedben, és színezd azokat a pontokat, amelyek *K*-tól mért távolsága nagyobb, mint 8 mm, de nem nagyobb, mint 15 mm!

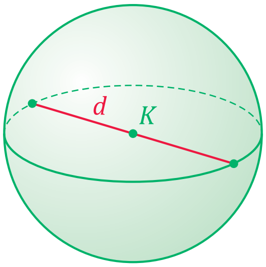
6. Vegyél fel egy *K* pontot a füzetedben, és színezd azokat a pontokat, amelyek *K*-tól mért távolsága kisebb, mint 2 cm, de nem kisebb, mint 14 mm!

13 A GÖMB

A fényképeken labdákat, karácsonyfadíszeket és gömbkaktuszokat látunk.



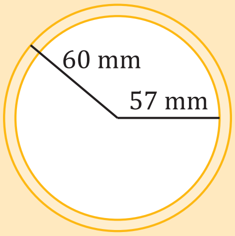




Az ilyen alakú testek neve **gömb**. Beszélünk **gömbfelület**ről és **gömbtest**ről.
Egy adott ponttól ugyanakkora távolságra lévő pontok összessége alkotja a térben a **gömbfelület**et.
Az adott pont a **gömb középpontja**, K-val jelöltük az ábrán.
A gömb középpontjának és a gömbfelület egy pontjának távolsága a **sugár**. Ezt r betűvel jelöljük, ugyanazzal a betűvel, mint a kör sugarát.
A **gömbtest**et azok a pontok alkotják a térben, amelyek egy adott ponttól egy adott távolságnál nem nagyobb távolságra vannak.
A gömb középpontján áthaladó egyenes gömbbe eső darabját a **gömb átmérőjé**nek nevezzük. Az ábrán d-vel jelöltük.
Az átmérő hossza két sugár hosszával egyenlő.

1. példa

Egy 6 cm sugarú gumilabda 3 mm vastag anyagból készült. Fogalmazzuk meg matematikai jelek segítségével, hogy a labda K középpontjához képest, hol helyezkednek el a labda anyagát alkotó pontok!



Megoldás

A labdát képzeletben vágjuk el egy síkkal a középpontján át. Az így kapott vágásfelületet lerajzoltuk.
A labda P pontjairól ezt írhatjuk: $57\text{ mm} \le KP \le 60\text{ mm}$.

2. példa

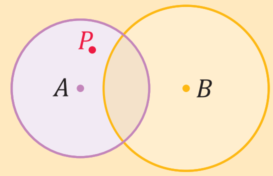
Augusztus 20-án a tűzijátékot figyelve láthattunk olyat, hogy a nagy magasságba fellőtt rakétából az izzó részecskék a robbanás után minden irányban egyenletesen szóródtak szét. Így az égbolton fénylő gömböket láthattunk. A zöld egy A középpontú, 50 méter sugarú, a piros egy B középpontú, 60 méter sugarú gömböt formázott. A két középpont 80 m távolságra volt egymástól.

Add meg matematikai jelekkel azt a testet,
a) amely csak zöld;
b) amely csak piros;
c) amely zöld és piros pontokból áll!

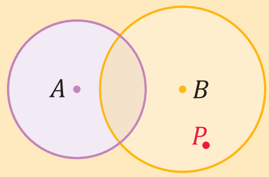
Megoldás

A megfelelő pontok közül egy tetszőlegeset jelöljünk P-vel! Ekkor a következőket írhatjuk:

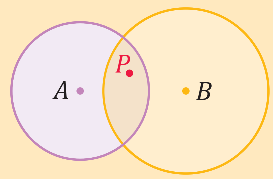
a) $AP \leq 50$ m és $PB \geq 60$ m.



b) $AP \geq 50$ m és $PB \leq 60$ m.



c) $AP \leq 50$ m és $PB \leq 60$ m.



A térben elhelyezkedő pontokat nem tudjuk a füzetben ábrázolni, de egy síkbeli ábrán most is szemléltettük a válaszokat. A gömbök helyett köröket rajzoltunk.

Feladatok

1. Két gömb középpontja 6 cm-re van egymástól. Az egyik gömb átmérője 4 cm. Mit mondhatunk a másik gömb átmérőjéről, ha a két
a) gömbnek nincs közös pontja; *b)* gömb érinti egymást; *c)* gömbnek vannak közös pontjai?
Mindhárom esethez készíts egy-egy szemléltető ábrát a füzetedben!

2. Képzelj el egy 3 cm és egy 5 cm átmérőjű gömböt! Milyen messze lehet a két gömb középpontja egymástól, ha
a) nincs közös pontjuk; *b)* érintik egymást?

3. Írd le szavakkal, hogy mit adnak a P pontok! Az O egy rögzített pont!
a) $OP = 12$ mm; *b)* $OP \leq 4$ cm; *c)* $OP < 2{,}2$ cm; *d)* $1 \text{ cm} \leq OP \leq 2$ cm.

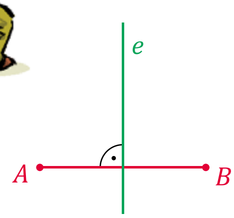
4. Add meg matematikai jelekkel azon P pontok összességét, amelyekről a következő állításokat fogalmazhattuk meg!
a) Egy adott K ponttól 3 cm-re találhatóak.
b) Egy adott K ponttól vett távolságuk nem nagyobb, mint 14 mm.
c) Egy adott K ponttól 2 cm-nél távolabb, de 4 cm-nél közelebb vannak.
d) Egy adott K ponttól 2 cm-re vagy 4 cm-re vannak.

5. Egy mandarint egy 3 cm sugarú gömbbel szemléltethetünk. Ha lehámozzuk a héját, akkor már csak 5 cm átmérőjű gömböt kapunk. A mandarin közepét nevezzük el K pontnak!
a) Add meg matematikai jelöléssel a mandarin azon M pontjait, amelyeket a hámozás után kapunk!
b) Add meg matematikai jelöléssel a mandarin azon H pontjait, amelyek a mandarin héját alkotják!

14. A SZAKASZ FELEZŐMERŐLEGESE

CSOPORTMUNKA

Hajtsatok ketté egy írólapot egy tetszőleges egyenes mentén! Ezután a körzőtökkel szúrjátok át a dupla lapot! Nyissátok szét az írólapot, és pirossal kössétek össze az így létrehozott két pontot! Az egyik végpont legyen *A*, a másik legyen *B*! A hajtásvonalat a vonalzótok segítségével rajzoljátok meg zöld színnel! Válasszatok tetszőleges zöld pontokat, és mérjétek meg az *A* és a *B* ponttól vett távolságukat! Mit tapasztaltok?



Az *AB* szakaszt az ábrán látható *e* egyenes merőlegesen metszi és felezi is.

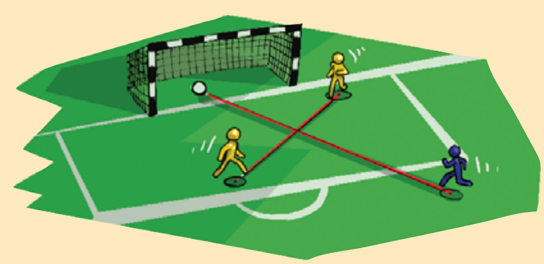
Ezt az egyenest a **szakasz felezőmerőleges**ének nevezzük. A szakasz felezőmerőlegesének minden pontja egyenlő távolságra van a szakasz két végpontjától.

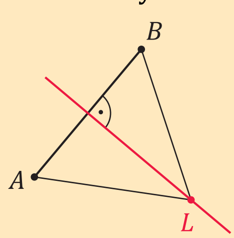
Példa

A két védő között a csatár úgy rúgta a labdát a hálóba, hogy a labda végig mindkét játékostól azonos távolságra volt.

Ez a mondat egy futballmérkőzésen hangzott el.

Az adott pillanatban tudjuk a két védőjátékos és a labda helyét. A hallottak alapján hogyan képzeljük el a labda útját?





Megoldás

A rajzunkon az *A* és a *B* pont jelöli a két védőjátékos helyét, *L*-lel pedig a labda helyét jelöltük. Tudjuk, hogy a labda mindig egyenlő távolságra volt a két focistától, ezért már a kiinduló helyzetben olyan *L* pontot rajzoltunk, amely esetén $AL = BL$. A labda az ábrán látható *AB* szakasz felezőmerőlegesén halad.

Feladatok

1. Rajzolj vázlatot, ha az *F* fa és a *B* bokor között az ösvényen sétáló Piroska minden pillanatban ugyanolyan messze volt a fától, mint a bokortól! (A vázlatodon a fa és a bokor egy-egy pont, az ösvény egy vonal legyen!)

2. Rajzolj egy vázlatot, ha tudod, hogy az *O* oszlop és a *H* ház között felezőmerőlegesként halad egy út! (A vázlatodon az oszlop és a ház egy-egy pont, az út pedig egy egyenes legyen!)

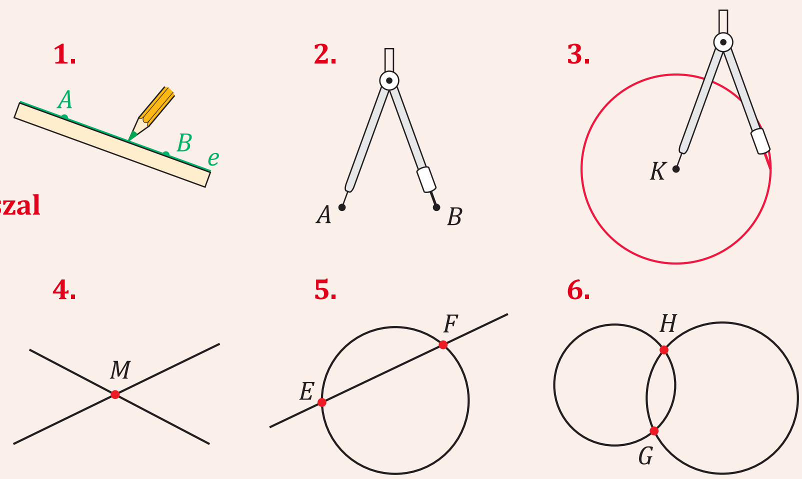
3. Egy papírlapon jelölj ki három pontot, amelyek nincsenek egy egyenesen! Minden lehetséges módon hajtsd össze a papírlapot úgy, hogy két-két pont fedésbe kerüljön! Milyen egyeneseket kaptál?

4. Rajzoltunk egy egyenest és egy rá nem illeszkedő pontot egy papírlapra. Ez a pont egy olyan szakasznak az egyik végpontja, amelynek a papíron lévő egyenes a felezőmerőlegese. Hogyan keresnéd meg a szakasz hiányzó végpontját?

A geometriai ábrák készítéséhez vonalzót és körzőt használunk. (Persze nem árt egy papírlap és egy hegyes ceruza sem.) **Szerkesztés**ről akkor beszélünk, ha a vonalzó merőleges, illetve párhuzamos éleit nem használjuk, ezért úgy szoktak fogalmazni, hogy a szerkesztésnél a **körző** mellett egy **egyélű vonalzó**ra van szükségünk.

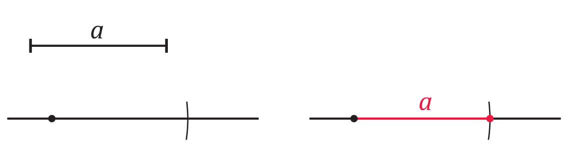
A görög Eukleidesz Kr. e. 300 körül élt. Legismertebb műve az *Elemek*, melyben összefoglalta korának matematikai eredményeit. Körülbelül 2000 éven keresztül ezt a könyvet tekintették a matematika, és ezen belül a geometria alapjának. Megfogalmazta, hogy mit fogadunk el magától értetődő dolognak, és mit tekintünk geometriai szerkesztésnek. Megalkotta az úgynevezett euklideszi geometriát. Eukleidesz által elismert szerkesztési lépések voltak például a következők:

1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve meghúzhatjuk a két pontra illeszkedő egyenest.
2. Két pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott szakasszal (sugárral) kört rajzolhatunk.
4. Két egyenes metszéspontja meghatározott.
5. Egyenes és kör metszéspontjai meghatározottak.
6. Két kör metszéspontjai is meghatározottak.

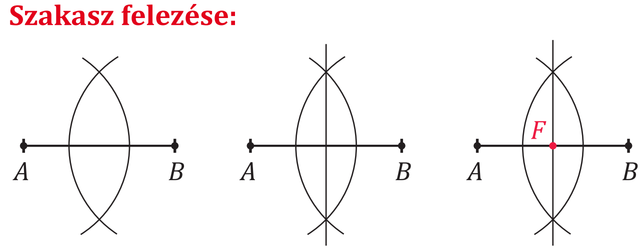


Szerkesztések során előfordul, hogy egy szakaszt kell átmásolnunk vagy megfeleznünk.

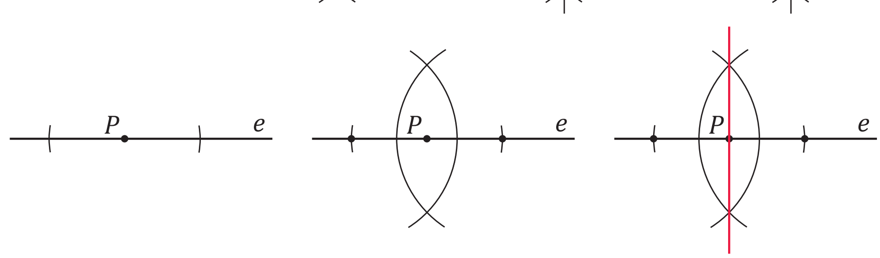
Szakasz másolása:



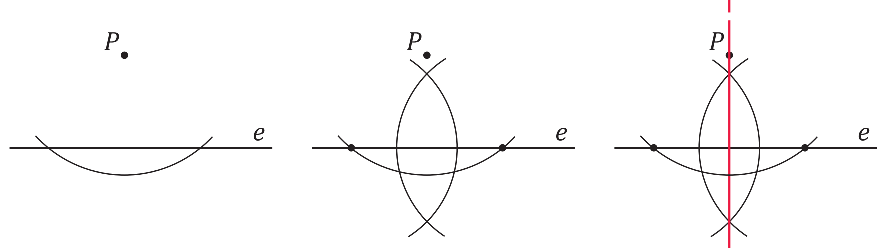
Szakasz felezése:



Az *e* egyenes egy *P* pontjában merőlegest állíthatunk az egyenesre:



Az *e* egyenesre egy *P* pontból merőlegest szerkeszthetünk:

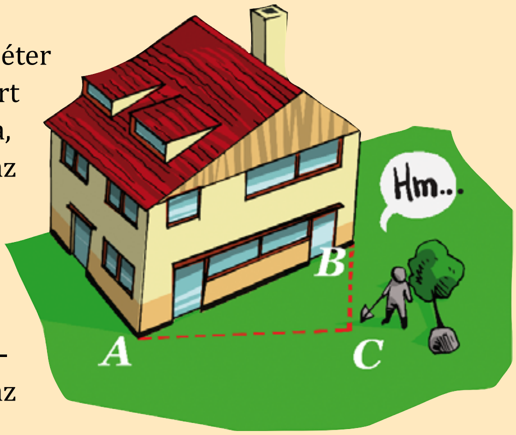


1. példa

Péter az udvarban fát szeretne ültetni. A házuk 10 méter hosszú. Kigondolta, hogy a fa a ház elejének bal sarkától 8 méterre, a végétől 6 méterre legyen. Az ültetéshez ki kell ásni egy gödröt. Hogyan jelölje ki ennek a gödörnek a helyét?

Megoldás

A ház elejétől, az A ponttól 8 méterre lévő pontok egy 8 méter sugarú körre illeszkednek. Ha egy 8 méter hosszú zsinórt rögzítünk az A pontban, akkor a másik vége megmutatja, hogy hol lehetnek azok a pontok az udvarban, amelyek a ház elejétől 8 méterre találhatóak.
A helyük megjelölhető a talajon.
A ház végétől, a B ponttól 6 méterre lévő pontok egy 6 méter sugarú körre illeszkednek. Most egy 6 méter hosszú zsinórt rögzítünk a B pontban. A zsinór másik vége megmutatja, hogy hol lehetnek azok a pontok, amelyek a ház végétől 6 méterre találhatóak.
Ezeknek is megjelölhető a helye a talajon.
A **két körvonal metszéspontja** rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Itt kezdheti Péter a gödör ásását.



2. példa

Szeretnénk tudni, hogy az előző példában elültetett fa milyen messze van a ház falától.

Megoldás

Legyen a fa helye C. A kérdés így fogalmazható meg:
Az ABC háromszög C csúcsa milyen messze van a szemközti oldaltól, ha AB = 10 méter,
AC = 8 méter, BC = 6 méter?
Szerkesszük meg a háromszöget, majd mérjük meg a kérdéses távolságot!
Ami a valóságban 1 m, az a rajzunkon legyen 3 mm, vagyis 10 m helyett 30 mm-rel, 8 m helyett 24 mm-rel, 6 méter helyett 18 mm-rel fogunk dolgozni.

Ez a szabadkézi vázlatrajz úgy mutatja az adatokkal a háromszöget, mintha már készen lennénk a szerkesztéssel. A két • azt jelenti, hogy az A és a B pontok felvételével, vagyis az AB szakasz megrajzolásával fogjuk kezdeni a szerkesztést.

Tudjuk, hogy a még ismeretlen C pont az A-tól 8 m-re (a rajzunkon 24 mm-re), a B-től 6 m-re (a rajzunkon 18 mm-re) található.

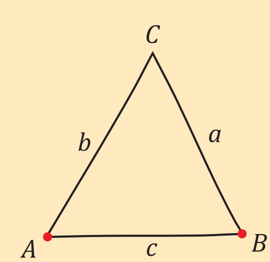
Így a három **adott** hosszúságú szakasz:

a = 18 mm

b = 24 mm

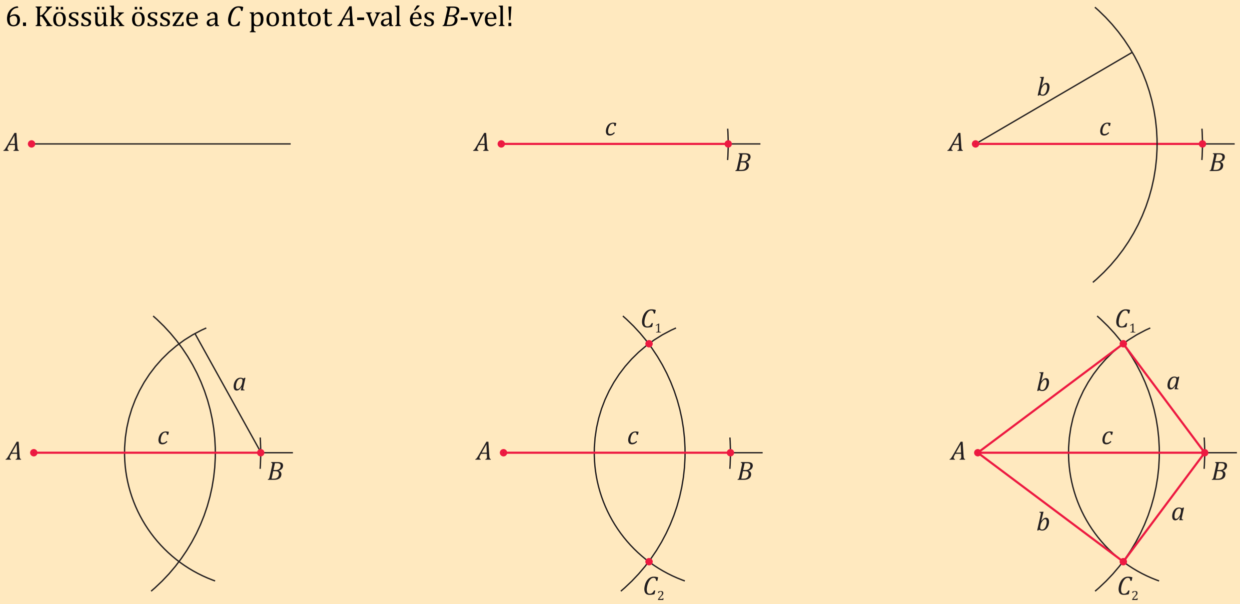
c = 30 mm

Készítsünk **vázlat**ot!



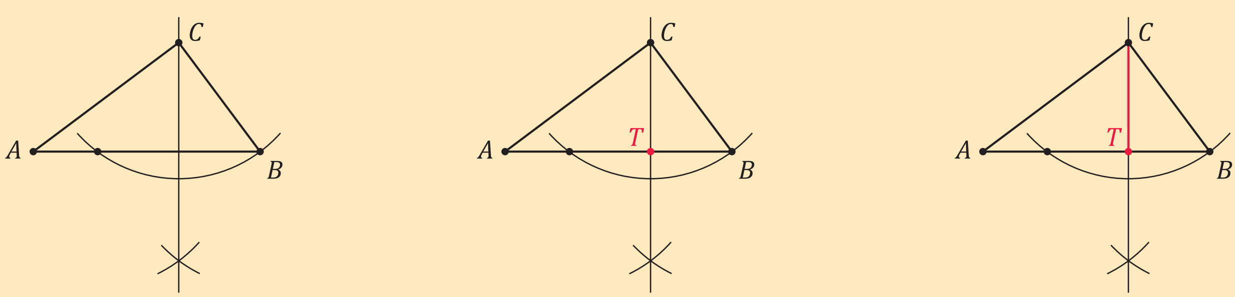
Fogalmazzuk meg a szerkesztés lépéseit!

1. Vegyünk fel egy A kezdőpontú félegyenest!
2. Vegyük körzőnyílásba a c szakaszt, és ezt A-ból másoljuk a félegyenesre! Így megkapjuk a B pontot.
3. Rajzoljuk meg az A középpontú, b sugarú kört!
4. Rajzoljuk meg a B középpontú, a sugarú kört!
5. Jelöljük meg a körök metszéspontját, ez lesz a C pont!
6. Kössük össze a C pontot A-val és B-vel!



Látható, hogy a két körnek két metszéspontja van: C_1 és C_2. Mindkettő teljesíti a feladat feltételeit. De csak az egyik van az udvaron, a másik a házban (vagy azon túl) lenne! Az ABC_1 és az ABC_2 háromszögek egyformák, ezért AB-től bármelyik C pont távolságát megmérhetjük. Ennek a lépései:

7. A C pontból merőleges egyenest szerkesztünk AB-re.
8. Jelöljük meg a két egyenes metszéspontját T-vel!
9. Megmérjük a CT szakasz hosszát.



A CT szakasz kb. 15 mm hosszú lett a szerkesztett ábránkon. Ami a rajzunkon 3 mm, az a valóságban 1 m. Vagyis a fát körülbelül 5 méterre kell ültetni a ház falától.

Összefoglaljuk a szerkesztések legfontosabb mozzanatait:
A feladat megértése után rögzítsük az **adatok**at! Ez után készítsünk **vázlatrajzot**!
Az adatok közötti összefüggések felhasználásával tervezzük meg **a szerkesztés lépései**t!
Végezzük el a **szerkesztés**t!
Ellenőrizzük, hogy valóban a feltételeknek megfelelő alakzatot hoztuk-e létre!

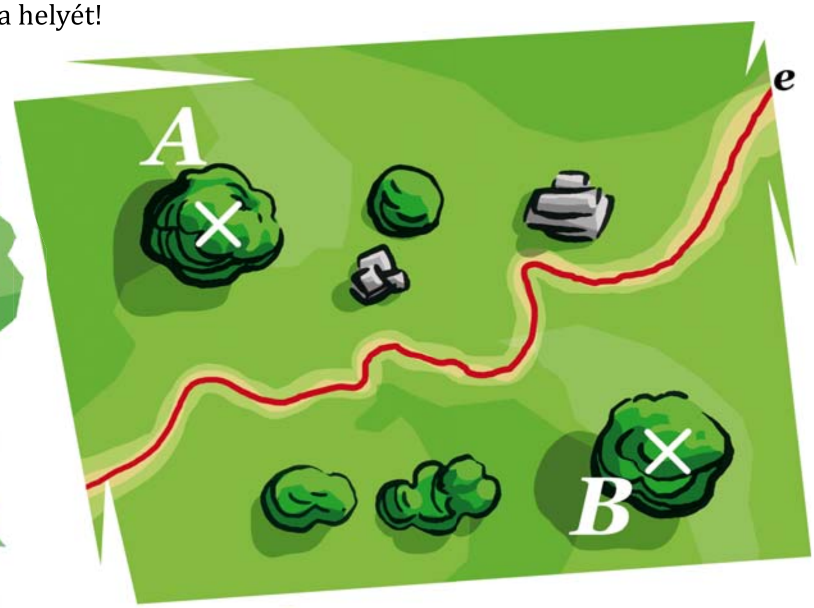
Feladatok

1. Rajzolj a füzetedbe egy tetszőleges szakaszt, majd szerkeszd meg a felezőmerőlegesét!

2. Rajzolj egy téglalapot! Szerkeszd meg a következő egyeneseket!
a) Az egyik átló felezőmerőlegese.
b) A hosszabb oldal felezőmerőlegese.

3. Szerkeszd meg a füzetedben az ábrákat!

4. Az ábrán *A*-val és *B*-vel egy-egy fa helyét jelöltük, az *e* pedig egy ösvény. Az ösvény mellett elástak egy kincsesládát. A láda mindkét fától ugyanolyan messze található. Rajzolj a füzetedbe egy ehhez hasonlító térképvázlatot, majd szerkesztéssel keresd meg a láda helyét!



5. Rajzolj egy kört, és rajzolj bele három tetszőleges húrt! Szerkeszd meg a húrok felezőmerőlegesét! Mit tapasztalsz?

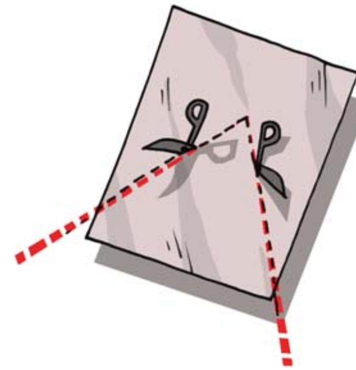
6. Szerkesztéssel vágj egy adott szakaszt négy egyenlő részre!

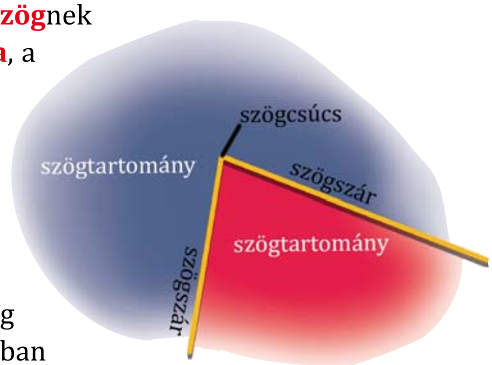
7. Szerkessz háromszöget az alábbi adatok alapján! Megszerkeszthető-e mindegyik háromszög?
a) $a = b = c = 4$ cm; *b)* $a = 2$ cm, $b = 3$ cm, $c = 4$ cm; *c)* $a = 5$ cm, $b = 3$ cm, $c = 2$ cm!

A SZÖG 16.

Egy pontból induló két félegyenes mentén kettévághatjuk a rajzlapot.

Az egy pontból kiinduló két félegyenes a síkot két **szögtartomány**ra osztja. Ezeket a tartományokat röviden **szög**nek nevezzük. A kiindulópont a **szög csúcsa**, a félegyenesek a **szög szárai**.

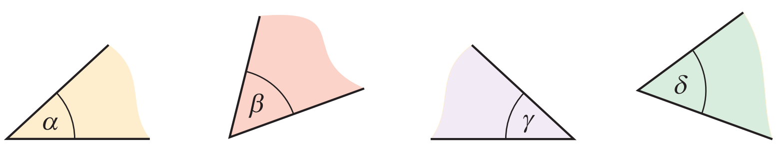




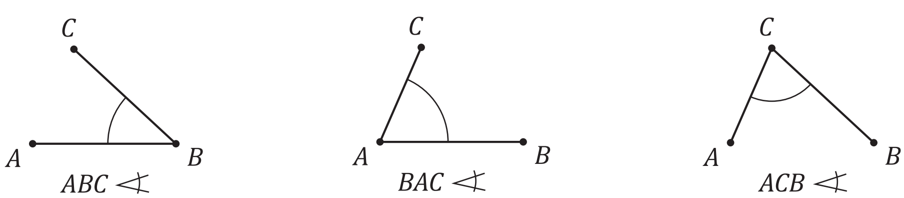
A szög csúcsa, mint középpont körül a szög szárai közé rajzolt körívvel jelöljük, hogy melyik szögtartományra gondolunk.

A szögek elnevezésére általában a görög ábécé kisbetűit használjuk. Leggyakrabban az első négy betűt:

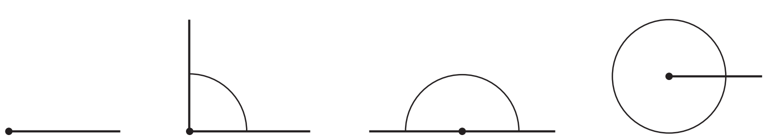
α (alfa) β (béta) γ (gamma) δ (delta)



Három pont három szöget is meghatároz. Ezeket szoktuk az ábrán látható módon három nagybetűvel is jelölni: $ABC\sphericalangle$, $BAC\sphericalangle$, $ACB\sphericalangle$.



Néhány különleges szögnek saját neve van, ilyenek a nullszög, derékszög, egyenesszög és a teljesszög.

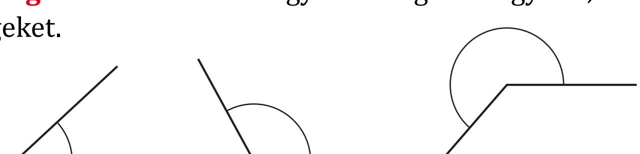


nullszög derékszög egyenesszög teljesszög

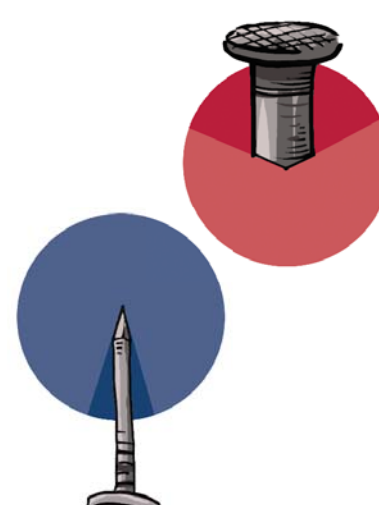
Hegyesszögnek nevezzük a nullszögnél nagyobb, de a derékszögnél kisebb szögeket.

Tompaszögnek nevezzük a derékszögnél nagyobb, de az egyenesszögnél kisebb szögeket.

Homorú szögnek nevezzük az egyenesszögnél nagyobb, de a teljesszögnél kisebb szögeket.



hegyesszög tompaszög homorúszög



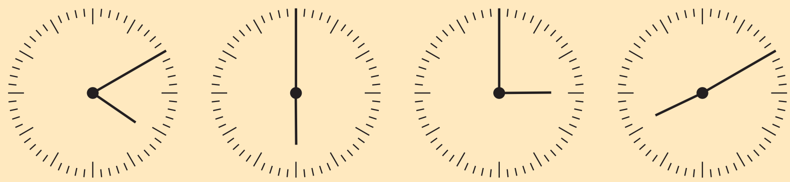
16. A SZÖG

1. példa

Milyen szöget határoz meg az óra kis- és nagymutatója
a) 4:10-kor; *b)* 6 órakor; *c)* 3 órakor; *d)* 8:10-kor?

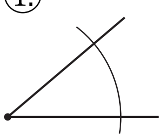
Megoldás

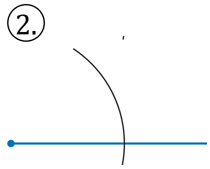
a) Hegyesszöget, *b)* Egyenesszöget, *c)* Derékszöget,
d) Tompaszöget. A nagymutató a kettesre mutat, a kismutató pedig már elmozdult a nyolcasról, ezért az egyenesszögnél kisebb ez a szög.

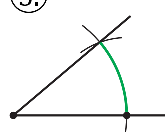


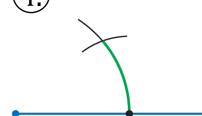
Egy adott szöget körzővel és vonalzóval tetszőleges helyre **másolhatunk**, vagy akár **meg is felezhetünk**.

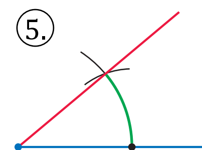
A szög másolásának lépései:

1.

Adott az eredeti szög.

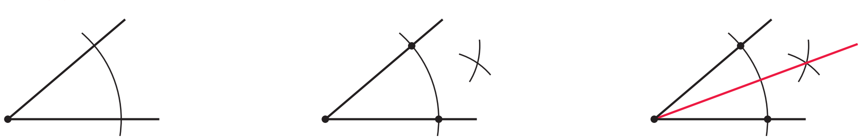
2.

Felveszünk egy félegyenest és a szög ívét.

3.

Körzőnyílásba vesszük az eredeti szög nyílását.

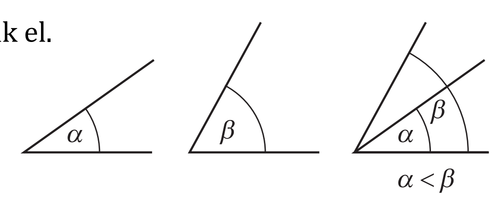
4.

A félegyenesen lévő ívre rámérjük körzővel az eredeti szög nyílását.

5.

Megrajzoljuk a szög hiányzó szárát.

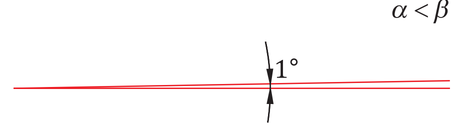
Szög felezése



A szögek nagyságrendi viszonyát egymásra illesztéssel dönthetjük el.
Jó lenne ennél pontosabbat is mondani!

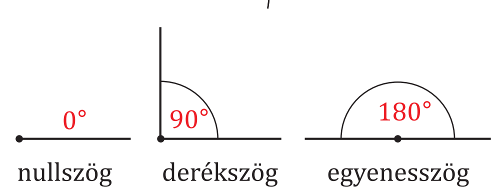


A szögmérés mértékegységének **a teljesszög 360-ad részét** választották.
Ez a kicsi hegyesszög **1 fok**, jele: **1°**.

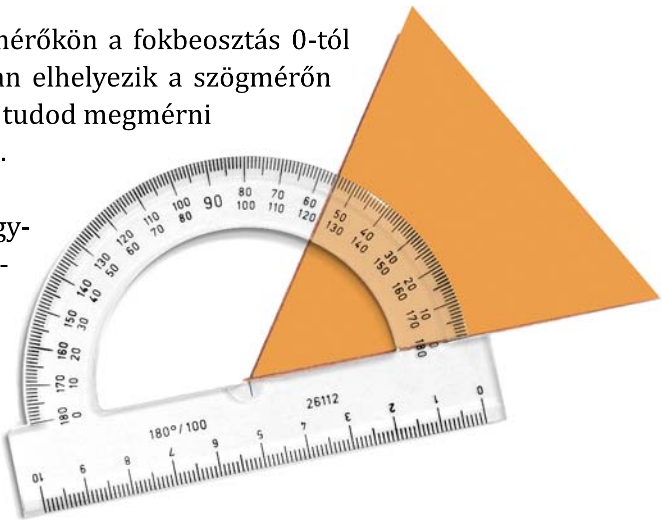


Vagyis a nullszög nagysága 0°, az egyenesszögé 180°, a derékszögé 90°.
Ezeket felhasználva:

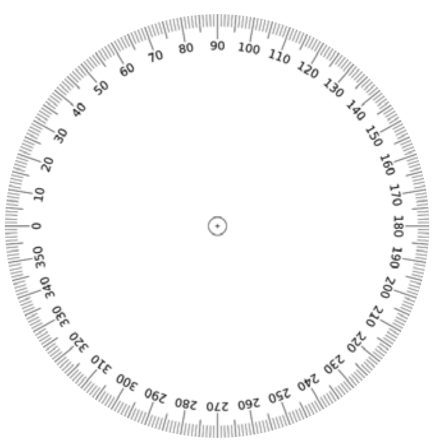
Ha α hegyesszög, akkor: $0° < \alpha < 90°$.
Ha β tompaszög, akkor: $90° < \beta < 180°$.
Ha γ homorúszög, akkor: $180° < \gamma < 360°$.



A szögek nagyságát **szögmérő**vel mérjük. A szögmérőkön a fokbeosztás 0-tól 180-ig látható. A legtöbb esetben mindkét irányban elhelyezik a szögmérőn a számozást. A 180°-nál nagyobb szögek esetén azt tudod megmérni a szögmérővel, hogy mennyivel nagyobb, mint 180°.



Ha pontosabban szeretnénk megadni a szögek nagyságát, akkor használhatjuk a szögperc és szögmásodperc mértékegységeket. Az elnevezések hasonlítanak az időmérésnél megismert egységekre. Ahogy egy óra 60 perc, úgy egy fok 60 szögperc, sőt, ahogy egy perc az 60 másodperc, úgy egy szögperc 60 szögmásodperc. Ezeket a szögmérőnkkel már nem tudjuk mérni, ezek nagyon kicsi szögek.



1 fok	**= 60 szögperc,**	**1° = 60’**
1 szögperc	**= 60 szögmásodperc,**	**1’ = 60”**
1 fok	**= 3600 szögmásodperc,**	**1° = 3600”**

2. példa

Határozzuk meg az $\alpha + \beta$ értékét, ha $\alpha = 38°\ 36'\ 26''$, $\beta = 24°\ 52'\ 47''$!

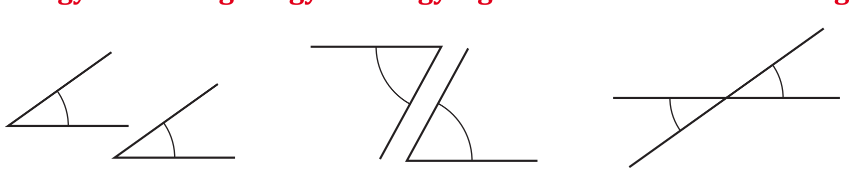
Elvégezzük az összeadást és a lehetséges átváltásokat:

38° 36’ 26”	38° 36’ 26”	38° 36’ 26”
+ 24° 52’ 47”	+ 24° 52’ 47”	+ 24° 52’ 47”
62° 88’ 73”	62° 89’ 13”	63° 29’ 13”

Vagyis $\alpha + \beta = 63°\ 29'\ 13''$.

Szögpárok esetén hasznosak a következő elnevezések!

Az egyállású szögek egyenlő nagyságúak. A fordított állású szögek is egyenlő nagyságúak.



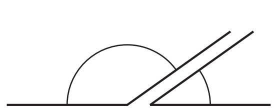
egyállású szögek

váltószögek

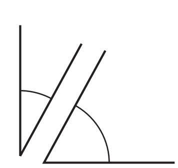
csúcsszögek

fordított állású szögek

A kiegészítő szögpárok összege 180°.



A pótszögek összege 90°.



Feladatok

1. Rajzolj hegyes-, derék-, tompa-, egyenes-, homorú és teljesszögeket, minden típusból maximum három különböző nagyságút! Hány szöget rajzolhatsz összesen? (A füzetedben dolgozz!)

2. Rajzolj olyan négyszöget, melynek *a)* egy derékszöge; *b)* egy homorú szöge van!

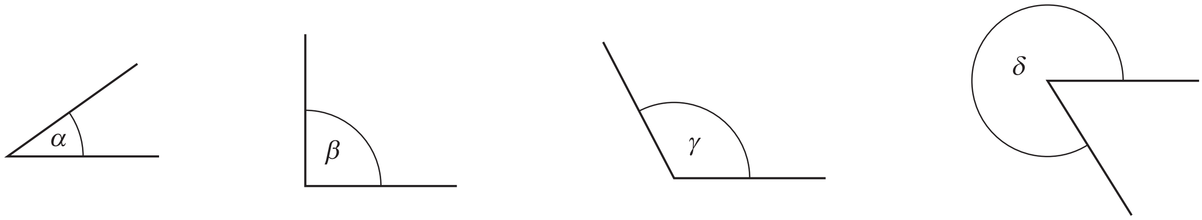
3. Milyen szög lehet két hegyesszög összege? Rajzzal indokolj!

4. Milyen lehet az a két szög, amelynek az összege egyenesszög?

5. Két szög különbsége derékszög. Milyen lehet a két szög?

6. Rajzolj két hegyesszöget! Másold át a szögeket!
a) Szerkeszd meg a nagyobbnak a felét!
b) Szerkeszd meg az összegüket!
c) Szerkeszd meg a különbségüket!

7. Mérés előtt becsüld meg az ábrán látható szögek nagyságát! Szögmérővel ellenőrizd a tippelésedet! Mennyit tévedtél?



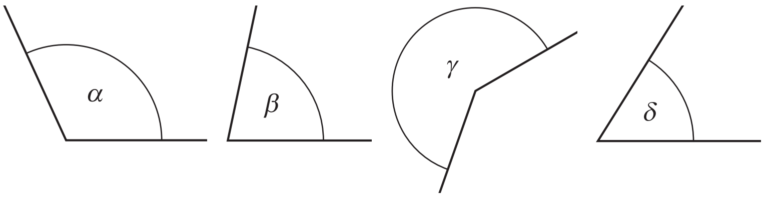
8. Szögmérő segítségével rajzolj 15°-os, 120°-os, 240°-os szöget!

9. Ha $\alpha = 78° \, 12'$, $\beta = 53° \, 48'$, akkor mennyi az $\alpha + \beta$, $\alpha + 2\beta$, $\alpha - \beta$, $2\alpha - \beta$?

10. Három órakor és kilenc órakor a két mutató merőleges egymásra. Hányszor fordul elő ez a közben eltelt hat óra alatt?

11. Mekkora szöget zár be az óra két mutatója
a) 2 órakor; *b)* 4 órakor; *c)* fél háromkor; *d)* fél hatkor?

12. Az ábrán látható szögeket másold át a füzetedbe! Szerkeszd meg azt a szöget, amely
a) az α szögnél 90°-kal kisebb;
b) a β szögnél 90°-kal nagyobb;
c) a γ szögnél 180°-kal kisebb;
d) a δ szögnél 180°-kal nagyobb!



13. Igaz? Hamis?
a) Minden derékszög szétvágható két hegyesszögre.
b) Minden tompaszög szétvágható két hegyesszögre.
c) Három hegyesszög összege biztosan tompaszög.
d) Három hegyesszög összege lehet homorúszög.

TÉGLALAP, NÉGYZET KERÜLETE 17.

1. példa

Egy városban kijelölték azt a téglalap alakú területet, ahol családi pihenőparkot építenek. A tervek szerint minden korosztály számára készül valami. A kicsiknek homokozók, csúszdák, de lesz focipálya és röplabdapálya is. Az építési területet körbekerítik. Hány méter drótkerítést kell vásárolni, ha a téglalap alakú terület hosszabb oldala 178 méter, a rövidebb pedig 122 méter?

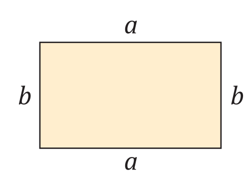
Megoldás

A téglalapnak két 178 méter és két 122 méter hosszú oldala van.
A kerítés hossza = 2 · 178 m + 2 · 122 m = 356 m + 244 m = 600 m.
Vagyis 600 méter drótkerítést kell vásárolni.

Egy téglalap határvonalának hosszát, vagyis a **kerület**ét határoztuk meg.
A kerületet gyakran *k* vagy *K* jelöli.
A téglalap kerületét megkapjuk, ha az oldalainak hosszát összeadjuk.
A kerület hosszúságot jelent.
Ha a téglalap szomszédos oldalainak hossza *a* és *b*, akkor:

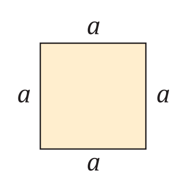
$K = a + b + a + b.$

Ezt a négytagú összeget több alakban is írhatjuk:



$K = a + a + b + b = 2 \cdot a + 2 \cdot b = 2 \cdot (a + b).$

Ha négyzetről, vagyis olyan téglalapról van szó, amelynek a két szomszédos oldala is egyenlő, akkor:



$K = a + a + a + a = 4 \cdot a.$

A szorzásjelek elhagyásával sem lesznek félreérthetőek ezek az összefüggések:

$K = 2a + 2b,\quad K = 2(a + b),\quad K = 4a.$

2. példa

Egy négyzet alakú telek bekerítéséhez pontosan 100 méter hosszú kerítést használtak fel úgy, hogy a 4 méter széles kapunak kihagyták a helyét. Mekkora a telek oldalának hossza?

Megoldás

A telek határvonalának hosszát megkapjuk, ha a felhasznált kerítés hosszát és a kapu szélességét összeadjuk. Így a telek kerülete: 104 méter.
Tudjuk, hogy a 104 méter az oldal hosszának a négyszerese.
Vagyis a négyzet alakú telek oldalának hossza 26 méter.

17. TÉGLALAP, NÉGYZET KERÜLETE

Feladatok

1. Hány centiméter az a oldalhosszúságú négyzet kerülete, ha
a) $a = 23$ cm; *b)* $a = 11{,}5$ m; *c)* $a = 3{,}4$ dm; *d)* $a = 32$ mm?

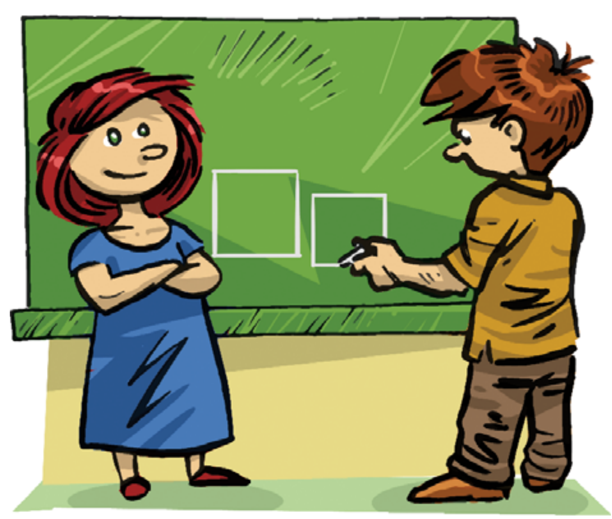
2. Mekkora a téglalap kerülete, ha egyik oldala a, másik oldala b hosszúságú?
a) $a = 16$ cm, $b = 45$ cm; *b)* $a = 0{,}72$ m, $b = 81$ cm;
c) $a = 0{,}9$ dm, $b = 13$ mm.

3. Számítsd ki a négyzet oldalának hosszúságát, ha
a) $K = 32{,}2$ dm; *b)* $K = 36{,}96$ m; *c)* $K = 342$ mm; *d)* $K = 558$ m!

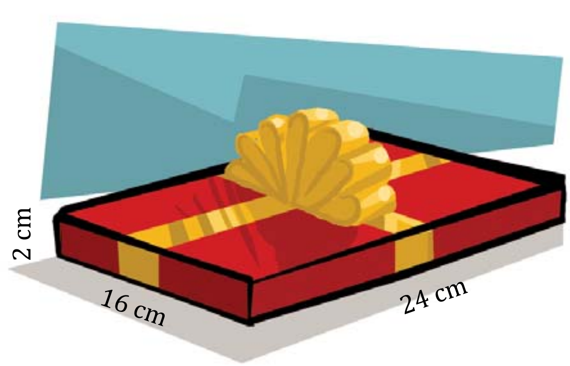
4. Számítsd ki a téglalap egyik oldalának hosszúságát, ha másik oldala b hosszúságú, a kerülete pedig K!
a) $b = 11$ cm, $K = 52$ cm; *b)* $b = 27$ mm, $K = 16$ cm.

5. Igaz-e?
a) Ha a téglalap rövidebb oldalainak hosszát duplázzuk, hosszabb oldalainak hosszát pedig felezzük, akkor a kerülete nem változik.
b) Ha a négyzet kerülete a felére csökken, akkor az oldalak hossza is a felére csökken.
c) Ha a négyzet oldalainak hosszát megduplázzuk, akkor a kerülete is megduplázódik.
d) Ha a téglalap egyik oldalát 5 cm-rel növeljük, a másik oldalát 5 cm-rel csökkentjük, akkor a kerülete nem változik.

6. Ádám és Éva rajzolt egy-egy négyzetet a táblára. Éva négyzetének oldala 2 cm-rel hosszabb volt, mint Ádámé. Mennyivel nagyobb Éva négyzetének kerülete, mint Ádámé?



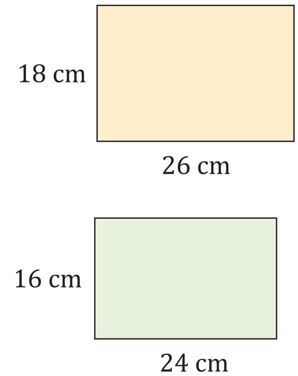
7. Hány milliméter az ábrán látható téglalap kerülete? Mérj és számolj!



8. Évi megnyerte az iskolai szavalóversenyt, ezért egy szép könyvet kapott. A könyvet becsomagoltuk, és körül is kötöttük az ábrán látható módon. Ha a masnira 60 cm szalag kellett, akkor mennyi szalagot vettünk összesen?

A TERÜLET MÉRÉSE 18.

Két születésnapi ajándékot szeretnénk becsomagolni. Az egyikhez egy 18 cm-szer 26 cm-es, a másikhoz egy 16 cm-szer 24 cm-es, téglalap alakú csomagolópapírt használunk fel. Melyiket csomagoljuk nagyobb papírba?



Az ilyen típusú kérdések a síkidomok **területének** összehasonlítására vonatkoznak. Sok esetben ez a szemmértékünk segítségével, ránézésre is eldönthető. Mennyivel nagyobb? Hányszor akkora? Ilyen kérdések esetén már mérnünk, számolnunk kell.

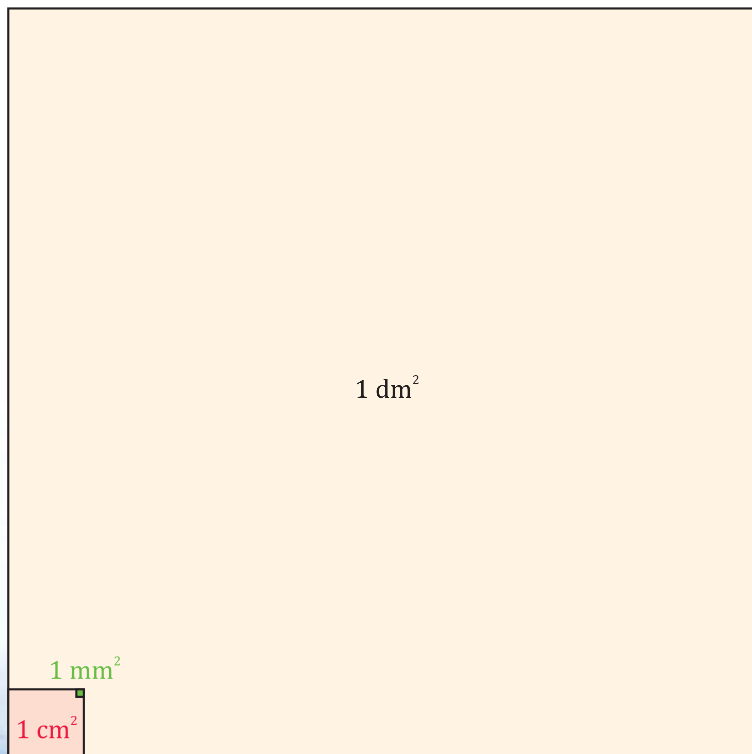
A terület mérésekor a mérendő területet az egység oldalú négyzetek területéhez viszonyítjuk.

Az egység oldalú négyzet területe 1 területegység.

A négyzet oldala lehet 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, 10 m, 100 m, 1 km hosszúságú.

Ezeknek a négyzeteknek a területe

1 mm^2 (1 négyzetmilliméter),
1 cm^2 (1 négyzetcentiméter),
1 dm^2 (1 négyzetdeciméter),
1 m^2 (1 négyzetméter),
1 a (1 ár),
1 ha (1 hektár),
1 km^2 (1 négyzetkilométer).



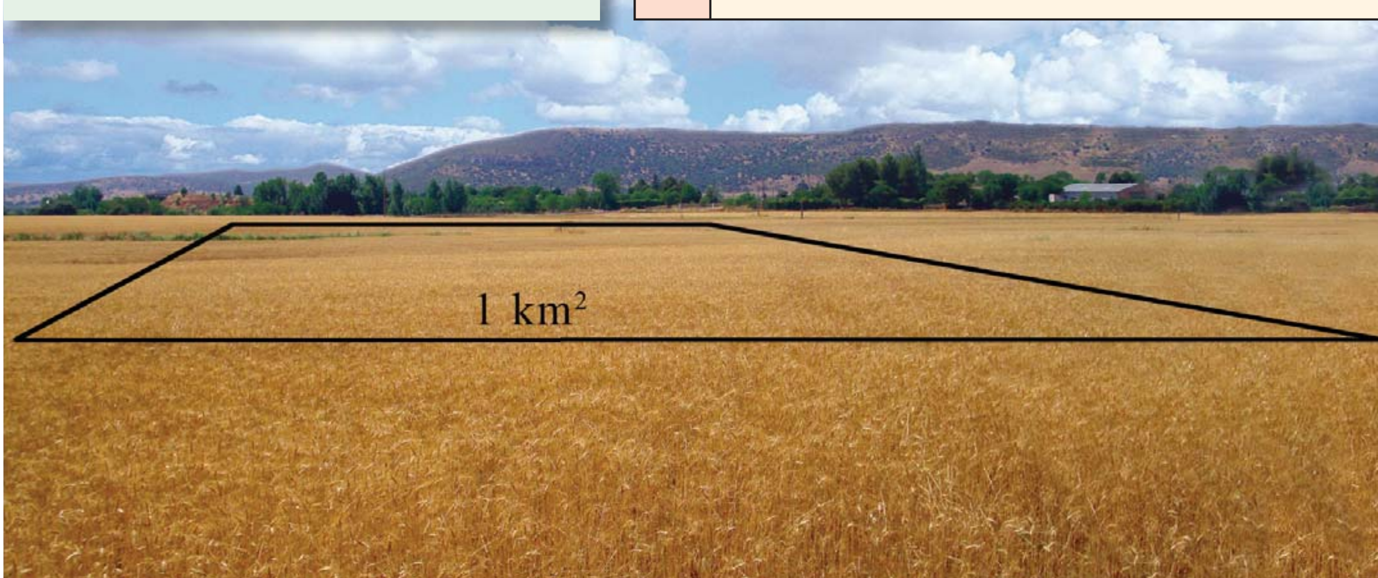
A terület mértékegységei közötti kapcsolatok:

$1\ mm^2 < 1\ cm^2 < 1\ dm^2 < 1\ m^2 < 1\ a < 1\ ha < 1\ km^2$

$\cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100 \quad \cdot 100$

KUTATÓMUNKA

A terület mérésére néha ma is használnak régről fennmaradt mértékegységeket. Nézz utána, mekkora egy négyszögöl vagy éppen egy hold!



18. A TERÜLET MÉRÉSE

Feladatok

1. Add meg négyzetmilliméterben!

a) 8 cm^2; *b)* 13 dm^2; *c)* 0,3 m^2; *d)* 0,04 m^2;
e) 22 cm^2; *f)* 34 dm^2; *g)* 0,4 m^2; *h)* 0,005 m^2.

2. Add meg négyzetcentiméterben!

a) 310 mm^2; *b)* 6 dm^2; *c)* 0,75 m^2; *d)* 0,082 km^2;
e) 7000 mm^2; *f)* 19 dm^2; *g)* 1,8 m^2; *h)* 0,002 km^2.

3. Add meg négyzetdeciméterben!

a) 54000 mm^2; *b)* 560 cm^2; *c)* 15 m^2; *d)* 0,006 m^2;
e) 5300 mm^2; *f)* 1300 cm^2; *g)* 1,6 m^2; *h)* 0,0036 m^2.

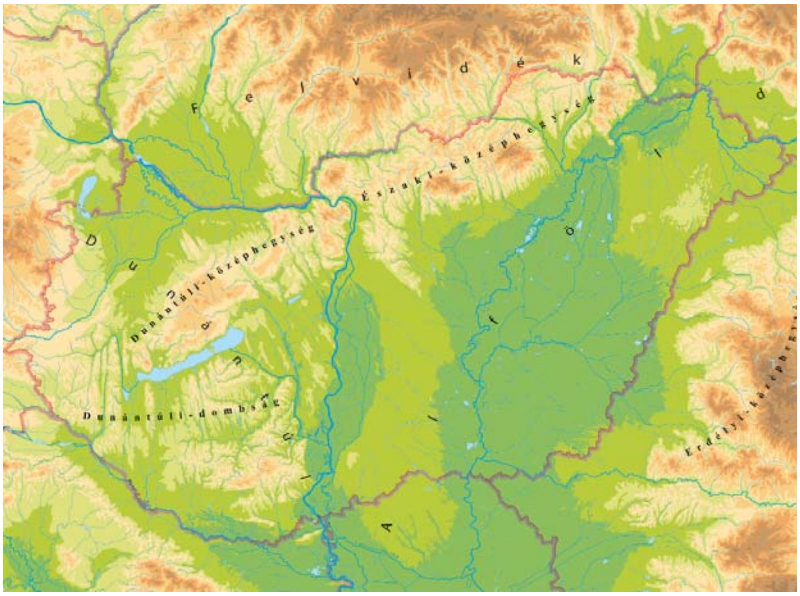
4. Add meg négyzetméterben!

a) 70000 mm^2; *b)* 910 cm^2; *c)* 7500 dm^2; *d)* 0,6 km^2;
e) 350000 mm^2; *f)* 11300 cm^2; *g)* 840 dm^2; *h)* 0,09 km^2.

5. Egy 360 hektáros föld 1,2 km^2-es részén kukoricát, felén búzát, a többi részen pedig burgonyát termelnek. Hány hektáron ültettek burgonyát? Szemléltesd rajz segítségével a feladat szövegét!

6. Magyarország tájegységeinek adatait kutatva a következő szöveget találtuk az Alföldről:
A Duna középső szakaszának legnagyobb medencéje, és hazánk legnagyobb tájegysége. Területe 50 000 km^2. Ezzel Magyarország területének több mint a felét elfoglalja. Északon az Északi-középhegység, keleten és délen az országhatár, nyugaton a Dunántúli-középhegység határolja. Az Alföld kiemelkedő pontjai: a Kő-hegy (228 m), a Szár-hegy (227 m), a Ólom-hegy (172 m), a Hoportyó (183 m). Legmélyebb pontja Gyálarétnél 75,5 m.
A szöveg alapos tanulmányozása után válaszolj a kérdésekre!

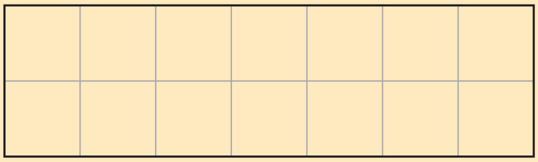
a) Hány hektár az Alföld területe?
b) Rakd növekedő sorrendbe az Alföld kiemelkedő pontjait!
c) Mennyivel magasabb a Kő-hegy a felsorolt magaslatok legalacsonyabbjánál?
d) Mekkora a szintkülönbség Gyálarét és a Kő-hegy között?
e) Lehet-e nagyobb az Alföldnél az Északi-középhegység és a Dunántúli-középhegység együttes területe?



Egy síkidom területét úgy határozzuk meg, hogy megmondjuk, hányszorosa a területe az általunk választott területegységnek.

1. példa

Hány négyzetcentiméter az ábrán látható téglalap területe?



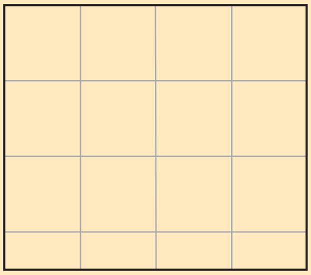
Megoldás

A téglalap pontosan 14 db 1 cm^2 területű négyzettel lefedhető. Vagyis a területe 14 cm^2.
Egy sorban 7 db 1 cm^2 területű négyzet látható. Két ilyen sort raktunk ki, így $2 \cdot 7 = 14$ db 1 cm^2 területű négyzettel tudjuk lefedni a téglalapot.
A lefedés végrehajtása nélkül is meg tudtuk mondani a téglalap területét.

A téglalap területének mérőszámát megkapjuk, ha két szomszédos oldal hosszának mérőszámát összeszorozzuk.
Jelölése általában t vagy T.

2. példa

Hány négyzetcentiméter az ábrán látható téglalap területe?



Megoldás

A szomszédos oldalak mérőszámainak szorzata: $4 \cdot 3{,}5 = 14$. Mindkét oldalt centiméterben mértük, így a téglalap területe:
$T = 14$ cm^2.
Ezt kapjuk lefedéssel is. A téglalap 12 db 1 cm^2 területű négyzettel és 4 db „félnégyzettel” fedhető le. Vagyis a területe valóban 14 cm^2.

Ez a megállapítás minden téglalapra alkalmazható.

Az *a* és *b* oldalhosszúságú téglalap területe: $T = a \cdot b$.

A négyzet olyan téglalap, amelynek minden oldala egyenlő hosszúságú. A téglalapra tett megállapításunkat alkalmazhatjuk a négyzetre is.

Az *a* oldalhosszúságú négyzet területe: $T = a \cdot a$.

A terület kiszámításánál figyelj arra, hogy az oldalak hosszát azonos mértékegységgel fejezd ki!
A szorzás jelét elhagyva ilyen alakban is találkozhatsz ezekkel a területképletekkel:
$T = ab$,
$T = a^2$ (kiolvasva: a a másodikon, vagy a a négyzeten, vagy a négyzet).

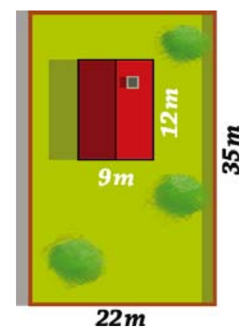
Feladatok

1. Számítsd ki a téglalap területét, ha oldalainak hossza:
a) 82 cm és 31 cm; *b)* 210 mm és 871 mm;
c) 20 cm és 11 dm; *d)* 0,012 km és 120 dm!

2. Számítsd ki a téglalap ismeretlen oldalának hosszát!
a) $a = 13$ cm, $T = 312$ cm^2; *b)* $a = 28$ mm, $T = 868$ mm^2;
c) $a = 15$ cm, $T = 3$ dm^2; *d)* $a = 44$ mm, $T = 11$ cm^2.

3. Mekkora a négyzet területe, ha
a) $K = 356$ cm; *b)* $K = 4000$ mm?

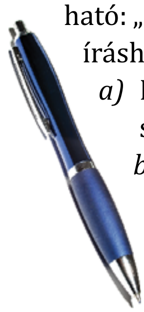
4. Egy téglalap kerülete 18 cm.
a) Megmondható-e, hogy mekkora területű?
b) Elképzelhető, hogy 20 cm^2 a területe?
c) Elképzelhető, hogy csak 8 cm^2 a területe?



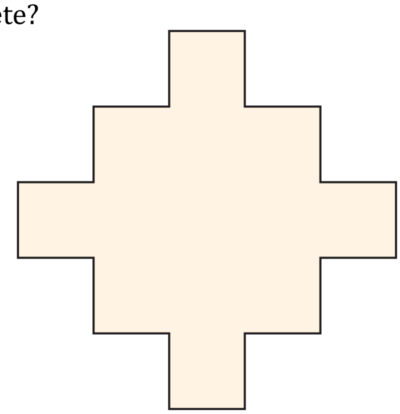
5. Egy 22 méter széles, 35 méter hosszú, téglalap alakú telekre egy 9 méter széles, 12 méter hosszú házat építenek.
a) Mekkora részt foglal el a ház a telekből?
b) Mekkora lesz a ház körüli udvar?

6. Egy 6 m széles, 9,5 m hosszú tanterem alapterületének harmadát elfoglalják az asztalok, székek, szekrények. Mekkora a tanterem szabad részének területe?

7. Egy golyóstoll csomagolásán a következő szöveg található: „Hazánkban 1966 óta sikeresen gyártott modell, íráshossza 8000 méter."



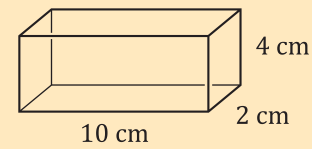
a) Hányszor másolhatjuk le az ábrán látható sokszög körvonalát ezzel a tollal?
b) Hány km^2 területű a legnagyobb négyzet, amit rajzolhatnánk ezzel a golyóstollal?
c) Nézz utána, hogy kinek a találmánya a golyóstoll!



Kutatómunka

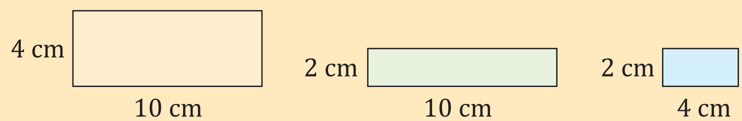
Nézz utána! Milyen széles, milyen hosszú pályán játsszák a futballt, a kézilabdát, a röplabdát, a kosárlabdát? Mekkora a területe ezeknek a pályáknak? Hányszor nagyobb egy focipálya, mint egy kézilabdapálya?

1. példa



Egy téglatest alakú doboz hosszúsága 10 cm, szélessége 4 cm, magassága 2 cm. A doboz minden lapját szeretnénk színes, öntapadós papírral bevonni. Mennyi színes papír szükséges ehhez?

Megoldás



Tudjuk, hogy a téglatestet hat téglalap határolja, amelyek közül a két-két szemközti egybevágó. Vagyis három különböző alakú téglalapot kell bevonnunk. Ezeknek a téglalapoknak az oldalai a téglatest megfelelő éleinek hosszával egyenlők.

A három téglalap területét külön-külön is kiszámíthatjuk:

$T_1 = 10 \cdot 4 = 40\ (\text{cm}^2)$;

$T_2 = 10 \cdot 2 = 20\ (\text{cm}^2)$;

$T_3 = \ \ 4 \cdot 2 = \ \ 8\ (\text{cm}^2)$.

Mivel mindegyikből kettő van, ezért az egyes téglalapok területének a dupláját kell vennünk, és ezeket összeadnunk:

$2 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 8 = 80 + 40 + 16 = 136\ (\text{cm}^2)$.

Számolhattunk volna úgyis, hogy a háromféle téglalap területét összeadjuk, és az így kapott összeget szorozzuk kettővel: $2 \cdot (40 + 20 + 8) = 2 \cdot 68 = 136\ (\text{cm}^2)$.

Vagyis 136 cm^2 színes papírra van szükségünk.

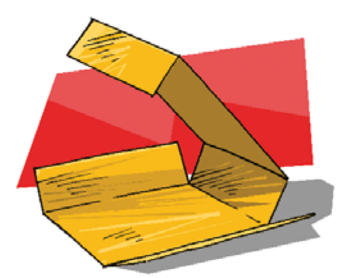
A téglatest felszínét megkapjuk, ha a lapjainak területét összeadjuk.

A latin area szó első betűjét használjuk a felszín jelölésére. A szó jelentése: terület.

A felszín jele: A (szokták F-fel is jelölni).

Az előző számolás eredményét megfogalmazzuk tetszőleges téglatestre is.

Ha a téglatest három különböző élének hossza a, b és c, akkor a felszíne:



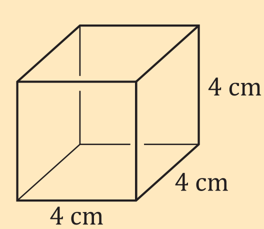
$\boldsymbol{A = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)}$ vagy $\boldsymbol{A = 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot a \cdot c}$.

Szorzásjelek nélkül is írhatjuk:

$\boldsymbol{A = 2(ab + bc + ac)}$ vagy $\boldsymbol{A = 2ab + 2bc + 2ac}$.

Számolás előtt végezz átváltást, ha az élek hosszát nem azonos mértékegységben kaptad!

2. példa



Mekkora a felszíne a 4 cm élű kockának?

Megoldás

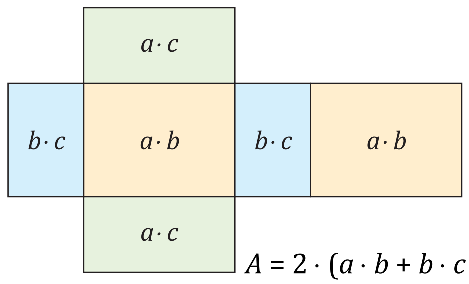
A kocka felszínén hat egybevágó négyzet található. Ezért a kocka felszíne egy négyzet területének a hatszorosával lesz egyenlő:

$A = 6 \cdot (4 \cdot 4) = 6 \cdot 4 \cdot 4 = 96\ (\text{cm}^2)$.

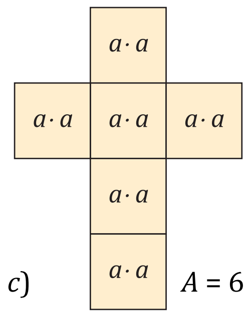
A kocka felszíne 96 cm^2.

20. TÉGLATEST, KOCKA FELSZÍNE

Az a élhosszúságú kocka felszíne: $A = 6 \cdot a \cdot a$.
Ezt írhatjuk ilyen alakban is: $A = 6a^2$.
A téglatest és a kocka felszínét jól láthatóvá tesszük, ha lerajzoljuk a hálózatukat.
A felszín egyenlő a hálózat területével.



$A = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$



$A = 6 \cdot a \cdot a$

Feladatok

1. Mekkora a téglatest felszíne?
a) $a = 34$ mm, $b = 19$ mm, $c = 6$ mm;
b) $a = 45$ cm, $b = 20$ cm, $c = 14$ cm;
c) $a = 0{,}5$ m, $b = 2{,}1$ dm, $c = 32$ cm;
d) $a = 160$ mm, $b = 8$ cm, $c = 0{,}11$ m.

2. Mekkora a kocka felszíne?
a) $a = 24$ mm;
b) $a = 35$ cm;
c) $a = 121$ cm;
d) $a = 0{,}5$ m.

3. Milyen hosszú lehet a kocka éle?
a) $A = 600$ cm^2;
b) $A = 384$ dm^2;
c) $A = 864$ mm^2;
d) $A = 1{,}5$ m^2.

4. Képzelj el egy 9000 km élű kockát. Hasonlítsd össze felszínének nagyságát a Föld felületének nagyságával! (A Föld felülete 510 millió km^2.)

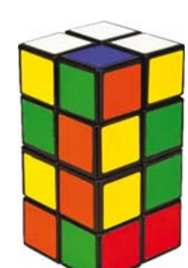
5. Vegyük a Hold felszínét 37 500 000 km^2-nek (ennél valójában egy kicsit nagyobb). Mekkora kockának lenne ugyanekkora a felszíne?

6. Mekkora a felszíne a kockának, ha az éleinek összege 312 cm?

7. Dobókockáink oldallapjai 1 cm^2 területűek. Mekkora felszínű téglatest rakható ki 15 darab dobókockából?

8. Egy 256 cm^2 felületü téglatestnek van 12 cm és 4 cm hosszúságú éle is.
Mekkora a harmadik él hossza?

9. A képen látható Rubik-torony tizenhat kiskockából áll.
A torony felszíne 193,6 cm^2.
a) Milyen magas a torony?
b) Mekkora a torony kék lapjának a területe?
c) Mekkora lenne egy kis kocka felszíne?



A TÉRFOGAT MÉRÉSE 21.

A testeknek három kiterjedésük van: **hosszúság**, **szélesség** és **magasság**. Fontos annak a számszerű kifejezése, hogy a testek a tér mekkora részét foglalják el. Ezt a **térfogat** adja meg. A térfogat nagyságát a hosszúság, a szélesség és a magasság befolyásolja, így a térfogatmérés a hosszúságmérésre vezethető vissza. Az edények, poharak, tartályok esetén a belső üres rész nagysága a fontos. Ezt a belső térfogatot **űrtartalom**nak is szoktuk nevezni.

A méréshez egységet kell választanunk.

Az egység oldalú kocka térfogata 1 térfogategység.

A kocka éle lehet 1 mm, 1 cm, 1 dm, 1 m, 1 km hosszúságú.

Ezeknek a kockáknak a térfogata

1 mm³ (1 köbmilliméter),
1 cm³ (1 köbcentiméter),
1 dm³ (1 köbdeciméter),
1 m³ (1 köbméter),
1 km³ (1 köbkilométer).

1 dm

1 cm

A térfogat mértékegységei közötti kapcsolatok:

$1\ mm^3 < 1\ cm^3 < 1\ dm^3 < 1\ m^3 < 1\ km^3$

$\cdot\ 1000 \quad \cdot\ 1000 \quad \cdot\ 1000 \quad \cdot\ 1\,000\,000\,000$

Az 1 dm³ térfogatú edény űrmértéke az **1 liter**, vagyis

1 liter = 1 dm³.

A már tanult előtagokat a literrel együtt is használhatjuk. Így további mértékegységeket kapunk: milliliter, centiliter, deciliter, liter, hektoliter. (Nem használatos a dekaliter és a kiloliter.)

Az előtagok jelentése alapján a következő kapcsolatokat állapíthatjuk meg:

1 ml < 1 cl < 1 dl < 1 l < 1 hl

$\cdot\ 10 \quad \cdot\ 10 \quad \cdot\ 10 \quad \cdot\ 100$

Feladatok

1. Fejezd ki három különböző mértékegységgel az edények térfogatát, ha ismerjük az űrtartalmukat:
a) fél literes szörpös üveg; *b)* 2 deciliteres pohár; *c)* másfél hektoliteres hordó!

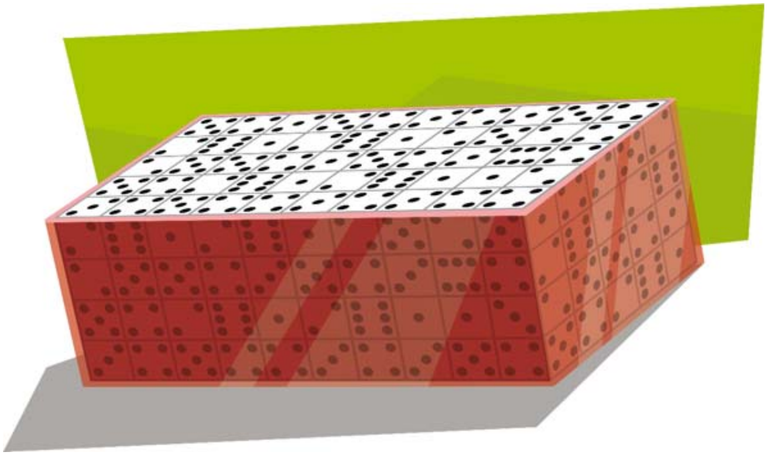
2. *a)* Add meg literben: 13 hl; 440 dl; 37 500 cl; 900 ml!
b) Add meg deciliterben: 23 l; 0,5 hl; 800 cl; 56 000 ml!

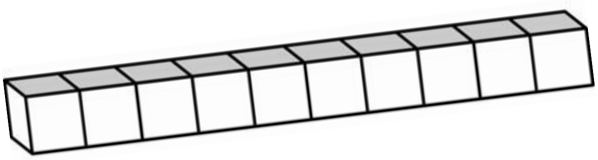
3. Mennyit kell hozzáadni, hogy 12 dm³ legyen?
a) 23 cm³; *b)* 12 000 mm³; *c)* 210 cm³; *d)* 2000 mm³.

4. Egy étterem konyháján két 3 literes étolajat bontottak ki. Az egyikből elhasználtak fél litert, a másikból pedig 14 decilitert. Hány deciliter étolaj maradt összesen?

5. Keress az űrmérték és a térfogat mértékegységei között egyenlőket!

22. TÉGLATEST, KOCKA TÉRFOGATA





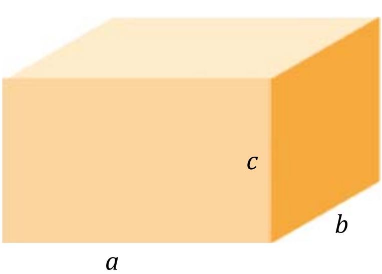
1. példa

László egy 5 cm széles, 10 cm hosszú, 4 cm magas, téglatest alakú dobozban tartja az 1 cm élű dobókockáit. Ez a doboz teljesen tele van. Hány darab dobókocka van a dobozban? Mekkora a doboz térfogata?

Megoldás

Egy sor 10 darab kockából rakható ki. Egy réteget 5 sor alkot, ezért ehhez $5 \cdot 10$, azaz 50 darab kockára van szükség. A doboz 4 cm magas, így 4 réteggel tudjuk megtölteni a dobozt. Vagyis $4 \cdot 50$, azaz 200 darab dobókocka van a dobozban.
Anélkül, hogy valóban elhelyeztük volna az 1 cm^3 térfogatú kockákat a dobozban, meg tudtuk állapítani a darabszámukat: $5 \cdot 10 \cdot 4$, ami 200.
A doboz térfogata 200 cm^3.

A téglatest térfogatát megkapjuk, ha a téglatest egy csúcsából kiinduló három élének hosszát összeszorozzuk.
A térfogat jele: *V*. (A latin volumen szó térfogatot jelent.)



Vigyázz! Ha az élek hosszát különböző mértékegységekben kaptad, akkor a számolás előtt váltsd át ezeket közös mértékegységre!
Ha a téglatest egy csúcsból induló három élének hossza a, b és c, akkor a téglatest térfogata:

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

A térfogatképletet a szorzásjelek nélkül is írhatjuk: $V = abc$.

2. példa

Számítsuk ki annak a kockának a térfogatát, amelynek az élei 4 cm hosszúak?

Megoldás

A kocka alakú doboz térfogatát az előző összefüggést felhasználva kapjuk meg. A doboz térfogata: $V = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ (cm^3).

Általában is mondhatjuk, hogy az a élhosszúságú kocka térfogata:

$$V = a \cdot a \cdot a.$$

Írhatjuk ilyen alakban is: $V = a^3$. (Kiolvasva: a a harmadikon vagy a a köbön.)

Feladatok

1. Számítsd ki a téglatest térfogatát!

a) $a = 19$ cm, $b = 12$ cm, $c = 38$ cm; *b)* $a = 30$ mm, $b = 16$ mm, $c = 28$ mm;
c) $a = 6$ m, $b = 32$ dm, $c = 750$ mm; *d)* $a = 700$ cm, $b = 60$ dm, $c = 16$ m.

2. Határozd meg a téglatest hiányzó élhosszát!

a) $V = 320\ \text{cm}^3$, $b = 5$ cm, $c = 8$ cm; *b)* $V = 360\ \text{cm}^3$, $b = 8$ cm, $c = 75$ mm;
c) $V = 1\,092\,000\ \text{cm}^3$; $b = 7$ m, $c = 13$ dm; *d)* $V = 2400\ \text{dm}^3$, $b = 80$ cm, $c = 1{,}2$ m.

3. Állapítsd meg a kocka térfogatát!

a) $a = 12$ dm; *b)* $a = 34$ cm; *c)* $a = 220$ mm; *d)* $a = 13$ m.

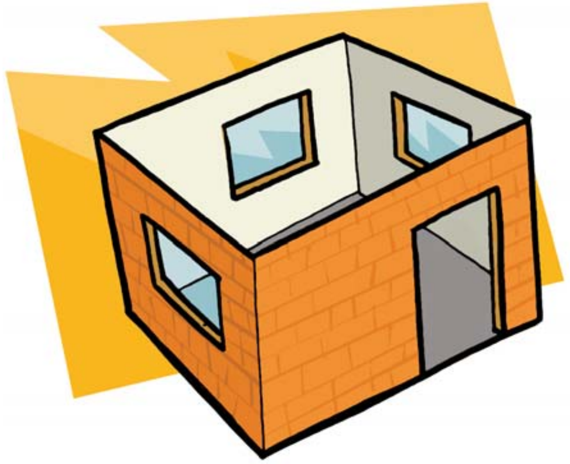
4. Mekkora az élhossza a kockának? Próbálj ki néhány számot!

a) $V = 125\ \text{mm}^3$; *b)* $V = 64\ \text{cm}^3$; *c)* $V = 1000\ \text{dm}^3$; *d)* $V = 1331\ \text{m}^3$.

5. Egy kocka alakú láda tetejét pontosan letakarja egy $81\ \text{dm}^2$ nagyságú terítő. Mekkora a láda térfogata?

6. Egy desszertes doboz a $308\ \text{cm}^2$ területű lapjával érintkezik az asztallal. Az ezzel párhuzamos lap 3 cm-re van az asztallaptól. Mekkora a doboz térfogata?

7. Egy téglatest alakú szobában $105\ \text{m}^3$ levegő fér el. Határozd meg a terem adatait, ha az élek méterben mérve egész számok!



8. Egy téglatest alakú dobozban narancslét vásároltunk. A doboz két élének a hossza: 8 cm, 8 cm. Milyen magas lehet a doboz, ha a felirata szerint 1 liter narancslé van benne?

1. példa

Egy 4 méter széles, 5 méter hosszú és 2,7 méter magas szobát szeretnénk kifestetni és parkettáztatni. A parkettát 2,15 m^2-es csomagokban árusítják. A festékek közül a falakra a gyömbér cseppek, a plafonra a ragyogó gyöngyház színt választottuk. A festékek 5 literes és 2,5 literes dobozokban vásárolhatóak meg. A használati utasítás szerint érdemes a felületeket kétszer átkenni a falfestékkel, és 1 liter festék 14 m^2-re elegendő. Hány csomag parkettát és hány doboz festéket kell vásárolnunk? (Az ajtó és az ablak nagyságával nem kell foglalkoznunk!)

Megoldás

A szoba alapterülete: $4 \cdot 5 = 20$ (m^2).
Mivel egy csomag parketta 2,15 m^2, ezért 10 csomag 21,5 m^2.
Vagyis 10 csomag parkettát kell vennünk (a 9 csomag kevés).

A szoba alapterületével egyenlő a plafon területe. A ragyogó gyöngyház festékkel a használati utasítás szerint $2 \cdot 20$, azaz 40 m^2 felületet kell befestenünk a plafonon.

Mivel 1 liter festék 14 m^2-re elegendő, ezért a 2,5 literes $14 \cdot 2{,}5 = 35$ m^2-re, az 5 literes pedig $14 \cdot 5 = 70$ m^2-re elegendő.
A 40 m^2-re meg kell vennünk az 5 literest ebből a festékből.

A függőleges falakat a gyömbér cseppek színnel fogjuk festeni. A szemközti falak egybevágóak, ezért a festendő felület:

$A = 2 \cdot (4 \cdot 2{,}7 + 5 \cdot 2{,}7) = 2 \cdot 9 \cdot 2{,}7 = 18 \cdot 2{,}7 = 48{,}6$ (m^2).

Mivel ezt is kétszer kell festeni, ezért ez 97,2 m^2 festendő felületet jelent. Erre nem elég az 5 literes doboz. Tehát egy 5 literes és egy 2,5 literes festéket kell ebből a színből vásárolnunk.

2. példa

Építkezésnél nagyon fontos, hogy a szobákba megfelelő fűtőtestet szereljenek fel. Minden helyiségnek megvan a megfelelő hőigénye. Nem érdemes a kelleténél nagyobb teljesítményű fűtőtestet vásárolni, hiszen azok drágábbak, és több helyet foglalnak. Szakemberek szerint a helyiség alapterületét szorozzuk meg a szoba magasságával, és az így kapott számot szorozzuk meg 40-nel. Olyan fűtőtestet érdemes venni, amelynek a teljesítménye (wattban mérve) ehhez a számhoz a legközelebb van. Egy 3 méter széles, 4 méter hosszú, 2,7 méter magas szobába az 1000 wattos vagy a 1300 wattos teljesítményű fűtőtestet vegyük-e meg?

Megoldás

A 3 méter széles, 4 méter hosszú szoba alapterülete 12 m^2.
Ezt megszorozzuk a szoba magasságával, ekkor megkapjuk a szoba térfogatát:

$V = 12 \cdot 2{,}7 = 32{,}4$ (m^3).

A szakemberek tanácsa szerint ennek a számnak a 40-szeresét kell vennünk:

$32{,}4 \cdot 40 = 1296$.

Ehhez a számhoz az 1300 van közelebb, ezért az 1300 wattos fűtőtestet kell megvásárolni.

Feladatok

1. Daniék vásároltak egy 20 méter széles és 25 méter hosszú hétvégi telket. Szeretnék körbekeríteni. A kerítésoszlopokat ötméterenként kell elhelyezni. Hány darab oszlopra lesz szükségük?

2. Az előző feladatban szereplő telekre elhelyeznek egy 64 m^2-es faházat. Mekkora rész marad beépítetlenül?

3. Öt darab dobókockából egy négyzetes oszlopot építünk. Hány darab pötty lehet minimum és maximum a felületén?

4. Egy medence szélessége 12 méter, a hossza 50 méter, a víz mélysége mindenütt 2 m. Hány hektoliter vízzel töltötték meg?

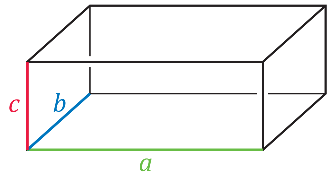
5. A kedvenc könyvedet olvasás előtt szeretnéd becsomagolni. Tervezd meg, hogy mekkora papírra lenne szükséged! A könyv 2 cm vastag, a borítója pedig 16 cm-szer 23 cm-es.

6. Egy mélygarázs építésénél egy 40 méter széles és 60 méter hosszú területről 15 méter mélyen elszállították a földet. A szállítást olyan teherautókkal végezték, amelyekre 6 m^3 földet lehetett rakni. Hány fordulóval tudták elszállítani ezt a mennyiséget?

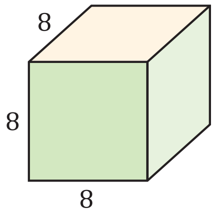
24. ÖSSZEFOGLALÁS

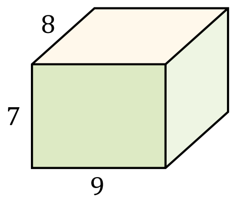
Ebben a fejezetben megismerkedtünk néhány fontos geometriai fogalommal. Ezekről már korábban is hallhattál. Ezeket az ismereteket felelevenítettük, kiegészítettük. A következő kérdések megválaszolása segít végiggondolni, hogy miről tanultunk az előző órákon.

1. Hogyan kapunk félegyenest, szakaszt, félsíkot?
2. Hogyan különbözteted meg egymástól a test élét és az átlóját?
3. Ha az a egyenes párhuzamos a b egyenessel, és a b egyenes párhuzamos a c egyenessel, akkor mit mondhatsz az a és a c egyenes viszonyáról?
4. Ha az e egyenes merőleges az f egyenesre, és az f egyenes merőleges a g egyenesre, akkor mit mondhatsz az e és a g egyenes viszonyáról?
5. Ha két egyenesnek nincs közös pontja, akkor azok biztosan párhuzamosak egymással?
6. Sorold fel a téglalap legfontosabb tulajdonságait!
7. Hány közös pontja lehet két különböző síknak?
8. Ha a téglatest éleit összeadjuk és eredményül 160 cm-t kapunk, akkor mennyi az egy csúcsba befutó három él hosszának az összege?



$a + b + c = ?$





9. Hány centiméter hosszú egy oldala a 2016 cm kerületű szabályos háromszögnek?
10. Hány centiméter hosszú egy oldala a 2016 cm kerületű négyzetnek?
11. Magyarázd el, mi a különbség a szelő és a húr között!
12. Magyarázd el a különbséget a körszelet és a körcikk között!
13. Milyen ABC háromszöget kapunk, ha az AB szakasz felezőmerőlegeséről választunk egy C pontot?
14. Az a oldalú négyzet, valamint a b és c oldalú téglalap kerülete egyenlő. Mi lehet a nagyságrendi sorrend a három oldal hossza között?
15. A 8 cm élű kocka vagy a 7 cm, 8 cm, 9 cm élű téglatest térfogata a nagyobb?
16. Egy téglatest egyik lapátlója 10 cm. Milyen hosszú a vele párhuzamos lapátló?

Feladatok

A következő 11 feladatra adott válaszok közül csak egy helyes! Melyik az?

1. Egy test lapjainak a száma nem lehet
A: 5; B: 4; C: 3.

2. Ha *AB* szakasz hossza 14 mm, és *BC* szakasz hossza 1,1 cm, akkor *AC* szakasz hossza nem lehet
A: 25,1 mm; B: 3 mm; C: 25 mm.

3. Három hegyesszög összege
A: lehet teljes szög; B: lehet 270°; C: lehet 180°.

4. Ha α = 76°44’12”, akkor a $2 \cdot \alpha$
A: homorú szög; B: 152° 24’ 24”; C: nem egyenesszög.

5. Egy konvex sokszögben berajzoltuk az egyik csúcsból húzható összes átlót. Ezek száma 12. Hány csúcsa van a sokszögnek?
A: 12; B: 14; C: 15.

6. Egy legelőn elkerítettek egy (konvex) tízszög alakú területet. Az egyik csúcsból az összes átló mentén is karámokat hoztak létre, és az így kialakított területek mindegyikében pontosan egy ló legel. Ekkor a lovak száma:
A: 10; B: 8; C: 7.

7. Egy ház homlokzatára reklámszöveget festettek. A szövegben szerepel egy 120 cm magas és 80 cm széles nyomtatott nagy L betű. A betű mindkét szára egy-egy 22 cm széles téglalapból áll. Mekkora felületet foglal el ez a betű a falon?
A: 39,16 dm^2; B: 44 dm^2; C: 4884 cm^2.

8. Egy 18 cm-szer 28 cm-es könyvben az utolsó oldalra a 220-as oldalszám kerülne. Hány m^2-es szobát lehetne lefedni a könyv lapjaival?
A: 55 440; B: 5,544; C: 11,088.

9. Egy gyufaszál 4 cm magas négyzetes oszlopnak tekinthető. Az oldallapjai 2 mm szélesek. Egy dobozban a felirat szerint 43 gyufaszál található. Mekkora a térfogata a dobozban található gyufaszálaknak?
A: 6,88 mm^3; B: 6880 cm^3; C: közel 7 cm^3.

10. Kartonpapírból elkészítettük egy felülről nyitott, téglatest alakú doboz hálózatát. A téglatest éleinek hossza: 2 cm, 3 cm, 6 cm. Mennyi nem lehet a hálózat területe?
A: 54 cm^2; B: 66 cm^2; C: 72 cm^2.

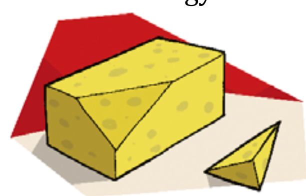
11. Egy kocka éleinek hossza egész centiméter. A felszíne lehet
A: 75 cm^2; B: 128 cm^2; C: 150 cm^2.

12. Hány részre vágja az egyenest az egyenesre illeszkedő három pont? Mi a kapott részek neve?

13. Rajzolj négy pontot úgy, hogy
a) egy egyenesre illeszkedjenek;
b) semelyik három ne legyen egy egyenesen;
c) pontosan három illeszkedjen egy egyenesre!

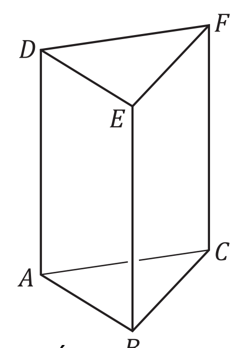
14. Hány részt kaphatnál, ha a képen látható tortát
a) két; *b)* három sík mentén szétvágnád?

15. A képen egy tömb sajtot szemléltetünk, aminek levágták egy sík mentén az egyik sarkát.
a) Hány csúcsa, éle, lapja van a levágott testnek?
b) Van-e lapátlója a levágott testnek?
c) Van-e testátlója a levágott testnek?



16. Rajzold le azokat a nyomtatott nagybetűket, amelyek segítségével szemléltetheted a
a) párhuzamos szakaszokat; *b)* merőleges szakaszokat!

17. A képen egy test hálózatát látod. Add meg azokat az éleket, amelyek
a) az AB éllel párhuzamosak; *b)* az AB élre merőlegesek;
c) az AB éllel kitérők!



18. Igazak-e a következő állítások?
a) Minden téglalap négyzet.
b) Nincs olyan téglalap, amelyik négyzet.
c) Ha a téglalap minden oldala ugyanolyan hosszúságú, akkor az négyzet.
d) Ha a téglalap két átlója merőleges egymásra, akkor az négyzet.
e) Van olyan négyzet, amelynek az átlói különböző hosszúságúak.
f) Ha egy négyszögben minden szomszédos oldal merőleges egymásra, akkor az négyzet.

19. Hány különböző alakú tömör téglatest építhető
a) 9 darab; *b)* 30 darab egyforma kockából?

20. A pékségben szeletelve vettünk egy kenyeret. Összesen 14 szeletre vágta az eladó.
a) Hány darab vágással tehette ezt meg?
b) Milyen helyzetűeknek tekinthetők ezek a vágások?

21. Egy kockát három sík mentén kiskockákra vágtunk szét.
a) Milyen helyzetűek ezek a síkok egymáshoz képest?
b) Hány kiskockát kaptunk így összesen?

22. Igazak-e a következő állítások?
a) Minden háromszög konvex. *b)* Van olyan sokszög, amelyiknek nincs átlója.
c) A hatszögeknek hat oldala van. *d)* A konvex hatszögeknek hat átlója van.
e) Az ötszögeknek öt csúcsa van. *f)* A konvex ötszögeknek öt átlója van.

23. Rajzolj a füzetedbe egy *K* pontot.
a) Színezd zöldre azokat a pontokat, amelyek a *K* ponttól 5 mm-nél távolabb, de 12 mm-nél közelebb vannak!
b) Színezd pirosra azokat a pontokat, amelyek a *K* ponttól 5 mm-re, vagy 12 mm-re vannak!
c) Színezd barnára azokat a pontokat, amelyeket korábban vagy zöldre, vagy pirosra színeztél! Fogalmazd meg röviden, hogy mely pontok lettek barnák!

24. *a)* Keresd meg a földgömbön az Egyenlítőt, a Ráktérítőt és a Baktérítőt! Milyen vonalat alkotnak ezek a gömbön?
b) Ha az iskolai földgömbön az Északi- és a Déli-sark 42 cm-re van egymástól, akkor mekkora a gömb sugara?

25. Rajzolj a füzetedbe egy tetszőleges sugarú kört! Rajzolj egy *AB* és egy *CD* húrt is a körbe, de vigyázz, hogy ne legyenek párhuzamosak egymással! Szerkeszd meg az *AB* és a *CD* szakasz felezőmerőlegesét! Hol metszi egymást ez a két egyenes?

26. Végy fel a füzetedbe egy tetszőleges hosszúságú szakaszt! Szerkessz egy olyan téglalapot, amelyiknek ez a hosszú oldala, a rövid oldal pedig ennek a felével egyenlő!

27. Végy fel a füzetedbe egy tetszőleges hosszúságú szakaszt! Szerkessz szakaszt, amelyiknek a hossza ennek a felével, illetve a háromnegyedével egyenlő! Szerkessz háromszöget, amelyiknek az oldalai ezeknek a szakaszoknak a hosszával egyenlő!

28. Mindig tudnál háromszöget szerkeszteni egy téglatest három egy csúcsból induló élének felhasználásával? Próbáld ki például egy gyufásdobozzal!

29. Rajzolj a füzetedbe vonalzó és szögmérő segítségével 70°-os, 110°-os 160°-os, 195°-os, 280°-os szöget! A legkisebbnek szerkeszd meg a szögfelezőjét is!

30. Add össze párosával a megadott szögeket!
a) 27°, 57°, 102°;
b) 49°, 112°, 127°;
c) 11°30', 36°30', 19°40';
d) 42°40', 51°20', 108°50';
e) 11°29'30", 23°30'30", 72°10';
f) 20°25'40", 32°40', 88°.

31. Mekkora az *a* oldalhosszúságú négyzet kerülete?
a) $a = 24$ cm;
b) $a = 23{,}5$ dm;
c) $a = 12$ m;
d) $a = 41$ mm.

32. Mekkora a téglalap kerülete, ha az egyik oldala *a*, a mások oldala *b* hosszúságú?
a) $a = 19$ cm, $b = 31$ cm;
b) $a = 23{,}5$ mm, $b = 36{,}5$ mm;
c) $a = 46$ dm, $b = 102$ dm;
d) $a = 27$ m, $b = 306$ m.

33. Írd le a füzetedbe a hiányzó mérőszámokat!
a) 9 cm² = ... mm²;
b) 29 dm² = ... cm²;
c) 0,9 m² = ... dm²;
d) 0,005 km² = ... m²;
e) 3 ha = ... m²;
f) 27 000 m² = ... ha;
g) 16 cm² = ... mm²;
h) 0,03 m² = ... dm².

34. Írd le a füzetedbe a hiányzó mértékegységeket!

a) $23\ cm^2 = 2300$ … ; *b)* 250 a = 2,5 … ; *c)* 400 ha = 4 … ; *d)* $30\,000\ cm^2 = 3$ … ;
e) $1400\ dm^2 = 14$ … ; *f)* $333\ m^2 = 3{,}33$ … ; *g)* $0{,}2\ dm^2 = 0{,}002$ … ; *h)* $46\,000\ mm^2 = 4{,}6$ … .

35. Mekkora az *a* oldalhosszúságú négyzet területe?

a) $a = 57$ cm; *b)* $a = 46$ dm; *c)* $a = 150$ m; *d)* $a = 600$ mm.

36. Mekkora a téglalap területe, ha az egyik oldala *a*, a mások oldala *b* hosszúságú?

a) $a = 25$ cm, $b = 35$ cm; *b)* $a = 20$ mm, $b = 350$ mm;
c) $a = 38$ dm, $b = 120$ dm; *d)* $a = 12$ m, $b = 360$ m.

37. *a)* Ha egy 120 hektáros téglalap alakú szántóföld egyik oldalának hossza 1,5 km, akkor a másik oldala milyen hosszú?

b) Ha egy 480 méter kerületű téglalap alakú kert egyik oldala 76 méter, akkor a másik oldala milyen hosszú?

c) Mekkora a 100 hektáros négyzet alakú legelő oldalának hossza?

d) Mekkora a 244 méter kerületű négyzet alakú park oldalának hossza?

38. Írd le a füzetedbe a hiányzó mérőszámokat!

a) $7\ cm^3 = \ldots\ mm^3$; *b)* $26\ dm^3 = \ldots\ cm^3$; *c)* $0{,}4\ m^3 = \ldots\ dm^3$; *d)* $0{,}00007\ km^3 = \ldots\ m^3$;
e) $30\ mm^3 = \ldots\ cm^3$; *f)* $4800\ m^3 = \ldots\ dm^3$; *g)* $190\ cm^3 = \ldots\ mm^3$; *h)* $0{,}002\ m^3 = \ldots\ dm^3$.

39. Írd le a füzetedbe a hiányzó mérőszámokat!

a) 230 ml = … cl; *b)* 4800 ml = … dl; *c)* 3300 hl = … l; *d)* 24 l = … cl;
e) 370 cl = … ml; *f)* 5200 ml = … l; *g)* 5300 l = … hl; *h)* 124 dl = … hl.

40. Mekkora az *a* élhosszúságú kocka felszíne és térfogata?

a) $a = 11$ mm; *b)* $a = 48$ cm; *c)* $a = 15$ dm; *d)* $a = 60$ m.

41. Mekkora a téglatest felszíne és térfogata, ha élei *a*, *b* és *c* hosszúságúak?

a) $a = 15$ cm, $b = 36$ cm, $c = 65$ cm; *b)* $a = 20$ m, $b = 35$ m, $c = 77$ m.

42. Egy 14 méter széles és 33 méter hosszú medencében 250 cm a vízmélység. Hány hektoliter víz van a medencében?

43. A vízóráról leolvasható szám m^3-t jelent. A vízóra felszereléskor 0-ról indult és most 267-es számot mutat. Az órán látott adat hány liter víz fogyasztását mutatja?

44. Józsi megnézte hazánk csapadék viszonyait bemutató térképét. Megállapította, hogy lakóhelyén átlagosan 600 mm csapadék hullik. Hány hektoliter csapadékot jelent ez éves viszonylatban a 300 m^2-es területű kiskertjében?

V. Helymeghatározás, sorozatok

– Hol vagyunk? – dörzsölgette a szemét álmosan Zsombi, mert kicsit hosszúra nyúlt az előző esti csapatjáték.
– Nem tudom, kérdezd le a wikikompon! – mormogta fogai között Okoska, aki szintén csak félig nyitotta ki a szemét.
Zsombi álmosan kecmergett ki az ágynak nevezett alvóhevederekből, és rátenyerelt a kezelőpanelre.
– Hol vagyunk? – ismételte meg a kérdést, de most már a wikikomp érzékelőjéhez.
– Az űrben. De a kérdésből arra következtetek – hangzott a számítógép kimért válasza –, hogy azt szeretnéd tudni, milyen messze vagyunk a Földtől? T-71:12:40, azaz 71 óra 12 perc és 40 másodperc van hátra a landolásig.
– Ajaj! 71 óra… Már csak három nap – mormogta, és az esti kakaó által rajzolt szomorkás bajusz hűen tükrözte a gondolatait. – Honnan tudod ilyen pontosan?
– Hasonló az eljárás, mint a földi navigációs rendszereknél, csak képzeld el nagyobb méretekben. A Gaia űrszonda sokmillió csillag pontos helyét mérte meg, ezeket az adatokat ismerem. A Föld és a Hold körül is keringenek olyan műholdak, amelyek pozíciója nagyon pontosan ismert. Ha tudjuk a távolságukat és az irányaik által bezárt szögeket, akkor ezekből az adatokból kiszámítható a mi helyünk a világűrben. Nekem már csak annyi a dolgom, hogy a hajtóművek segítségével az előre meghatározott pályán tartsam a hajót, ehhez mérések sorozatát hajtom végre, és...
– Három nap – suttogta Zsombi félálomban, miközben lekapcsolta a wikikompot és elindult a mosdó felé, hiszen aludni ráér majd otthon is.

1. HELYMEGHATÁROZÁS SZEREPE KÖRNYEZETÜNKBEN

Csoportmunka

Játsszatok a tanteremben labirintusjátékot! Készítsetek a rendelkezésre álló eszközökből egy akadálypályát, amin egy bekötött szemű társatokat kell átjuttatni anélkül, hogy hozzáérnétek! Csak szöveggel utasíthatjátok!
Milyen szavak hangzottak el a leggyakrabban? Melyik utasítás volt a legjobban követhető?

A tájékozódásnak fontos szerepe van az életünkben. Ehhez jól meghatározott, egyezményes jelekre van szükségünk.

A Földön is fontos a helymeghatározás, ezt segíti a fokhálózat. A földgömbre egy vízszintes és függőleges körökből álló rácsot képzelünk, melynek segítségével azt adjuk meg, hogy az Egyenlítőtől hány fokkal vagyunk északra vagy délre, illetve Greenwich-től hány fokkal vagyunk keletre vagy nyugatra.

Ezeket az adatokat képes meghatározni és feldolgozni a járművekben is használt navigációs rendszer, a GPS.

1. példa

Ha valamilyen rendezvényre megyünk, legtöbbször előre meghatározott helyre kell leülnünk. Honnan tudja az alábbi mozijegy tulajdonosa, hogy melyik székre szól a jegye? Mi az, ami mindig szerepel egy belépőjegyen?

Megoldás

Leolvasható a jegyről, hogy melyik napra szól, hány órakor lesz az előadás, mennyibe került, mi az előadás címe.
A terem száma, a sor, és a szék száma segíti a tájékozódásunkat. Így találjuk meg, hogy hová kell ülnünk.
Ez a jegy a 3. terem 8. sorának 11. székére szól.

2. példa

Mikkamakka levelet szeretne írni Szörnyeteg Lajosnak, ezért megnézte barátja névjegykártyáját.
A következő adatokat találta rajta: Szörnyeteg Lajos, Négyszögletű Kerek Erdő, Egyenes fasor 11., 1111
szornyeteg.lajos@kerek.com
Mit és hogyan kell ezekből az adatokból egy postai levélre ráírni?

Megoldás

Szörnyeteg Lajos
Négyszögletű Kerek Erdő
Egyenes fasor 11.
1111

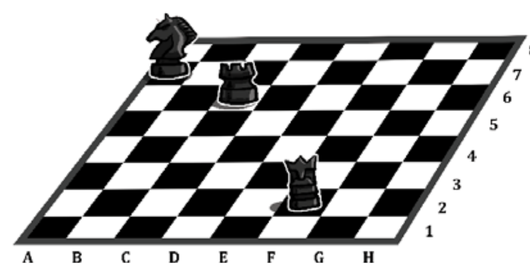
A borítékon szerepelnie kell a címzett nevének, ami most Szörnyeteg Lajos.
Rá kell írni a lakóhely megnevezését, ez most a Négyszögletű Kerek Erdő.
Valamint az utca, tér (vagy egyéb közterület) megnevezését és a házszámot: Egyenes fasor 11.
Végezetül az irányítószámot: 1111.
Csak a helyesen megcímzett borítékot tudja a posta eljuttatni a címzetthez.

Feladatok

1. Az ábra egy játékbolt polcait mutatja.
Arra a kérdésre, hogy „Hol van a maci?”, sokféleképpen válaszolhatunk. Például:
– A cicától eggyel balra.
– A pingvintől hárommal balra és eggyel feljebb.
A kérdés akkor pontosabb, ha azt is megkérdezzük, hogy melyik állathoz képest érdekel bennünket a maci helye. Például:
– Hol van a maci az oroszlánhoz képest?
– Kettővel fölötte és kettővel balra.
Tegyetek fel ilyen kérdéseket az ábra alapján, majd válaszoljátok meg!

2. Valaki gondoljon egy tárgyra a teremből, a többiek pedig próbálják meg kitalálni a helyét olyan kérdésekkel, amelyekben az „alatt”, „fölött”, „jobbra”, „balra” szavak szerepelnek!
Például: A táblától jobbra helyezkedik el? Szemmagasság alatt van?

3. A sakktáblán a bábuk helyének meghatározásához az oszlopokat A–H betűkkel, a sorokat 1–8 számokkal jelölik. A bástya a C6-os mezőn áll.
a) Olvasd le a többi bábu helyét!
b) Hol van a huszár a királyhoz képest?
c) Hol van a bástya a huszárhoz képest?



4. Bendegúz és Baltazár az ábrán jelölt házakban laknak. Megbeszélték, hogy találkoznak a mozi előtt. Írd le a térkép alapján, hogy hogyan kell eljutniuk a mozihoz!

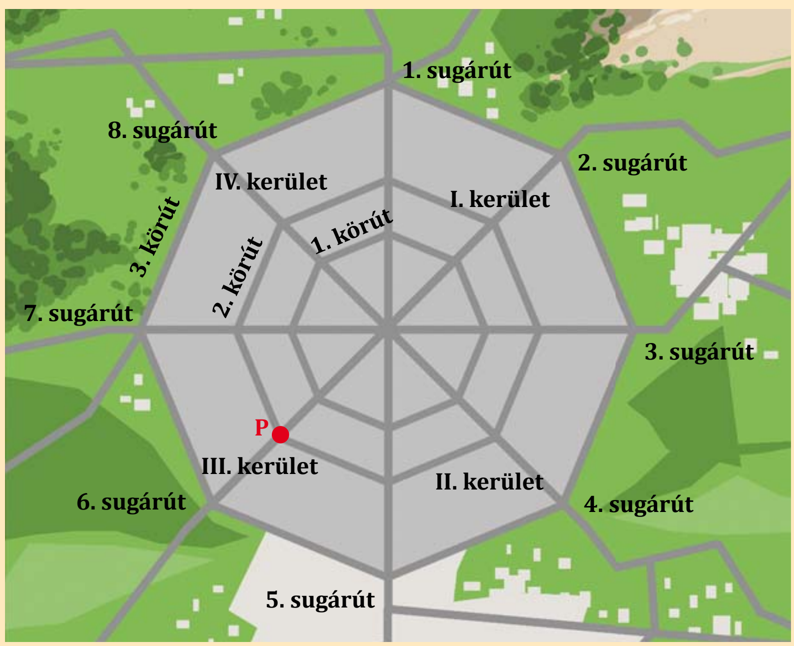
5. Egy tanteremben öt sorban és hat oszlopban ülnek a gyerekek. Az osztályfőnök úgy döntött, hogy a következő ülésrendnél kisorsolja a helyeket. A 15-ös szám kihúzása például azt jelenti, hogy a diáknak az 1. sor (balról) 5. helyére kell ülnie.
a) Csaba és Csongor szeretnének egymás közelében ülni. Csaba kihúzta a 43-as helyet. Sorold fel, mely szám sorsolásának örülne Csongor!
b) Hol ül Csabához képest Cili, aki 26-ost húzott?
c) Sorold fel, milyen számokat nem szeretne húzni Cinna, aki szemüveges, és nem lát jól a hátsó sorból!
d) Milyen cetlit húzhatott az, aki azt mondja: „Kitti és én ülünk az osztály közepén”?

2. HELYMEGHATÁROZÁS

A matematikában szeretjük leegyszerűsíteni a dolgokat, így van ez a tájékozódással is. A következőkben olyan példákat látunk, ahol matematikai módszerekkel és számolásokkal végzünk helymeghatározásokat.

1. példa

Megterveztünk egy új városrészt, Póktelep a neve. Az utcanevek az egyszerűség kedvéért csak sorszámok. A központból északra haladó út az 1. sugárút. Sorban a többi sugárút is látható a térképen. A központtól haladva egyre nagyobb nyolcszögeket rajzolnak ki az utcák. Ezek neve sorban 1. körút, 2. körút, 3. körút. Póktelepet négy kerület alkotja. Az 1. és a 3. sugárút között van az I. kerület, a 3. és az 5. sugárút között van a II. kerület, az 5. és a 7. sugárút között van a III. kerület, a 7. és az 1. sugárút között van a IV. kerület. Az útkereszteződéseket egy számpárral adjuk meg, elsőként a sugárút, másodiknak a körút sorszámát mondjuk.



a) A *P*-vel jelölt hely a Pók pékség. Add meg a helyét röviden!
b) Milyen számpárral lehetne jellemezni a városrész közepét?
c) Mely útkereszteződések vannak a II. és a III. kerület határán?
d) Mely útkereszteződések esnek az I. kerület belsejébe?
e) Adjunk meg néhány útvonalat a kereszteződések említésével, amelyen a (2; 3) kereszteződésből eljuthatunk az (5; 2) kereszteződésbe!

Megoldás

a) A Pók pékség a 6. sugárút és a 2. körút kereszteződésében, a III. kerületben található. Ezt röviden így írjuk: (6; 2).
b) A bevezetett számozáshoz legjobban a (0; 0) számpár illene.
c) A II. és a III. kerület határán lévő kereszteződések: (5; 1), (5; 2), (5; 3).
d) Az I. kerület belsejében lévő kereszteződések: (2; 1), (2; 2), (2; 3).
e) Egy lehetséges útvonal: (3; 3), (4; 3), (5; 3).
Egy másik lehetséges útvonal: (3; 3), (3; 2), (4; 2).

2. példa

A folyókon folyamkilométerben adják meg, hogy milyen messze vagyunk a folyó torkolatától. Ezeket a jelzőtáblákat a part mentén, a vízről is jól láthatóan helyezik el. Egy tiszai evezős túra tervezésekor a világhálón a következő adatokat találtuk:

Település:	Tiszabecs	Szatmárcseke	Tivadar	Lónya	Tuzsér	Tokaj
Folyamkilométer:	744	720	705	651	617	544

a) A túra Tiszabecsnél kezdődne, és Tokajnál fejeződne be. Hány folyamkilométer a két település távolsága?

b) Melyik településhez leszünk legközelebb a túra felénél?

Megoldás

a) A 744-es és az 544-es tábla között 200 folyamkilométer a távolság.

b) A túra felének a hossza 100 folyamkilométer. Vagyis a 744 – 100 = 644 folyamkilométernél leszünk. A megadott táblázat szerint ehhez a Lónya nevű település van a legközelebb.

Feladatok

1. Az 1. példában láttunk két lehetséges útvonalat a (2; 3) kereszteződés és az (5; 2) kereszteződés között. Adjunk meg továbbiakat, ahol szintén csak három kereszteződésen haladunk át!

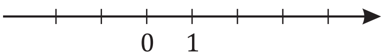
2. Nézd az 1. példa ábráját!
a) Add meg a 2. körút kereszteződéseit!
b) Add meg a 3. sugárút kereszteződéseit!
c) Fogalmazz meg egy észrevételt az előző két rész válaszait látva!

3. A lecke folyamkilométereket tartalmazó táblázata alapján válaszolj!
a) Mennyit haladtunk, ha Szatmárcsekétől eljutottunk Tuzsérig?
b) Melyik táv a nagyobb és mennyivel: Tiszabecs–Tivadar vagy Tuzsér–Tokaj?

4. A Budapest–Miskolc távolságot 180 kilométernek vehetjük. Autóval utazva táblák tájékoztatnak a számunkra fontos adatokról. Az egyik táblán ezt látjuk: Mezőkövesd 68 km, Miskolc 125 km.
a) Hány kilométerre vagyunk Budapesttől?
b) Mekkora a távolság Mezőkövesd és Miskolc között?

3. TÁJÉKOZÓDÁS A SZÁMEGYENESEN

Már láttuk, hogy milyen módszereket használhatunk a világban való tájékozódáshoz. Ha a matematikában a számok között szeretnénk eligazodni, akkor ehhez a számegyenest használjuk.
Az egyenesen bejelöltük a kezdőpontot (az origót), az egységet (egység hosszú szakaszt) és a növekedés irányát. Az így kapott számegyenesnek mindig a megfelelő darabját rajzoljuk le.



Számegyenest már láttunk a hőmérőn, a szabó centiméterén, a vonalzónkon …

Magyarország úthálózatát is kilométerenként számozzák. Gondolhatjuk ezeket számgörbéknek. Ha ezeket az utakat kiegyenesítenénk, akkor is számegyenest kapnánk.

KUTATÓMUNKA

Nézz utána, hogy Magyarországon hol található a nulla kilométerkő!

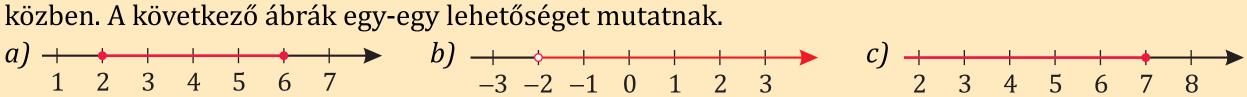
A számegyeneseken **számközök**et (idegen szóval **intervallum**okat) is tudunk ábrázolni. Ezeket a számközöket szakasszal vagy félegyenessel szemléltetjük, de ilyenkor mindig a rájuk illeszkedő tanult számokra gondolunk.

1. példa

Szemléltessünk olyan számközöket, amelyeken a következő egész számok szerepelnek!
a) 2, 3, 4, 5, 6; *b)* –1, 0, 1, 2, 3, …; *c)* …, 3, 4, 5, 6, 7.
A … azt jelenti, hogy arra vég nélkül folytathatjuk a felsorolást.

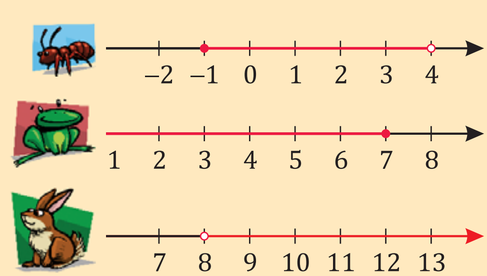
Megoldás

A számköz elején és végén tehetünk üres vagy tömött karikát. Az üres karika azt jelenti, hogy az a szám már nincs benne, a tömött karika pedig azt, hogy az a szám is benne van az ábrázolt számközben. A következő ábrák egy-egy lehetőséget mutatnak.



2. példa

Hangya Henrik, Béka Benő és Nyúl Nyuszti szeretnek a számegyenesen barangolni. A következő képen azt ábrázoljuk, hogy milyen utat jártak be.
Soroljuk fel, hogy ki melyik egész számot érinthette az útja során! Hol vannak azok az x számok, amelyeket egyikük sem érinthetett? Van-e ezek között egész szám?

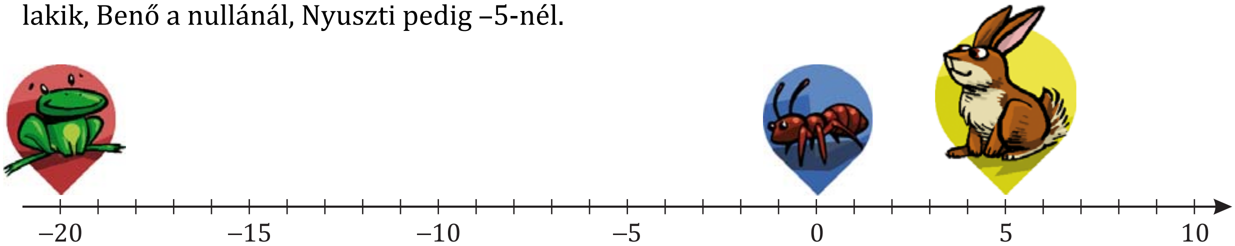


Megoldás

Hangya Henrik: –1, 0, 1, 2, 3. Béka Benő: … , –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Nyúl Nyuszti: 9, 10, 11, 12, 13, 14, … .
A keresett x számok, amelyeket egyikük sem érinthetett: $7 < x \leq 8$, azaz a 7-nél nagyobb, a 8-nál kisebb vagy egyenlő számokról van szó. Ezen az intervallumon az egyedüli egész szám a 8.

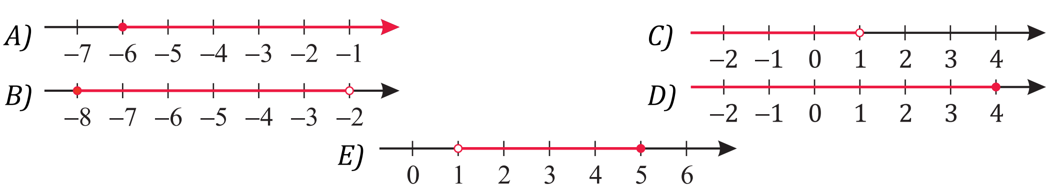
Feladatok

1. Az állatok estére eltévedtek a számegyenesen. Segíts nekik hazatalálni! Rajzold meg azt a számközt, amelyek a tartózkodási helyük és a lakóhelyük között van! Henrik a 2-es számnál lakik, Benő a nullánál, Nyuszti pedig –5-nél.



2. Egyik nap Benő meghívta barátait, és mindenki leírta, sőt le is rajzolta egy papírra, hogy az elmúlt napokban milyen helyeken járt, de a papírok összekeveredtek. Párosítsd az *x*-ekre vonatkozó megállapításokat és a számegyeneseket!

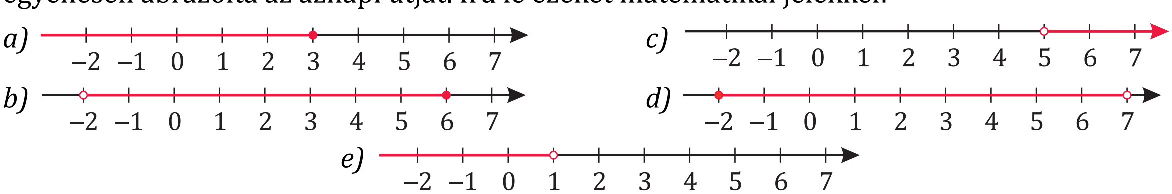
a) $x \le 4$ *b)* $1 < x \le 5$ *c)* $-6 \le x$ *d)* $-8 \le x < -2$ *e)* $1 > x$



3. Egyik következő alkalommal Henriknél gyűltek össze, és úgy gondolták, hogy az útjaikat csak matematikai jelekkel írják le. Készítsd el a hozzájuk tartozó számegyeneseket!

a) $x \le 2$ *b)* $3 < x \le 8$ *c)* $x > -4$ *d)* $-3 \le x < -1$ *e)* $6 > x$

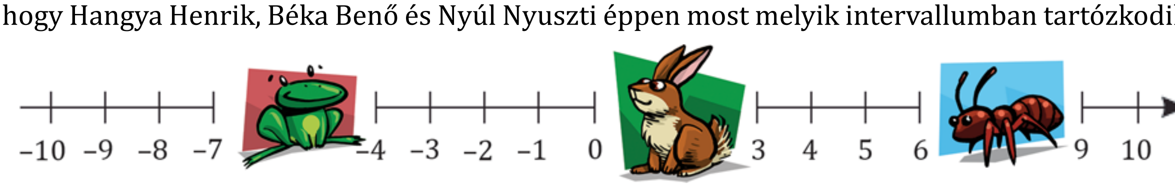
4. Harmadszor Nyuszti volt a vendéglátó, és a változatosság kedvéért mindenki számegyenesen ábrázolta az aznapi útját. Írd le ezeket matematikai jelekkel!



5. Rajzold le a füzetedbe számegyenesen!

a) $x < 2$ *b)* $x \ge 3$ *c)* $x \ne 0$ *d)* $x \nless 3$ *e)* $x \ge 2$

6. Délidőben az állatok kedvenc helyükön napoznak. Írd le a kép alapján matematikai jelekkel, hogy Hangya Henrik, Béka Benő és Nyúl Nyuszti éppen most melyik intervallumban tartózkodik!



4. A DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

Egy korábbi játékban használt „jobbra”, „balra”, „előre”, „hátra” szavak használatánál a jó irányító mindig a bekötött szemű társának a szemszögéből írta le a helyzetet. Aki ügyesen használta ezeket az utasításokat, el tudta vezetni osztálytársát a megadott célponthoz.

A jobbra–balra utasításokkal mozoghatunk egy számegyenesen is. Az előre–hátra utasításokkal pedig egy másik irányt adunk meg. Ez a két irány merőleges egymásra.

Ez adja az ötletet, hogy két merőleges számegyenes segítségével tájékozódjunk. Az O metszéspontban legyen mindkét számegyenesnek a nulla pontja. Ez különleges pont, sokszor fogunk hivatkozni rá, ezért külön neve van, ez a pont az **origó**. Mindent ehhez fogunk viszonyítani.

A jobbra–balra irányt az iskolai táblára vízszintesen, az előre–hátra irányt függőlegesen szoktuk felrajzolni, ezért vízszintes tengelyről, és függőleges tengelyről beszélünk.

Rövidebb elnevezés: x tengely, y tengely.

Az x tengelyen a növekedés irányát jobbra, az y tengelyen pedig fölfelé szokásos jelölni.

Ezt nevezzük derékszögű koordináta-rendszernek vagy **Descartes-féle koordináta-rendszer**nek.

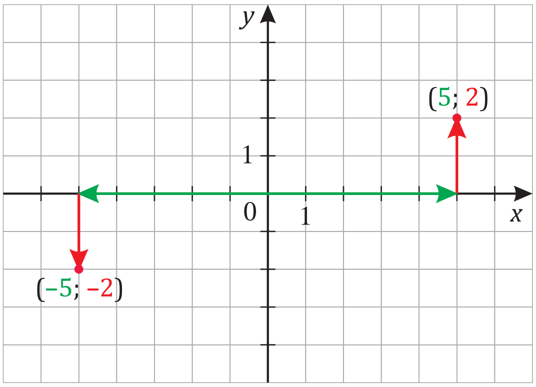
Most már a sík minden pontját megadhatjuk az origóhoz képest. Ehhez két számra van szükségünk! Az első jelzi, hogy mennyit menjünk vízszintesen, a második pedig azt, hogy mennyit függőlegesen.

KUTATÓMUNKA

Nézz utána! Ki volt Descartes?

Például: (5; 2).
Ennek a rendezett számpárnak a jelentése:
Az origóból lépj vízszintesen 5-öt jobbra, majd függőlegesen 2-t föl!

Például: (–5; –2).
Ennek a rendezett számpárnak a jelentése:
Az origóból lépj vízszintesen 5-öt balra, majd függőlegesen 2-t le!

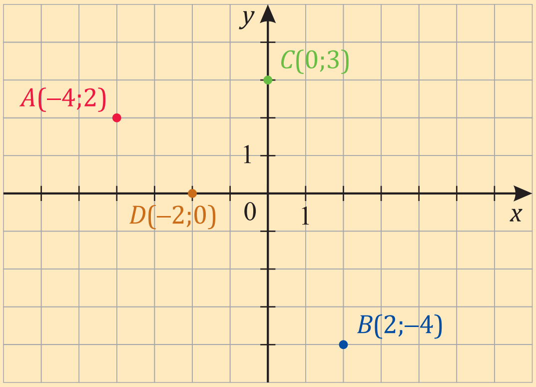


1. példa

Írjuk le a következő számpárok jelentését: (–4; 2), (2; –4), (0; 3), (–2; 0)! Jelöljük be a megadott A, B, C és D pontokat a koordináta-rendszerben!

Megoldás

(–4; 2) jelentése: Az origóból lépj vízszintesen 4-et balra, majd függőlegesen 2-t föl!
(2; –4) jelentése: Az origóból lépj vízszintesen 2-t jobbra, majd függőlegesen 4-et le!
(0; 3) jelentése: Az origóból vízszintesen ne lépj, majd függőlegesen 3-at föl!
(–2; 0) jelentése: Az origóból lépj vízszintesen 2-t balra, majd függőlegesen ne lépj!

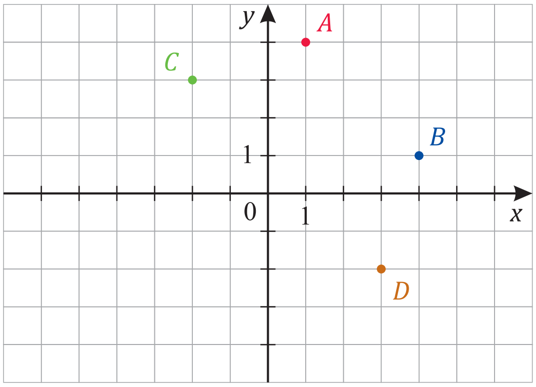


2. példa

A koordináta-rendszerben bejelöltünk néhány pontot. Adjuk meg ezeket számpárok segítségével!

Megoldás

A bejelölt pontokat így kell megadnunk:
$A(1; 4)$, $B(4; 1)$, $C(-2; 3)$, $D(3; -2)$.



Feladatok

1. Egy rendezett számpárról tudjuk, hogy az első tagja néggyel osztható egyjegyű pozitív szám, a második tagja pedig –3, vagy 5.
a) Írd le az összes ilyen számpárt! Pl. (8; –3).
b) Ábrázold a számpárok által meghatározott pontokat a koordináta-rendszerben!

2. Írd le rendezett számpárral az alábbi pontok helyét!
A pont: Menj jobbra 3-at, majd felfelé 6-ot!
B pont: Menj balra 3-at, majd felfelé 6-ot!
C pont: Menj jobbra 3-at, majd lefelé 6-ot!
D pont: Menj balra 3-at, majd lefelé 6-ot!

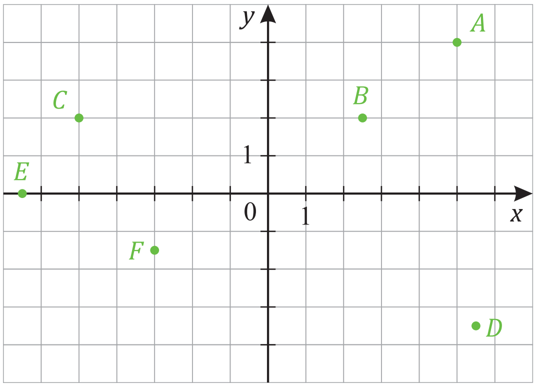
3. Készítsd el az összes lehetséges rendezett párt, ha az első helyre 1-et vagy 2-t, a második helyre pedig 3-at, 4-et vagy 5-öt írhatsz! Ábrázold a számpárok által meghatározott pontokat a koordináta-rendszerben!

4. Rácspontnak hívjuk azokat a pontokat, amelyeket két egész számból álló rendezett számpárral adunk meg. Ábrázold koordináta-rendszerben a következőkben meghatározott pontok közül a rácspontokat!

$\left(\frac{4}{3}; 5\right)$, $(-4; 2)$, $(-3; 10)$, $(1; 18)$, $\left(4; -\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{10}{11}; 5\right)$, $\left(\frac{4}{2}; 5\right)$, $(4; 0)$

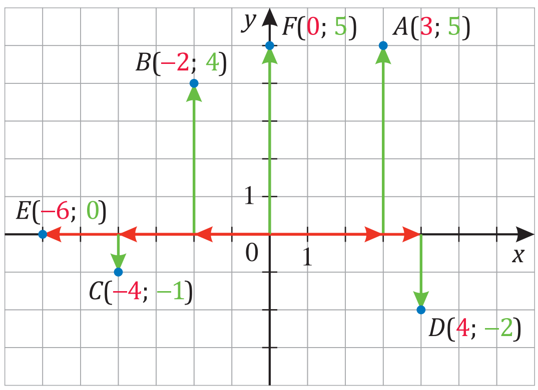
5. Sorold fel az ábrán látható pontok közül a rácspontok betűjelét! Add meg a hozzájuk tartozó számpárokat is!

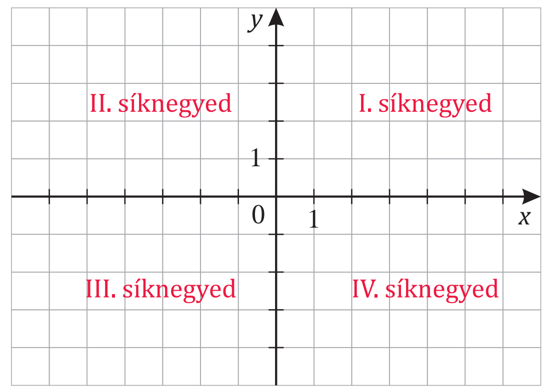
6. Tervezz a koordináta-rendszerben egy szép ábrát néhány pont segítségével! Add meg az e pontokhoz tartozó számpárokat!



5. PONTOK ÁBRÁZOLÁSA

Az előző leckében megtanultuk, hogy miként lehet megadni egy pont helyét a koordináta-rendszerben. Láttuk, hogy minden ponthoz hozzárendelünk egy rendezett számpárt. Ennek első tagját **első jelzőszámnak** (első koordinátának, x koordinátának) nevezzük. A számpár második tagját **második jelzőszámnak** (második koordinátának, y koordinátának) nevezzük.
Azt is látjuk, hogy egy rendezett számpár pontosan egy pont helyét határozza meg, és egy ponthoz pontosan egy rendezett számpár tartozik.

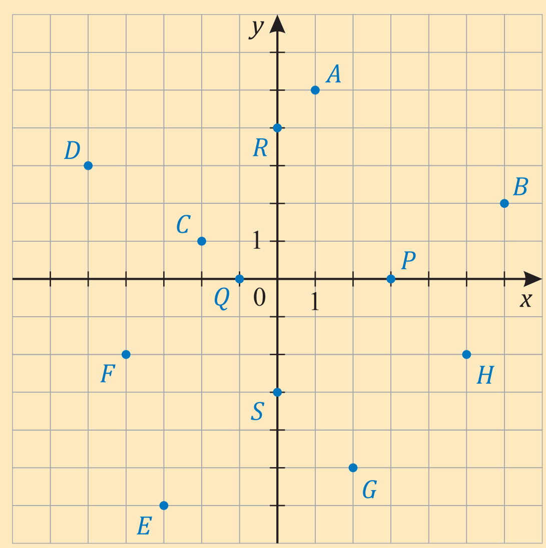




A két számegyenes a síkot négy részre osztja. Ezeket a síknegyedeket az ábrán látható módon sorszámozzuk.

1. példa

Berajzoltunk a koordináta-rendszerbe néhány pontot. Mi az egy negyedben lévő, mi az x tengelyre és mi az y tengelyre illeszkedő pontok jelzőszámainak közös tulajdonsága?



Megoldás

Az I. negyedben van: $A(1;\ 5)$, $B(6;\ 2)$; mindkét jelzőszám pozitív.
A II. negyedben van: $C(-2;\ 1)$, $D(-5;\ 3)$; az első jelzőszám negatív, a második pozitív.
A III. negyedben van: $E(-3;\ -6)$, $F(-4;\ -2)$; mindkét jelzőszám negatív.
A IV. negyedben van: $G(2;\ -5)$, $H(5;\ -2)$; az első jelzőszám pozitív, a második negatív.
Az x tengelyre illeszkedik: $P(3;\ 0)$, $Q(-1;\ 0)$; a második jelzőszám nulla.
Az y tengelyre illeszkedik: $R(0;\ 4)$, $Q(0;\ -3)$; az első jelzőszám nulla.

2. példa

Panka és Janka a pontok ábrázolását gyakorolja. Panka mondott négy mondatot, Janka rajzolt négy ábrát. Párosítsuk a mondatokat a megfelelő ábrához!
Panka mondatai:
I. Legyenek pirosak azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyek két jelzőszámának szorzata pozitív!

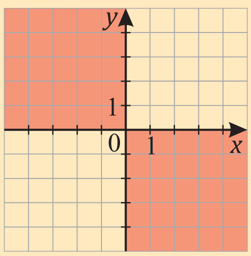
II. Legyenek pirosak azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyek két jelzőszámának szorzata negatív!

III. Legyenek pirosak azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyek két jelzőszámának összege nulla!

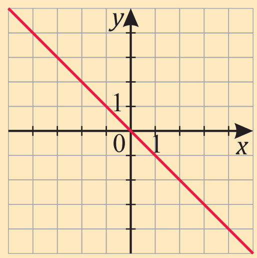
IV. Legyenek pirosak azok a pontok a koordináta-rendszerben, amelyeknek legalább az egyik jelzőszáma 3!

Janka rajzai:

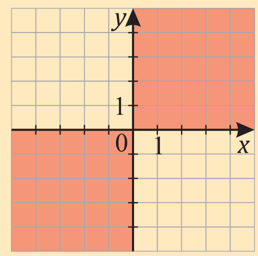
a)



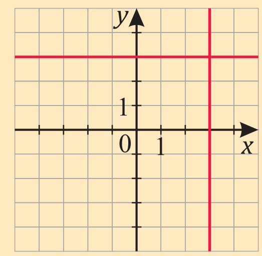
b)



c)



d)



Megoldás

A helyes párosítás: I. mondat és a *c)* rajz; II. mondat és az *a)* rajz; III. mondat és a *b)* rajz; IV. mondat és a *d)* rajz.

Játék Tervezz rácspontok segítségével érdekes alakzatokat! Add meg a rácspontok koordinátáit padtársadnak, és rajzoltasd meg vele az ábrát!

Feladatok

1. Ábrázold a derékszögű koordináta-rendszerben a következő pontokat: $A(0; 10)$, $B(3; 6)$, $C(1; 6)$, $D(4; 2)$, $E(2; 2)$, $F(5; -2)$, $G(1; -2)$, $H(1; -4)$, $I(0; -4)$!

a) Kösd össze a pontokat ebben a sorrendben!

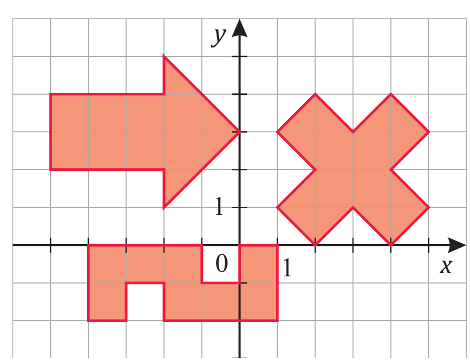
b) Az első koordinátáknak vedd az ellentetjét! Milyen alakzatot kaptál? Színezd ki!

c) Írd le az új pontok koordinátáit!

2. Ábrázold a következő pontokat! Mi a közös bennük? Hol helyezkednek el?
$P(4; 4)$, $Q(-5; -5)$, $R(0; 0)$, $S(2; 2)$, $T(6; 6)$, $V(-2; -2)$

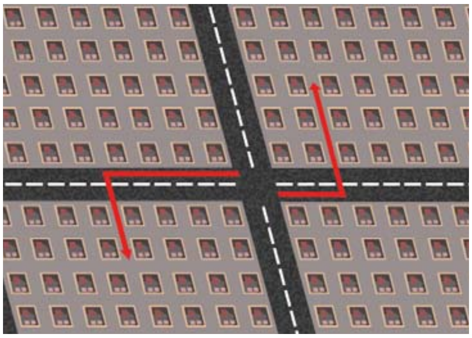
3. Ábrázold a következő pontokat! Mi a közös bennük? Hol helyezkednek el?
$V(2; 4)$, $W(6; 4)$, $X(4; 4)$, $Y(-5; 4)$, $Z(0; 4)$

4. Jegyezd le az ábrán látható alakzatokat koordináták segítségével!



5. Tervezz a koordináta-rendszerben téglalapot, négyzetet, egyenlő szárú háromszöget úgy, hogy minden csúcsuk rácspont legyen! Írd le a csúcsok koordinátáit!

6. TÁJÉKOZÓDÁS SÍKBAN, TÉRBEN (KIEGÉSZÍTŐ TANANYAG)



A térképvázlaton két főút metszi egymást, de nem merőlegesen. Ezekkel párhuzamosan további mellékutakat is látunk. Bejelöltünk néhány pontot az ábrán. Hogyan lehetne ezeknek a pontoknak megadni a helyét? A két főút meghatározó szerepet játszik a térképen. Nem érdemes két merőleges tengelyt berajzolnunk, egyszerűbb, ha a két főúthoz viszonyítjuk a megadott pontok helyét. A derékszögű koordináta-rendszereknél tanultakhoz hasonlóan adhatunk két jelzőszámot a bejelölt pontoknak. Van, amikor célszerűbb ilyen ferdeszögű koordináta-rendszert használnunk.

1. példa

A két főút kereszteződésében ketten beszélgetnek.
– A múzeumot keresem. Hogyan juthatnék el oda?
– Induljon el erre! Majd a második kereszteződés után forduljon be arra, azon a mellékutcán! A harmadik kereszteződésnél van a múzeum.
– Szeretném a környéken lévő műemléktemplomot is megkeresni.
– Akkor viszont errefelé kell elindulnia. A negyedik kereszteződésnél ezen az utcán elsétál a második utcáig. Ott lesz a templom.
Az ilyen beszélgetésekhez hozzátartozik a mutogatás is. A térképen látjuk a beszélgetéshez tartozó útvonalakat.
Adjuk meg a múzeum és a templom helyét a ferdeszögű koordináta-rendszer használatával!

Megoldás

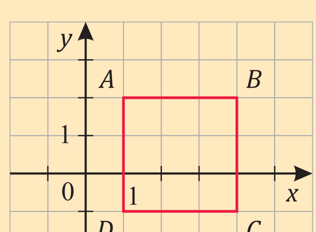
A két főút kereszteződését vesszük origónak. Ehhez képest a múzeumig jobbra 2, és fölfelé 3 útkereszteződést kell haladni. Ezt röviden így írhatjuk: $M(2; 3)$.
Az origóhoz képest a templom balra 4, és lefelé 2 útkereszteződésre található.
Ezt röviden így írhatjuk: $T(-4; -2)$.

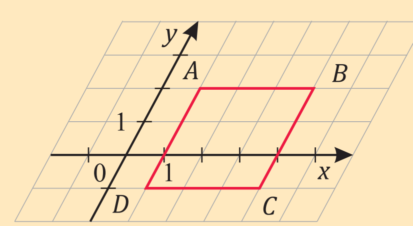
2. példa

Rajzoljuk le az $A(1; 2)$, $B(4; 2)$, $C(4; -1)$, $D(1; -1)$ pontokkal megadott négyszöget derékszögű és ferdeszögű koordináta-rendszerben! Figyeld meg, hogy hogyan változott a négyszög alakja!

Megoldás

Így néz ki a két ábra:
A derékszögű koordináta-rendszerben egy $ABCD$ négyzetet látunk. A ferdeszögű koordináta-rendszerben a kapott négyszög biztosan nem négyzet, hiszen a szomszédos oldalak nem merőlegesek egymásra.

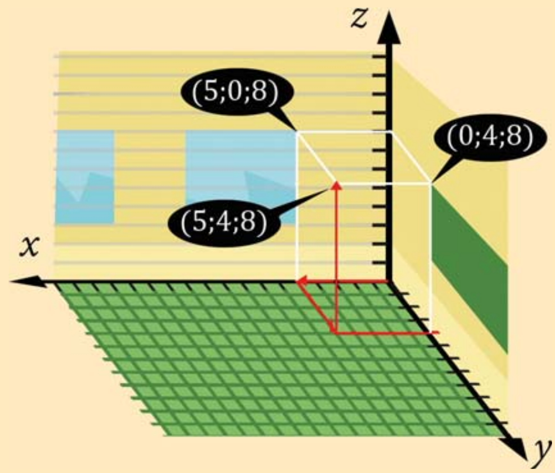




A sík pontjainak helyét meg tudjuk adni koordinátákkal. Felmerül a kérdés, hogy a térben is működik-e ez a módszer?
A válasz: igen!
A tér pontjainak helyét a térbeli koordináta-rendszerben tudjuk megadni.
A harmadik tengely, a *z* tengely bevezetésével ki tudunk lépni a síkból, így minden pont egy harmadik jelzőszámot (harmadik koordinátát, a *z* koordinátát) is kap.

3. példa

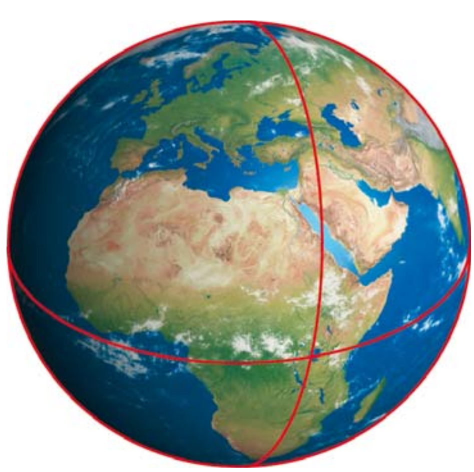
Egy tanteremről készített vázlatrajzot látunk az ábrán. A falak és a padló metszéspontjait *x*, *y*, *z* tengelynek ábrázoltuk. A tábla bal fölső sarkának (4; 8) lenne a koordinátája, ha csak ezt a falat néznénk. A tanteremben elfoglalt helye alapján azonban azt mondjuk, hogy (0; 4; 8). Az ablak jobb felső sarka ennek megfelelően: (5; 0; 8).
A tanteremben bejelöltük egy légy pillanatnyi helyét is. Hogyan lehetne három koordinátával megadni a helyzetét?

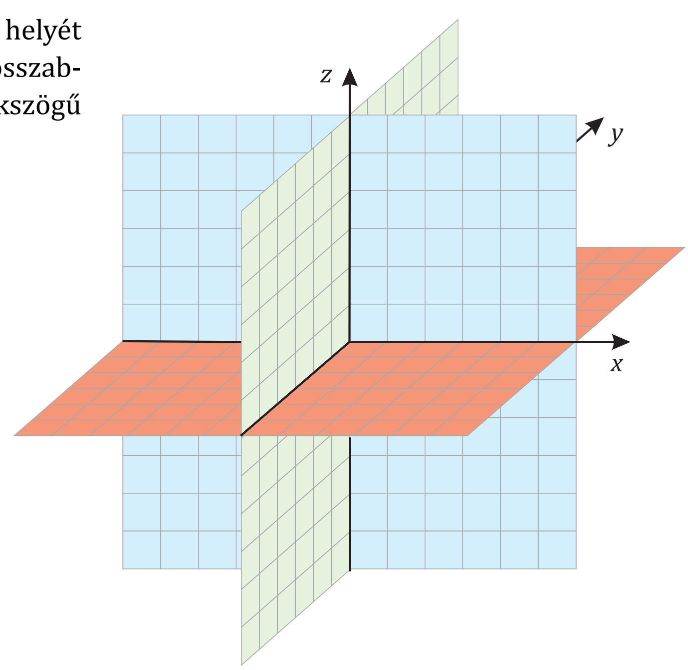


Megoldás

A nyilak mutatják, hogy az origóból hogyan lehet eljutni a légyhez az *x*, *y* és *z* tengelyekkel párhuzamosan.
Ezek szerint a légy helyének koordinátái: *L*(5; 4; 8).

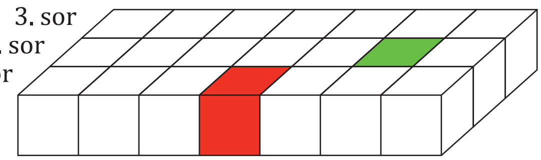
Az előző példában a tanterem falain túli pontok helyét is meg tudnánk határozni, ha a tengelyek meghosszabbításait is elképzelnénk. Így kapjuk a térbeli derékszögű koordináta-rendszert.
Ez a koordináta-rendszer a teret 8 részre osztja.





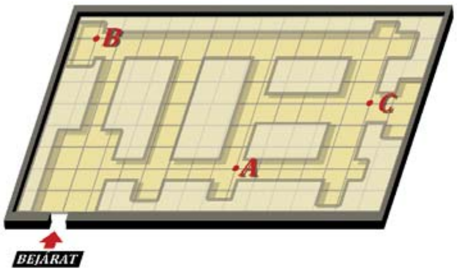
Feladatok

1. Ákos nagyon szereti a szép ásványokat, már van is egy kisebb gyűjteménye. Ezeket kis dobozokban tárolja. A dobozok három sorban helyezkednek el, és minden sorban 7 doboz található. A könnyebb tájékozódás érdekében az ásványokat úgy koordinátázta, hogy mindegyik kapott két számot. Az első megadja, hogy hányadik sorban, a második pedig megadja, hogy abban a sorban hányadik dobozban van. Vázlatosan rajzold le a füzetedbe a dobozokat!

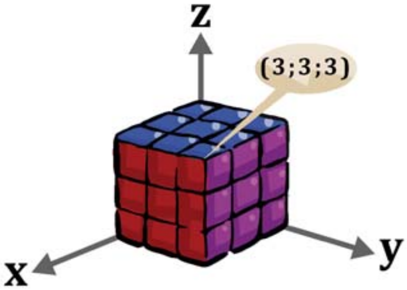


a) A piros dobozban pirit található. Add meg a pirit koordinátáit!
b) A zöld dobozban kalcit van. Add meg a kalcit koordinátáit!
c) A kalkopiritről csak azt tudjuk, hogy mindkét koordinátája páros szám. Maximum hány dobozt kell megnéznünk, hogy biztosan megtaláljuk? Vázlatosan rajzold le a füzetedbe a dobozokat, és jelöld kékkel a megfelelőket!
d) A galenit két koordinátája egyenlő. Vázlatosan rajzold le a füzetedbe a dobozokat, és jelöld barnával a megfelelőket!

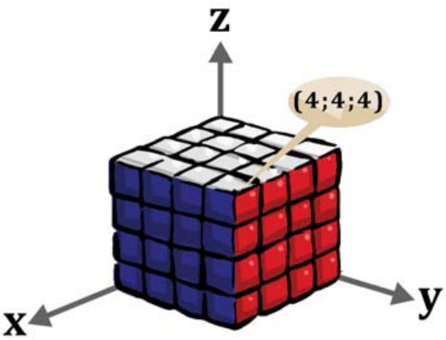
2. Az ábra egy áruház vázlatrajzát mutatja. A főbejárattól Anitának az *A*, Botondnak a *B*, Cilinek a *C* pontba kellene eljutni. Tekintsd a főbejáratot origónak!
a) Add meg a célpontokat koordináta-rendszer segítségével!
b) Dömötörnek a *D*(0; 3) pontba kellene eljutni. Hol van ez a pont? Hogyan irányítanád őt a főbejárattól?



3. Képzelj el egy 27 kiskockából álló Rubik-kockát a térbeli koordináta-rendszerben. Az origótól legtávolabbi csúcs legyen a (3; 3; 3) koordinátákkal adva.
a) Add meg a kocka csúcsainak koordinátáit!
b) Milyen háromszög véleményed szerint az (1; 1; 0), (1; 0; 1) és (0; 1; 1) koordinátákkal megadott háromszög? Állításodat próbáld indoklással alátámasztani!



4. Képzelj el egy 64 kiskockából álló Rubik-kockát a térbeli koordináta-rendszerben! Az origótól legtávolabbi csúcs legyen a (4; 4; 4) koordinátákkal adva.
a) Add meg a kocka lapközéppontjainak koordinátáit!
b) Add meg a kocka középpontjának koordinátáit!



Játék

Készítsetek 52 darab kártyát papírból! Számozzátok meg a lapokat 1-től 13-ig, minden szám 4-4 lapon szerepeljen! A játékot többen is játszhatjátok. Mindenkinek legyen egy saját 5-ször 5-ös négyzettáblája! A játék irányítója kihúz egy kártyát. Bemondja a számát, és félreteszi. A játékosok felírják a kihúzott számot a négyzettáblájuk valamelyik mezőjére. Ezt a húzást egymás után 25-ször megismételjük, amíg mindenki táblája be nem telik. Ezek után az alábbiak szerint kell értékelni a kitöltött táblát, és az győz, akinek a legtöbb pontja van.

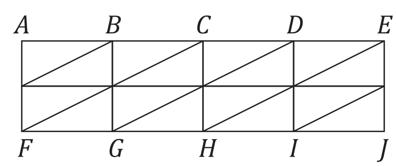
Ha egy sorban vagy egy oszlopban van

2 egyenlő szám	1 pont
3 egyenlő szám	4 pont
4 egyenlő szám	16 pont
2 pár egyenlő szám	2 pont
3 egyenlő és 2 másik egyenlő szám	8 pont
5 egymást követő szám (sorrend nem számít)	5 pont
három 1-es és két 13-as	10 pont
négy 1-es	20 pont
1, 10, 11, 12, 13 (sorrend nem számít)	15 pont

adható. Ha valamelyik átlóban vannak a fenti számok, akkor 1-gyel több pontot érnek!

Feladatok

1. A téglalapot az ábrán látható módon 16 darab háromszögre vágtuk.
Írd be ezekbe a kis háromszögekbe 1-től 16-ig az összes egész számot úgy, hogy az *ACF*, *BDG*, *CEH*, *CHF*, *DIG*, *EJH* háromszögekbe írt 4-4 szám összege mindegyikben ugyanannyi legyen!

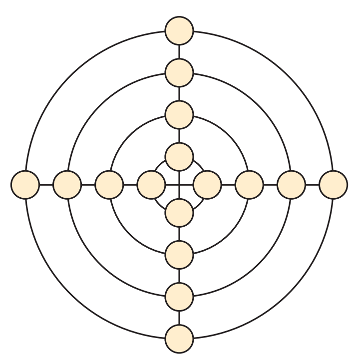


2. Kérjük meg a társunkat, hogy gondoljon a kedvenc (nem nulla) számjegyére! Ennek a számjegynek a kilencszeresével szorozza meg a 12 345 679-et! Ellenőrizzétek, hogy minden gondolt számjegy esetén meglesz-e a várt hatás! Mi lehet a magyarázat?

3. Az asztalon 10 kocka csoki van. Két testvér osztozkodik rajta. Mindenki egy vagy két kocka csokit vehet el egyszerre. Mindketten szeretnék megkaparintani az utolsó csokit. Mi a jó taktika?

4. Hat bábu áll hét egymás melletti négyzetlapon: három fehér és három fekete.
Kétféle lépés lehetséges:
I. Áttehetünk egy bábut a szomszédos mezőre, ha az üres.
II. Átugorhatunk egy mellette lévő bábut, ha a következő mező üres.
Ilyen lépésekkel cseréld meg a fehér és fekete bábukat, de minden bábunak csak a célja felé szabad haladnia, visszafelé nem!

5. A 16 kis körbe írd be az 1-től 16-ig terjedő egész számokat úgy, hogy a sugarakon és a körvonalakon lévő 4-4 szám összege 34 legyen!



8. KERESSÜNK ÖSSZEFÜGGÉSEKET!

A következő kérdések megválaszolásakor nem csupán matematikai ismeretekre lesz szükséged!

1. példa

Tamás hat számot mutatott Balázsnak: 5, 9, 13, 17, 32, 1000.
Ezeket a számokat Tamás valamilyen szabály szerint átrendezte, és Balázsnak megmondta az első hármat: 5, 1000, 9, …
Tudnád folytatni a megkezdett sort?
Balázs nem tudta elvégezni a feladatokat, ezért kapott egy kis segítséget: 5, 1000, 9, 17, …
Ekkor is tanácstalan maradt. Tamás azt javasolta, hogy írja le betűkkel a megadott számokat! Így vajon megtalálja Balázs a megfelelő összefüggést?

Megoldás

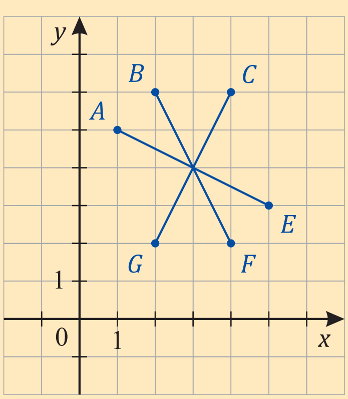
Az eddigi számok betűvel leírva:
ÖT
EZER
KILENC
TIZENHÉT
Így már szemünkbe ötlik a megoldás! Mindig két betűvel hosszabb a leírás. Vagyis egy jó folytatás:
TIZENHÁROM
HARMINCKETTŐ

2. példa

Megadtunk három pontpárt a koordinátáikkal: $A(1; 5)$, $E(5; 3)$; $B(2; 6)$, $F(4; 2)$; $C(4; 6)$, $G(2; 2)$.
Rajzoljuk le ezeket, kössük össze a párokat! Majd az ábra alapos elemzése után adjunk meg még egy hiányzó pontpárt!

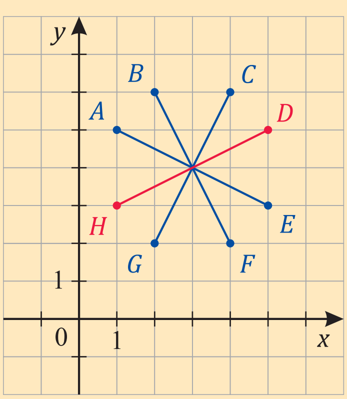
Megoldás

A megadott pontokat ábrázoljuk, és a megfelelő párokat összekötjük!



Látjuk, hogy a három összekötő szakasz közös ponton halad át, azt is látjuk, hogy a három összekötő szakasz egyenlő hosszú, és mindkét végük rácspont.

Ezek alapján az ábrába berajzolható a D és H pont és az őket összekötő szakasz.



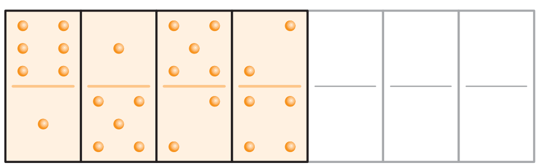
Vagyis a hiányzó pontpár: $D(5; 6)$, $H(1; 3)$.

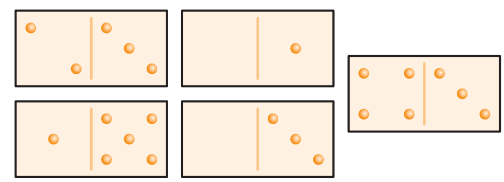
Feladatok

1. Az 1. példa ötletét felhasználva készíts egy feladványt magyarországi településekkel!

2. Írj egy lehetséges folytatást a megkezdett felsoroláshoz: András, Ákos, Botond, Cecília, Csongor, Daniella, …!
Lehetne-e tagja a felsorolásnak a Molnár, Gergely, Kovács, Eger, Ferenc?
Érvelj az igen és a nem mellett is!
Ha igen, akkor hányadikak lehetnének a felsorolásban?

3. Folytasd a dominósorozatot három elemmel! A megadottakból választhatsz!





4. Sorban egymás mellé tettük a pénzérméket, a számokkal felfelé: 5, 10, 20, 50, 100, majd újra 5, 10, 20, 50, 100 és így tovább, sokszor egymás után raktunk egy 5, 10, 20, 50 és 100 Ft-os pénzérmét. Ezután minden harmadik pénzérmét megfordíthatjuk.
a) Mi lesz látható a 48. pénzérmén?
b) Mi lesz látható a 100. pénzérmén?

5. Folytasd a sorozatot többféleképpen, mindegyiket indokold meg!
a) 1; 2; 3; 2; 1; …
b) 0; 2; 0; 2; …
c) 1; 3; 5; 7; …

6. Megadtunk néhány pontot a koordinátáikkal. Kösd össze őket a megadott sorrendben, majd a megfigyelésedet alkalmazva adj meg még további három pontot!
(0; 0), (1; 1), (1; 0), (3; 2), (3; 0), (6; 3), …

7. Hogyan tovább?
121, 232, 343, 454, 565, 676, 787, 898, …

9. SOROZATOK

Ha számokat írunk le egymás után, akkor számsorozatot kapunk:

2014, 1007, 1008, 504, 252, 126, 63, 64, …

A felsorolás végén három ponttal jelezzük, hogy a felsorolás a végtelenségig folytatható lenne.

A fenti sorozat például azokból a számokból áll, amelyek Bence eszébe jutottak. Van, amikor egy szabály alapján következnek a sorozat tagjai, ezért ha megfejted vagy kitalálsz egy megfelelő szabályt, te is folytatni tudod a felsorolást!

1. példa

Írjuk fel a pozitív páros számok sorozatának első tíz tagját! Jelöljük, hogy a sorozat tagjainak felsorolását tovább is folytathatnánk!

Megoldás

A sorozat tagjai: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, …

2. példa

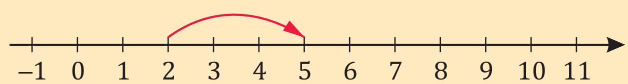
Írjuk fel az 1-re végződő pozitív egész számok sorozatának első nyolc tagját! Most is jelöljük, hogy a sorozat tagjainak felsorolása folytatható lenne!

Megoldás

A sorozat tagjai: 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, …

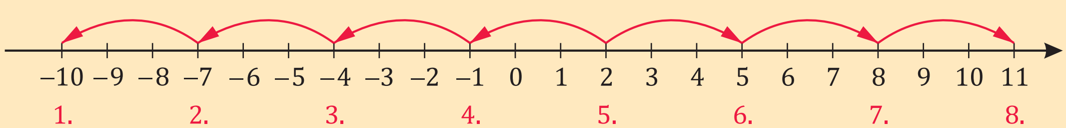
3. példa

Egy számsorozat ötödik tagja 2, hatodik tagja 5, hetedik tagja 8, nyolcadik tagja 11. Mi lehet a szabály? Adjuk meg a sorozat első tagját!



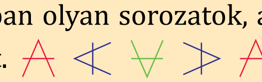
Megoldás

Látható, hogy a sorozat minden tagja hárommal nagyobb az előzőnél.
Gondolkodjunk visszafelé! A sorozat minden tagját egy hárommal kisebb szám előzi meg.

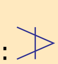


A sorozat tagjait leolvassuk a számegyenesről: –10, –7, –4, –1, 2, 5, 8, 11, …
A sorozat első tagja: –10.

4. példa

Az előző példákban számokból készítettünk sorozatokat. Léteznek azonban olyan sorozatok, amelyek tagjai nem számok. Ilyen esetekben is kereshetünk szabályszerűséget. 
Hogyan lehetne folytatni a fenti ábrasorozatot? Adjuk meg egy lehetséges folytatás következő négy tagját! Mi lesz a sorozat százegyedik tagja?

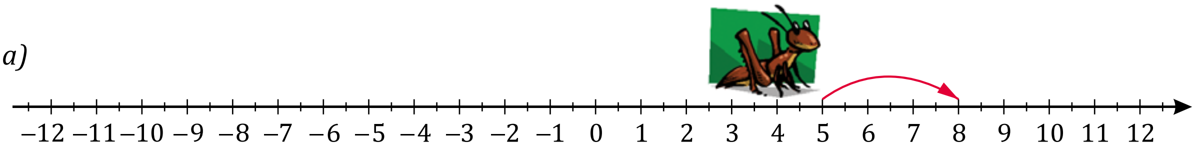
Megoldás

Megfigyelhetjük, hogy az ötödik ábra azonos az elsővel. Ez ad egy lehetséges folytatást! Ha elölről kezdjük, így ismétlődnek az ábrák. 
Az ábrák négyesével ismétlődnek. A negyedik, a nyolcadik, …, a századik helyen ez áll: 
Vagyis a százegyedik: 

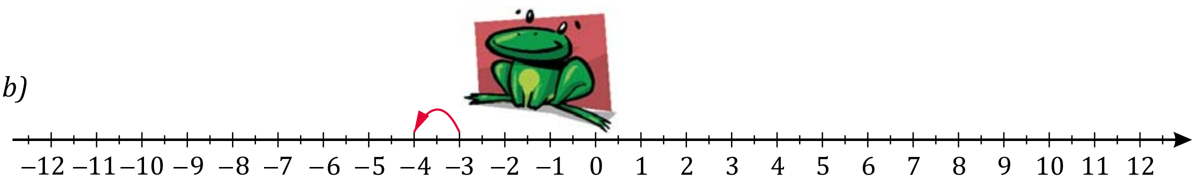
Feladatok

1. A számegyenesen látható állatok a berajzolt helyről az adott irányba indulnak, és mindig ugyanakkorát ugranak. Melyik számhoz érnek az első, a második, az ötödik és a tízedik ugrásukkal?

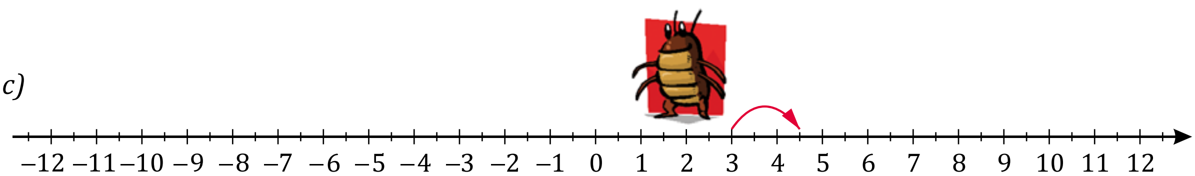
a)



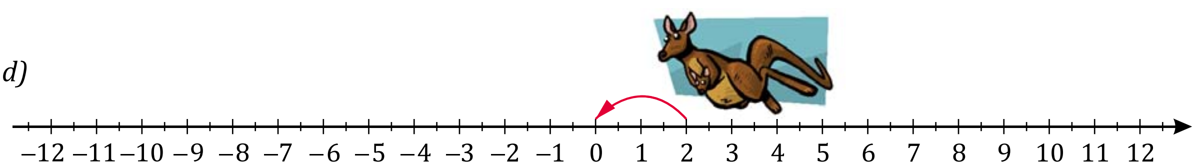
b)



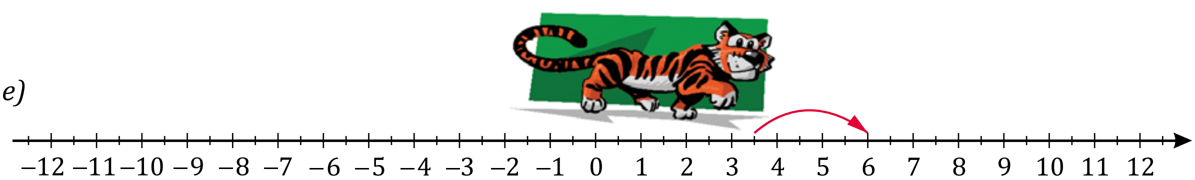
c)



d)



e)



2. Keress egy-egy szabályt, és folytasd a sorozatokat 3-3 számmal!

a) 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, … ;
b) 0, 1, −1, 2, −2, 3, −3, 4, … ;
c) 1, 2, 4, 8, 16, … ;
d) 5, 3, 1, −1, … ;
e) 1, 2, 11, 3, 111, 4, 1111, 5, … ;
f) 1, −2, 3, −4, 5, −6, … .

3. Add meg az előző feladat *b)* és *e)* részében szereplő sorozatok 15. és 16. tagját anélkül, hogy a közbeesőket felsorolnád! Használd az általad kitalált szabályokat!

4. Pisti indulni szeretne a maratoni futóversenyen. Úgy edz, hogy minden héten egy körrel többet fut a Margitszigeten, ami a maratoni távnak pontosan az egynyolcada.
a) Hány hét múlva mondhatja el, hogy már lefutott egy maratoni távot?
b) Hány hét múlva mondhatja el, hogy az aznapi edzésen lefutott egy maratoni távot?

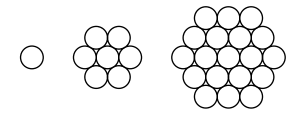
5. Julcsi 3 naponta hajat mos és 5 naponta rendet rak a szobájában. Ma kedd van, és mindkettőt elvégezte. Legközelebb a hét melyik napján fog egybeesni ez a két tevékenysége?

6. Egy ötfős családban valaki kint hagyott az asztalon egy nagy szelet süteményt. Aznap mindenki, mikor arra járt, megette a sütemény felét. Hányad részét ette meg az utolsóként érkezett?

10. NEVEZETES, ÉRDEKES SOROZATOK

Csoportmunka

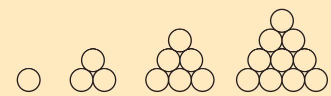
Műanyag kupakokból rakjatok ki az asztallapon szép mintákat! Próbáljatok meg olyan egyszerű alakzatokat készíteni, amelyekből könnyen tudtok ábrasorozatokat összeállítani! Jegyezzétek föl az egymást követő formákhoz felhasznált kupakok számát! Példaként mutatunk egy lehetséges ábrasorozatot:



1, 7, 19, …

1. példa

A műanyag kupakokból Xénia a következő ábrasorozatot rakta ki:



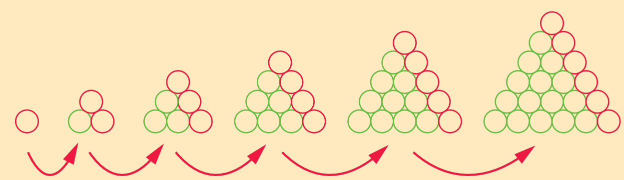
a) Adjuk meg a kupakok számából álló sorozat első hat tagját!

b) Fogalmazzuk meg, hogy hogyan kapjuk a sorozat következő tagjait!

Megoldás

a) A sorozat első hat tagja: 1, 3, 6, 10, 15, 21.

b) Figyeljük meg az ábrák építését! A piros kupakok hozzáillesztésével kapjuk az előző ábrából a következőt.

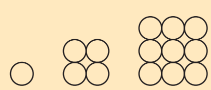


$0 + 1 = \mathbf{1}$, $1 + 2 = \mathbf{3}$, $3 + 3 = \mathbf{6}$, $6 + 4 = \mathbf{10}$, $10 + 5 = \mathbf{15}$, $15 + 6 = \mathbf{21}$, ...

Vagyis a következő ábrához tartozó számot úgy kapjuk meg, hogy az előző számot mindig eggyel nagyobb számmal növeljük.

2. példa

A következő ábrasorozatot Yvette készítette:



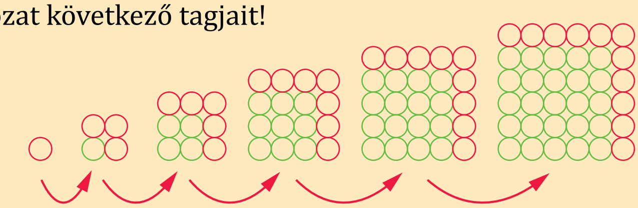
a) Adjuk meg az általa készített sorozat első hat tagját!

b) Fogalmazzuk meg, hogy hogyan kapjuk a sorozat következő tagjait!

Megoldás

a) A sorozat első hat tagja: 1, 4, 9, 16, 25, 36.

b) Figyeljük meg az ábrák építését! A piros kupakok hozzáillesztésével kapjuk az előző ábrából a következőt.



$0 + 1 = \mathbf{1}$, $1 + 3 = \mathbf{4}$, $4 + 5 = \mathbf{9}$, $9 + 7 = \mathbf{16}$, $16 + 9 = \mathbf{25}$, $25 + 11 = \mathbf{36}$, ...

Vagyis a következő ábrához tartozó számot úgy kapjuk, hogy az előző számot mindig a következő páratlan számmal növeljük.

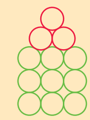
Lehet egy másik észrevételünk is! A kupakok számát kapjuk, ha az ábra sorszámát megszorozzuk önmagával:

$1 \cdot 1 = \mathbf{1}$, $2 \cdot 2 = \mathbf{4}$, $3 \cdot 3 = \mathbf{9}$, $4 \cdot 4 = \mathbf{16}$, $5 \cdot 5 = \mathbf{25}$, $6 \cdot 6 = \mathbf{36}$, ...

Az ábrák alakja miatt Xénia számait háromszögszámoknak, Yvette számait pedig négyzetszámoknak nevezzük.

3. példa

Zelma házikó alakzatokat rakott ki. Megállapították, hogy Zelma minden ábrája összerakható Xénia és Yvette ábráiból. Például Zelma harmadik ábrája így néz ki:



Vagyis Yvette harmadik ábrájára rátesszük háztetőnek Xénia második ábráját.

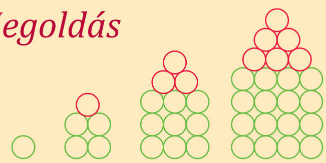
a) Rajzoljuk meg Zelma első négy ábráját!

b) Adjuk meg, hogy mely ábrák összetételéből kapjuk ezeket!

c) Írjuk fel az így keletkező sorozat első hat tagját!

Megoldás

a)



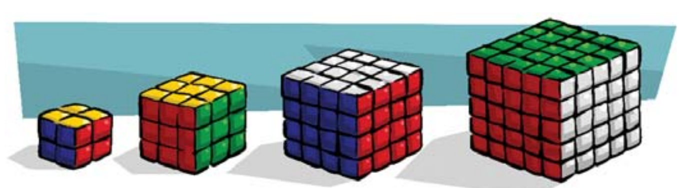
b) Zelma 1. ábrája: Yvette első ábrája, mert Xénia ábráiból nem tehetjük rá egyiket sem.
Zelma 2. ábrája: Yvette második ábrájára rátesszük háztetőként Xénia első ábráját.
Zelma 4. ábrája: Yvette negyedik ábrájára rátesszük háztetőként Xénia harmadik ábráját.

c) Négyzetszámok (Yvette számai): 1, 4, 9, 16, 25, 36.
Háromszögszámok (Xénia számai): 1, 3, 6, 10, 15, 21.

Az előző észrevételeket használva Zelma ábrái sorban ennyi kupakból állnak:
$0 + 1 = 1$, $4 + 1 = 5$, $9 + 3 = 12$, $16 + 6 = 22$, $25 + 10 = 35$, $36 + 15 = 51$.
Vagyis Zelma számai: 1, 5, 12, 22, 35, 51.
Ezeknek a számoknak milyen nevet adnál?

Feladatok

1. Képzeljük el, hogy a Rubik-kockákat kiskockákból rakjuk össze.



Hány darab kiskockát használunk az egyes nagy kockák építéséhez? Adjuk meg az így kapott sorozat első nyolc tagját! A sorozat első tagja legyen az 1.

2. Írd le az 1. példában szereplő Xénia sorozatának első tíz tagját! Aztán minden szomszédos pár alá írd le az összegüket is! Mit veszel észre? Milyen sorozatot kapsz így?

3. Xénia és Yvette sorozata is 1-gyel kezdődik. Keress még olyan számot, amely mindkét sorozatban szerepel!

4. Add meg Xénia, Yvette és Zelma sorozatában is a legkisebb háromjegyű számot!

5. A leckében szereplő három lány közül kinek a sorozatában szerepelhet a 121?

6. Nevezz meg legalább egyet a leckében szereplő három lány közül, akinek a sorozatában biztosan nem szerepel a 2016!

11. TÁBLÁZATOK, GRAFIKONOK

A környezetünkben nagyon sokféle táblázattal és grafikonnal találkozhatunk. Ezek mindegyikével nem tudunk megismerkedni, de egy-egy példát megnézünk.

1. példa

Bence két húgával és szüleivel Budapesten lakik, öt percre a Batthyány tér és Szentendre között közlekedő HÉV kaszásdűlői megállójától. Egyik pénteken vendégségbe érkeztek hozzájuk az unokatestvérei és azok szülei Kecskemétről. A vendéggyerekek közül Dani a legfiatalabb, ő is ötödikes, mint Bence. Dani két nővére már középiskolás. Az érkezés után, délután városnézésre szeretnének menni. A felnőttek a két fiúra bízták, hogy nézzék meg a HÉV menetrendjét.
Ezt a táblázatot találták a www.bkk.hu oldalon.

Érvényes: 2011.07.01-től / *Valid from 01.07.2011.*

Óra *h*	🕮 **Hétfőtől csütörtökig** ① - ④ **Perc** / *minutes*	**Óra** *h*	🕮 **Pénteken** ⑤ **Perc** / *minutes*
3		3	
4	20, 40	4	20, 40
5	00, 20, 30, 40, 50	5	00, 20, 30, 40, 50
6	00, 06, 13, 20, 28, 35, 41, 47, 52, 57	6	00, 06, 13, 20, 28, 35, 41, 47, 52, 57
7	02, 06, 11, 15, 20, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59	7	02, 06, 11, 15, 20, 24, 29, 34, 39, 44, 49, 54, 59
8	04, 09, 15, 21, 28, 35, 43, 51	8	04, 09, 15, 21, 28, 35, 43, 51
9	00, 10, 20, 30, 40, 50	9	00, 10, 20, 30, 40, 50
10	00, 10, 20, 30, 40, 50	10	00, 10, 20, 30, 40, 50
11	00, 10, 20, 30, 40, 50	11	00, 10, 20, 30, 40, 50
12	00, 10, 20, 30, 40, 50	12	00, 10, 20, 30, 40, 50
13	00, 10, 20, 30, 38, 45, 53	13	00, 08, 15, 23, 30, 38, 45, 53
14	00, 08, 15, 23, 30, 38, 45, 53	14	00, 08, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57
15	00, 08, 14, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57	15	03, 09, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57
16	03, 09, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 51, 57	16	03, 09, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 53
17	03, 09, 15, 21, 27, 33, 39, 45, 52	17	00, 08, 15, 23, 30, 38, 45, 53
18	00, 08, 15, 23, 30, 40, 50	18	00, 08, 15, 23, 30, 40, 50
19	00, 10, 20, 30, 40, 50	19	00, 10, 20, 30, 40, 50
20	00, 10, 20, 30, 40, 50	20	00, 10, 20, 30, 40, 50
21	00, 20, 30, 50	21	00, 20, 30, 50
22	00, 20, 30, 50	22	00, 20, 30, 50
23	00, 20, 30	23	00, 20, 30
0		0	

a) Értelmezzük a táblázatot!
b) Ha most negyed három a pontos idő, és mindenki indulásra kész, akkor melyik HÉV-re szállhatnak fel?
c) Add meg azt a péntek délutáni időszakot, amikor a legsűrűbben közlekedik a HÉV!

Megoldás

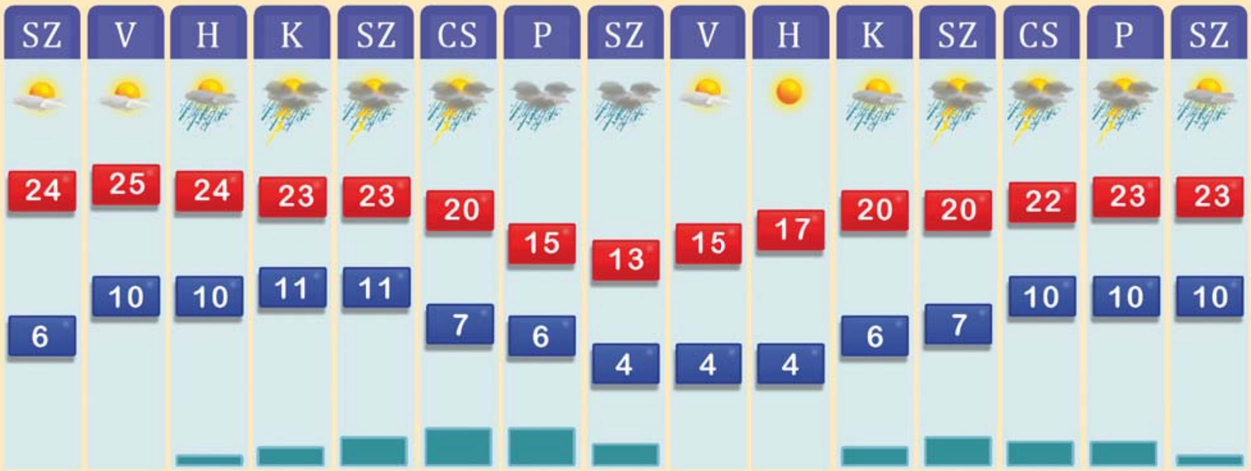
a) Az első oszlopban szereplő számok a táblázat felirata szerint az órákat jelölik, a velük egy sorban lévő számok pedig a megfelelő perceket. Például a 18-as kezdetű sorban van 40-es szám, ez azt jelenti, hogy 18:40-kor indul egy szerelvény a kaszásdűlői megállóból.

b) Tudjuk, hogy a lakás 5 percre van a megállótól, és most negyed három a pontos idő (azaz 14:15), ezért 14:20-ra érnek a megállóba. Vagyis a 14:21-kor induló HÉV-re szállhatnak fel. (A pénteki menetrendet kell nézni!)

c) Ott érdemes keresnünk, amelyik sorban a legtöbb szám szerepel. Valóban a 14-es és a 15-ös kezdetű sorban a percek közötti eltérés csak 6. Ennél kisebbet nem találunk. Nézzük meg, hogy ez a 6 perces követési idő hol kezdődik, és meddig tart! A táblázatról ezt olvashatjuk le: 14:15-től 16:45-ig közlekedik a legsűrűbben. Ekkor 6 percenként követik egymást a szerelvények.

2. példa

A vasárnapi programot az időjárás is befolyásolja. Szép idő esetén Szentendrére megy a két család. A fiúk pénteken a következő 15 napra vonatkozó előrejelzést találták.



a) Az előrejelzés szerint mi várható az első vasárnapra?
b) Milyen idő lesz a következő hétvégén?

Megoldás

a) Vasárnap látunk egy piros 25-ös és egy kék 10-es számot. Vagyis feltehetően vasárnap a hőmérséklet legmagasabb értéke 25 fok, a legalacsonyabb 10 fok lesz. A jelzés szerint enyhén felhős ég várható, napsütéssel, csapadék nélkül. A szentendrei program várhatóan teljesíthető.
b) A következő hétvégén az előrejelzés szerint egy kicsit hűvösebb idő várható, hiszen ekkor a piros számok csak 13 fokot, illetve 15 fokot jeleznek. A legalacsonyabb hőmérséklet 4 fok lesz. Szombatra felhős, enyhén esős időt, vasárnapra kicsit felhős, de már naposabb időt jeleznek.

Feladatok

1. A leckében szereplő menetrend szerint hány HÉV indul ezen a napon 14:00 és 18:00 között ebből a megállóból?

2. Valaki 12:00 és 12:30 között érkezik ebbe a megállóba, de nem tudja a pontos időt. Mit gondolhat, hány percen belül fog érkezni HÉV?

3. Hány napon nem várható csapadék a 15 napos előrejelzés ábrája alapján?

4. Hány olyan napot jósolnak, amikor a napi legmagasabb hőmérséklet 20 fok fölötti?

5. Hány olyan nap várható, amikor a napi legalacsonyabb hőmérséklet is meghaladja a 10 fokot?

6. Melyik napon lehet a legnagyobb a hőmérsékleti eltérés?

12. ÖSSZEFOGLALÁS

A következő teszt segít felidézni, hogy mit tanultunk ebben a fejezetben.

Feladatok

1. A felsoroltak közül melyik adat szokott szerepelni egy színházjegyen?
a) a napi hőmérséklet; *b)* a néző neve; *c)* az előadás dátuma.

2. A postai levelek címzésénél fontos szerepe van helymeghatározásnak. Ennek segítségével kézbesítik a megfelelő helyre a levelet. Milyen szám nem szerepel a címzésben?
a) irányítószám; *b)* évszám; *c)* házszám.

3. Az elektronikus levelek is csak akkor érkeznek meg a címzetthez, ha pontosan írjuk a címet. A címben melyik jelnek kell feltétlenül szerepelnie?
a) %; *b)* @; *c)* &.

4. A számegyenes melyik számát határozza meg a következő mondat: A négyestől 2 egységre, a kilencestől 3 egységre található.
a) 6; *b)* 9; *c)* az előzőektől eltérőt.

5. Hány számot határoz meg a számegyenesen a következő mondat? Az egyestől 2 egységre van.
a) 1; *b)* 2; *c)* 3.

6. A számegyenesen bejelöltük a –1,5 és a 6,5 közötti intervallumot (számközt). Hány darab egész szám van ebben az intervallumban?
a) 8; *b)* 7; *c)* 6.

7. Hány számegyenest szoktunk berajzolni a síkban egy derékszögű koordináta-rendszerbe?
a) 3; *b)* 2; *c)* 1.

8. Hány olyan pont van a derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek első jelzőszáma 2?
a) 1; *b)* 2; *c)* végtelen sok.

9. Hány olyan pont van a derékszögű koordináta-rendszerben, amelynek mindkét jelzőszáma 2?
a) 1; *b)* 2; *c)* végtelen sok.

10. A Sorozatok című lecke ezzel a sorozattal kezdődött: 2014, 1007, 1008, 504, 252, 126, 63, 64, … . A számok alapján melyik az a mondat, amelyik nem erről a sorozatról szól?
a) Egy páros szám után a szám fele következik.
b) Egy páros szám előtt a nála 1-gyel nagyobb szám áll.
c) Egy páratlan számot a nála 1-gyel nagyobb szám követ.

11. Melyik szám áll a háromjegyű páros számok sorozatában a negyedik helyen?
a) 108; *b)* 106; *c)* az előzőek egyike sem.

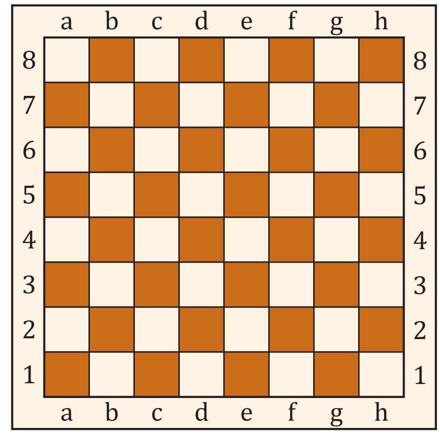
12. Egy sorozat minden tagja annyi ötös számjegyet tartalmaz, ahányadik tagja a sorozatnak. Minden tag csak ötös számjegyből áll. Hányadik tagja a sorozatnak az a szám, amelyben a számjegyek összege 100?
a) 100; *b)* 25; *c)* 20.

13. Rajzolj a füzetedbe egy nyolcszor nyolcas négyzetet, és ezt tekintsd úgy, mint egy sakktáblát. Jelöld a táblán a következő bábukat!

Világos bábuk
király: a1, huszár: d7, huszár e7, gyalog: f6.

Sötét bábuk
király: h8, gyalog: a2

Ha tudsz sakkozni, akkor azon is gondolkodhatsz, hogy hogyan lehet matt öt lépésben!



14. Egy kis színházteremben 10 sorban ülhetnek a nézők, és minden sorban 12 hely van. Egy hat fős társaság megvette az utolsó hat jegyet az előadásra. A jegyek a következő helyekre szóltak: 2. sor 1. szék, 4. sor 3. szék, 4. sor 4. szék, 7. sor 10. szék, 7. sor 12. szék és 10. sor 11. szék. Marci és Patrik egyedül ültek. Zsombor és Dóra jegye egymás mellé szólt, és Dóra ült közelebb a sor közepéhez. Bence azt tervezte, hogy majd megkéri a mellette ülőt a helycserére. Bence azért szeretett volna eggyel beljebb kerülni, mert Brigi mellett szeretne ülni.

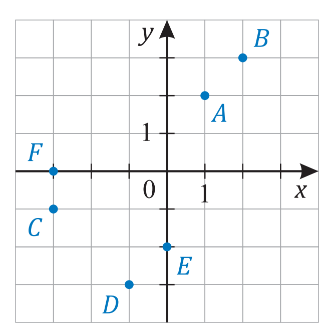
a) Készíts rajzot a füzetedbe! Jelöld a szövegben szereplő helyeket!
b) Add meg, hogy kinek hova szól a jegye!

15. Szemléltesd számegyenesen, majd sorold fel, hogy mely egész számokat tartalmazza a megadott számköz (intervallum)!

a) $-2 \le x \le 3$; *b)* $1 \le x \le 4$; *c)* $2 \le x$; *d)* $x \le -1$;
e) $2 \le x < 4$; *f)* $-3 < x \le 1$; *g)* $4 < x$; *h)* $x < 2$.

16. Rajzold le koordináta-rendszerben a következő nyolc pontot!
$A(2; 3)$, $B(1; 4)$, $C(-3; 1)$, $D(-2; -4)$, $E(0; 3)$, $F(-4; 0)$, $G(4; -3)$, $H(-3; 3)$.

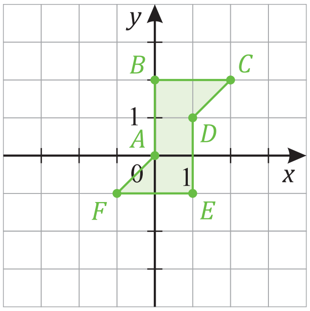
17. A koordináta-rendszerben bejelölt hat pontot add meg egy-egy számpár segítségével!

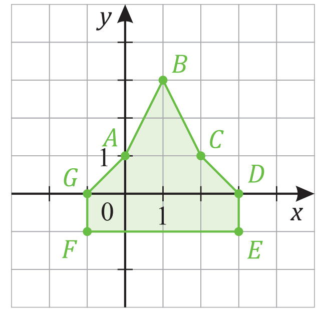


18. A koordináta-rendszerben színezéssel szemléltesd azokat a pontokat, amelyeknek

a) mindkét jelzőszáma pozitív szám;
b) csak az egyik jelzőszáma negatív szám;
c) az első jelzőszáma 1;
d) legalább az egyik jelzőszáma 0;
e) legalább az egyik jelzőszáma 2;
f) a második jelzőszáma -2;
g) a két jelzőszáma egyenlő;
h) a második jelzőszáma pozitív szám!

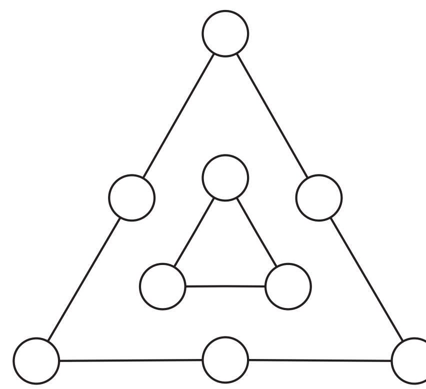
19. Az ábrán látható alakzatokat jegyezd le koordináták segítségével!





20. Milyen érdekességgel rendelkezik a 142 857?
Megtudod, ha veszed a kétszeresét, háromszorosát, négyszeresét, ötszörösét, hatszorosát!
Mi történik, ha a hétszeresét veszed?

21. Írd a karikákba a kilenc pozitív számjegyet úgy, hogy a belső háromszög csúcsaiban lévő három szám összegének pontosan a négyszerese legyen a kinti háromszögre írt hat számjegy összege! Mely számjegyek kerülhetnek a belső háromszög csúcsaiba?



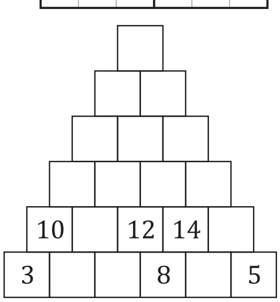
22. Másold át az ábrát a füzetedbe és írj 1 és 6 közötti számokat a táblázatba úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a vastag vonallal határolt téglalapokban is szerepeljen a hat különböző számjegy!

a)

	4		1		
2	5			4	
				4	6
4	2				
1				6	2
		2		1	

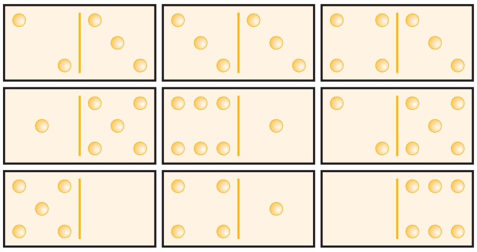
b)

1				4	
		3			5
4		2		1	
	1		4		2
2			3		
	5				1



23. A számpiramist úgy kell kitöltened, hogy két szomszédos négyzetben szereplő szám összege legyen a fölöttük lévő négyzetben. Melyik szám kerül a piramis tetejére?

24. Melyik két dominót kell felcserélned, hogy mindhárom sorban és mindhárom oszlopban ugyanannyi pötty legyen a dominókon?

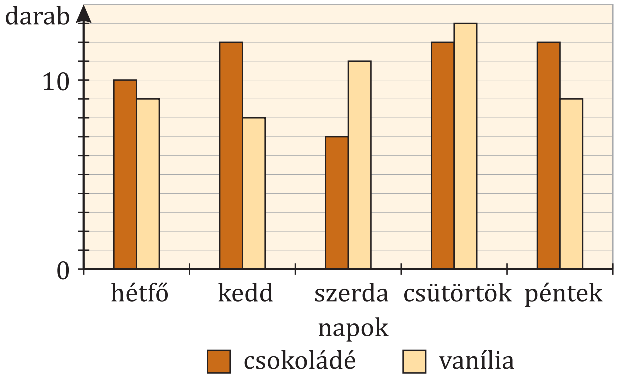


25. Hogyan tudnád folytatni?
a) 123, 456, 789, 101, 112, 131, 415, 161, 718, …
b) 0, 12, 345, 6789, 10111, 213141, 5161718, …

26. *a)* Írd fel a 3-ra végződő pozitív egész számok sorozatának első tíz tagját!
b) Írd fel a pozitív páratlan számok sorozatának tagjait 23-ig!

27. Niki minden harmadik nap meglocsolja kedvenc virágát és minden nyolcadik nap lemossa a leveleit. Niki január 3-án locsolt, január 8-án lemosta a leveleket.
a) Add meg az év első 15 olyan napját, amikor locsolt!
b) Add meg az év első hat olyan napját, amikor a leveleket lemosta!
c) Mikor esett az évben először egy napra a két tevékenysége?
d) Mit csinált február 9-én?
e) Mit csinálhatott március 25-én?

28. Egy cukrászdában nagyon sokféle fagylaltot árusítanak. Az ábra azt mutatja, hogy öt egymást követő munkanapon a nyitás utáni első órában hány gombóc csokoládé, és hány gombóc vanília fagylaltot adtak el. A kérdések is a nyitás utáni egy órára, és erre a kétféle fagylaltra vonatkoznak.



a) Hány gombóc csokoládé fagylaltot adtak el?
b) Hány gombóc vanília fagylaltot adtak el?
c) Hány gombóccal fogyott több csütörtökön, mint kedden?
d) Melyik nap adtak el legkevesebbet a vaníliából?
e) Melyik nap adtak el legkevesebbet a csokoládéból?

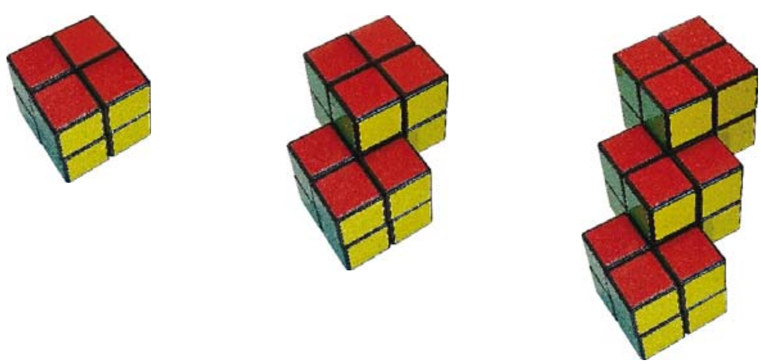
29. Az osztály 32 tanulója megírta a matematika dolgozatot. Hárman írtak elégtelen, öten elégséges, tízen közepes, nyolcan jó és hatan jeles dolgozatot.
a) Rendezd táblázatba az adatokat!
b) Készíts grafikont az osztály eredményeiről!

30. Egy iskolában minden évben rendeznek tanár-diák labdarúgó mérkőzést. Az alábbi táblázat tíz év eredményeit tartalmazza:

év	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
tanár gól	0	6	2	2	1	2	3	1	1	2
diák gól	2	4	3	1	2	3	2	3	1	1

a) Melyik évben volt a legtöbb gól?
b) Hányszor nyertek a diákok?
c) Összesítve ki vezet a gólok számát tekintve?
d) Volt-e döntetlen mérkőzés?

31. A 2 × 2 × 2-es Rubik-kocka mellett a dupla és a tripla változat fényképét is láthatod. Képzeld el, hogy ezeket kiskockákból kell összeragasztanod.

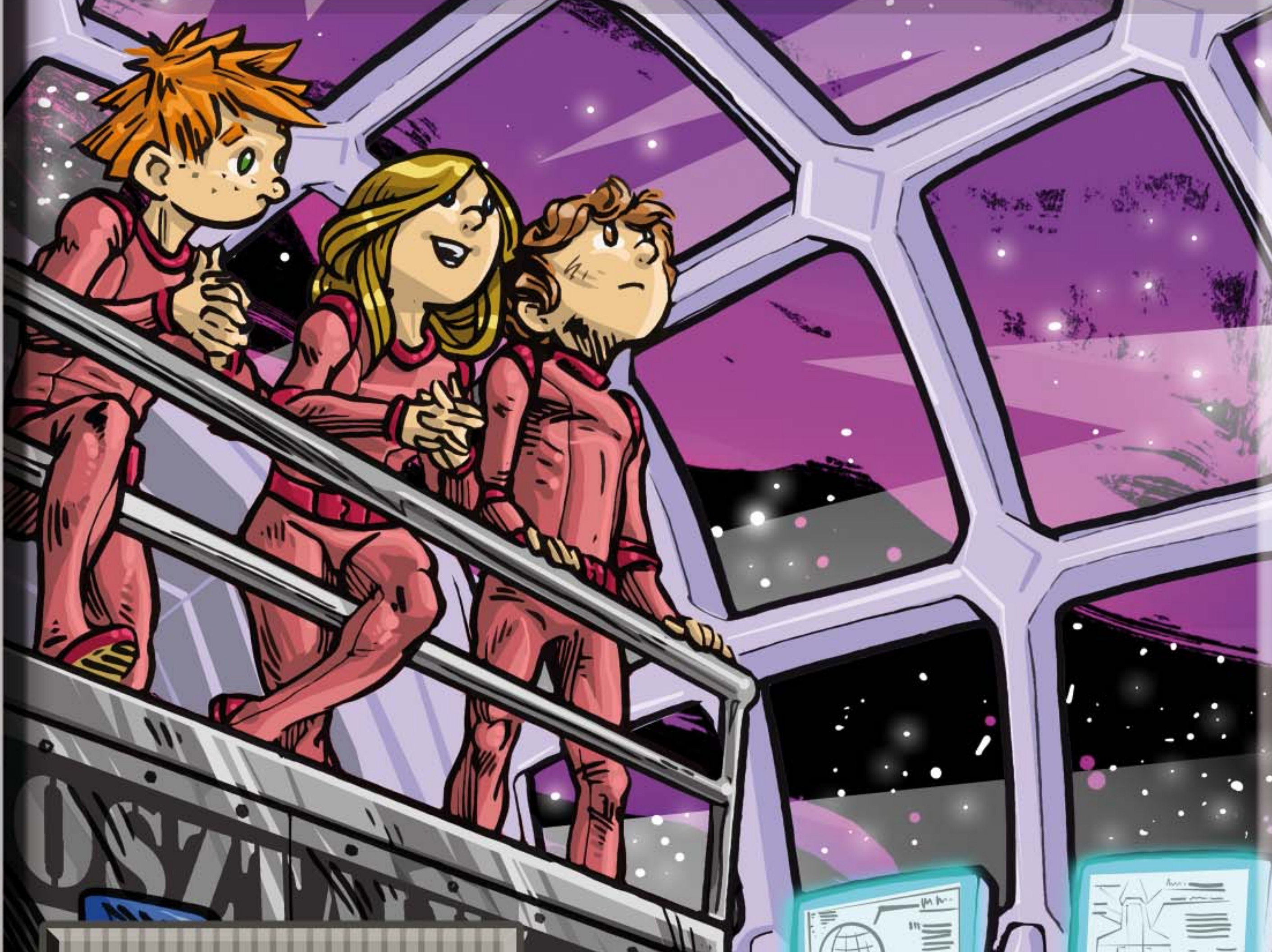


a) Hány darab kiskocka kell a képen látható alakzatok elkészítéséhez?
b) Gondold tovább! Hány darab kiskocka kellene a következő három alakzathoz?
c) Hány darab piros négyzetet láthatsz az egyes alakzatokon? Sorold fel az első hat darabszámot!
d) Hány darab színes négyzet határolja a képen látható alakzatokat?

32. Egy perselyben 3500 Ft van összesen. Van benne 5, 10, 20, 50, 100 és 200 Ft-os pénzérme is.
a) Készíts egy lehetséges táblázatot a pénzérmékről!
b) Készíts egy ábrát, amely a táblázatod adatait szemlélteti!

33. Pozitív egész számokat írtunk egymás mellé a füzetünkbe, egyesével növekedve. A sorozat első száma kétjegyű, utolsó száma háromjegyű szám. A harmincadik számjegy leírása után abbahagytuk a számok felsorolását.
a) Sorold fel te is a megfelelő számokat!
b) Hány darab háromjegyű számot írhattunk a füzetünkbe?
c) Hány darab számot írhattunk egy sorozatban összesen?

VI. Arányosság, egyenletek



Gerzson és Gazsi a kilátóteraszon álltak, és az óráról órára nagyobbnak látszódó Földet nézték.

– A Féreglyuk Expresszel kellett volna jönnünk, nem ezzel az ósdi ionmotoros vacakkal – horkant fel Gerzson. – Mi lettünk volna az elsők a suliból, akik a FérExszel utaznak.

– Ez igaz, de így csak 260 euró volt az út fejenként, a FérExszel pedig 740 lett volna.

– Az pont a háromszorosa – szúrta közbe Panni, aki valahogy a hátuk mögé sündörgött.

– Majdnem eltaláltad – vigyorgott kajánul Gerzson –, de $260 \cdot 3$ az 780, és nem 740.

– Jól van, na. Majdnem háromszoros. Kerekítve igazam van – toppantott Panni.

– Az út viszont hét napig tart haza, míg a FérExszel csak négy óra lenne. Az viszont… egy nap az 6-szor 4 óra, azaz 42-szer hosszabb ideig jövünk, mint a FérExszel – folytatta Gazsi mosolyogva.

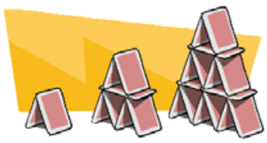
– Az apró betűt is elolvastad a reklámjukban? – kérdezte Gerzson. – A FérEx csak Hold körüli pályára szállít, ahonnan hagyományosan lehet a Földre utazni, ami gyakorlatilag plusz egy nap.

– Az még mindig csak $4 + 24 = 28$ óra. Egy hét az $7 \cdot 24 = 168$ óra, ami pont hatszor annyi idő.

– Azaz majdnem háromszor annyi pénzért, hatod annyi idő alatt értünk volna haza – foglalta össze Panni, és elégedetten állt meg a két fiú között.

1. ARÁNYOSSÁGOK, VÁLTOZÓ MENNYISÉGEK

Csoportmunka



Építsetek kártyavárat a képen látható módon! Beszéljétek meg, hogy hány lap kell az 1, 2, 3, ... szintes vár elkészítéséhez!

1. példa

Edzett Ede minden nap fut 3 km-t. Mennyit teljesít egy hét alatt? Mennyit fut májusban? Mennyit fut egy évben?

Megoldás

Mivel naponta 3 km-t fut, és egy hét az 7 nap, ezért **7 · 3 km-t, azaz 21 km-t** fut egy hét alatt.
Tudjuk, hogy a május 31 napos, ezért 31 · 3 km-t, azaz 93 km-t fut ebben a hónapban.
Egy év vagy 365, vagy 366 napos. Vagyis **365 · 3 km-t** vagy **366 · 3 km-t** futhat. A szorzások elvégzésével kapjuk a választ.
Egy év alatt 1095 km-t fut, de ha szökőévről van szó, akkor 1098 km-t.

1 hét	7 nap	7 · 3	21 km
1 hónap	31 nap	31 · 3	93 km
1 év	365 nap	365 · 3	1095 km

Megfigyelhettük, hogy a napok növekedésével nőtt a kilométerek száma is. Ahányszorosára növekedett a napok száma, ugyanannyiszorosára növekedett a kilométerek száma is.

2. példa

A futóversenyeken a leghosszabb táv a 42 195 méteres maratoni futás. Ennek a teljesítése kiemelkedő teljesítményt jelent, ezért is válhatott ez a versenyszám a kitartás egyik jelképévé. Ede április 25-én, a születésnapján kezdte a futóedzéseket. Melyik nap mondhatja, hogy már lefutott egy maratoni távot?

Megoldás

A maratoni táv 195 méterrel több, mint 42 km. Mivel minden nap 3 km-t fut, ezért 42 : 3, azaz 14 nap alatt éri el a 42 km-t. A 15. napon éri el a maratoni távot. Április 30 napos hónap, ezért ebben a hónapban 6 napot fut, marad még 9 nap.
Vagyis május 9-én mondhatja, hogy túl van egy maratoni távon.

42 195 m		
42 000 m	42 000 : 3	14 nap
195 m		1 nap
összesen		15 nap
	április 25-től 30-ig	6 nap
marad	május 9-ig	9 nap

Kutatómunka

Derítsd ki, honnan ered a maratoni futás elnevezése és hosszúsága!

3. példa

A Wizard nevű kártyajátékot 3-6 játékos játszhatja. Egy pakliban 60 kártyalap található. A játék elején a lapokat egyenlően szét kell osztani a játékosok között. Adjuk meg az egy játékosra jutó lapok számát, attól függően, hogy hányan szeretnének játszani!

Megoldás

A 60 lapot 3, 4, 5 vagy 6 egyenlő részre kell szétosztanunk. A táblázatban láthatjuk az eredményeket.

A játékosok száma	3	4	5	6
Az egy játékosnak jutó lapok száma	20	15	12	10

Ebben a példában azt láthatjuk, hogy a játékosok számának növekedésével az egy játékosnak jutó lapok száma csökken. Ahányszorosára növeljük a játékosok számát, pontosan annyiad részére csökken az egy játékosnak jutó lapok száma.

4. példa

Ezen a héten Eszter történelemből és irodalomból felelt, valamint megtudta a matematika dolgozatának eredményét is. Vagyis 3 jegyet szerzett. Hány jegye lesz négy hét múlva?

Megoldás

Természetesen az egyik héten szerzett jegyek száma nem befolyásolja a következő hetekben szerzett jegyek számát. Vagyis a feltett kérdésre nem tudhatjuk a választ.

Feladatok

1. Ha egy tojás ára 40 Ft, akkor mennyibe kerül a
a) hat; *b)* tíz; *c)* tizenöt
darabos doboz?

2. Egy felnőtt embernek naponta 2–2,5 liter folyadék bevitelére van szüksége. Ezt a vízigényt nemcsak közvetlenül ivással, hanem táplálékkal (pl. leves, egyéb folyadéktartalmú étel) is bevihetjük a szervezetbe. Mennyi folyadékra van szüksége egy embernek egy hét, egy hónap, egy év során?

3. Tóni 1,2 km-re lakik az iskolától. Ezt a távot minden tanítási napon megteszi reggel is, és délután is. Mekkora távot gyalogolt Tóni a tanév
a) 16; *b)* 28; *c)* 100
tanítási napján? (Most az egyéb gyaloglásait nem számoljuk.)

4. Lóri Budapesten él. Iskolába és edzésre menet rendszeresen használja a tömegközlekedési eszközöket, ezért havonta bérletet vásárol. Egy diákbérlet ára 3450 Ft. Hány forintba kerül egy utazása, ha összesen
a) 23; *b)* 25; *c)* 46; *d)* 115
alkalommal utazott ebben a hónapban?

5. Egy pénztárcában csupa egyforma papírpénz van, összesen 20 000 Ft értékben. Hány darab bankjegy lehet benne összesen?

6. Ede meghallgatta kedvenc együttesének legújabb 6 perces számát. Másnap megmutatta Tóninak és Eszternek, így hárman közösen hallgatták meg ezt a számot. Így mennyi ideig tartott a zenehallgatás?

2. ARÁNYOS KÖVETKEZTETÉSEK

CSOPORTMUNKA

A tervek szerint az osztálykirándulás egyik vacsorája saját készítésű paprikáskrumpli lesz. A megfelelő méretű kondér, só, bors, paprika, olaj, víz a rendelkezésetekre áll. Sikerült egy receptet is letölteni a világhálóról, amely szerint két személy részére a következő hozzávalók szükségesek: 6 db közepes méretű burgonya, 2 fej hagyma, 2 pár virsli, só, bors, paprika, olaj, víz. Tervezzétek meg, hogy miből mennyit kell beszereznetek, ha 32 fő akar majd az asztalhoz járulni!

Példa

Az osztály kétszer is volt fagyizni. Az első alkalommal 48 gombóc fagylaltot vettek, és összesen 8640 Ft-ot fizettek. A második alkalommal már 53-at vettek. Mennyit fizettek ekkor?

Megoldás

A válasz megadásához jó lenne tudni, hogy mennyibe került 1 gombóc fagylalt. Ezt egy osztással megkapjuk: $8640 : 48 = 180$. Vagyis 180 Ft 1 gombóc fagylalt.
Második alkalommal 53-at vásároltak: $180 \cdot 53 = 9540$. Vagyis ekkor 9540 Ft-ot fizettek összesen.

Feladatok

1. Egy sakk-készlet 32 figurája között 2 király, 4 bástya és 16 gyalog van.
a) Hány figura van 16 készletben?
b) Hány királyt, bástyát, gyalogot tartalmaz 16 készlet?

2. Gombóc Artúr a következőt mondta:
„A kedvenc desszertemet kicsi és nagy csomagolásban lehet vásárolni. Vettem 4 csomaggal a kicsiből, és 32 barátomnak tudtam adni belőle. Mindenki egyet evett. Egy következő alkalommal a nagy csomagolásúból vettem, de csak 3 csomaggal. Hány barátomat kínálhatom meg most? Hány darab desszert van a kicsi csomagolásúban?”
Megtudtuk, hogy a nagy csomagban 15 darab desszert van. Segíts Artúrnak a kérdések megválaszolásában!

3. Az élelmiszerbolt egyik raktárában 126 db 2 dl-es tejfölt tárolnak. A másik raktárában ugyanannyi deciliter tejföl található, de itt 4,5 dl-es csomagolásban. Hány darab van a második raktárban?

4. „Aranyos” következtetés: Ha III. Béla 25 év alatt 150 rendeletet hozott, akkor 13 év alatt 130 rendeletet hányadik László adott ki?
Móricka azonnal észrevette, hogy a 150 a $3 \cdot 25$-nek a kétszerese. Ezért olyan sorszámot kezdett el keresni, amelyiket 13-mal szorozva és duplázva megkapja a 130-at. Ezt gyorsan megtalálta! Mivel $5 \cdot 13$ duplája 130, ezért a válasza: V. László. Mit szólsz ehhez a következtetéshez?

Csoportmunka

Egy korábbi lecke mondatait látjátok, de sok helyen hiányzik belőle egy-egy szó. Vizsgáljátok meg ezt a szöveget, és vitassátok meg, hogy hányféleképpen lehet helyesen kitölteni!
A környezetünkben … olyan tárgy, doboz található, amelyeknek az alakja a téglára emlékeztet bennünket. A geometriában ezt a formát …nek nevezzük. A téglatestet … téglalap határolja, tizenkét … és … csúcsa van. Az egy csúcsból induló élei … egymásra.

A csoportmunka során olyan állításokat kaptatok, amelyek igazsága attól függött, hogy mit írtatok a hiányzó helyekre. Az ilyen állításokat **nyitott mondat**oknak nevezzük. A hiány pótlása az **alaphalmaz**ból történik. A nyitott mondat megoldásának nevezzük azokat az elemeket, amelyek igazzá teszik a nyitott mondatokat.
Mindig az alaphalmazból kell kiválasztanunk a lehetséges megoldásokat. Az így kapott elemek összességét nevezzük a nyitott mondat **igazsághalmaz**ának.
Jelölésére általában az I betűt használjuk, majd az egyenlőség után kapcsos zárójelben felsoroljuk az igazsághalmazba tartozó elemeket.
Ha az igazsághalmaz üres, akkor ezt írjuk: $I = \{\ \}$.
A következőkben olyan nyitott mondatokkal foglalkozunk, amelyek számok között teremtenek kapcsolatot.

1. példa

Egy törtszámot úgy kaptunk, hogy két különböző színű dobókockával dobtunk, majd a piros kockával dobott szám lett a tört számlálója, a zölddel dobott pedig a nevezője. Mely esetekben lehetett volna a tört értéke egész szám?

Megoldás

Tudjuk, hogy dobókockával csak hatféle értéket dobhatunk, ezért tudjuk, hogy mit kaphatunk a tört számlálójába, illetve nevezőjébe. Vagyis anélkül, hogy felsorolnánk, tudjuk, hogy milyen alakú törteket kaphatunk. Válogassuk ki a nekünk megfelelőeket! Ezeket táblázatba rendeztük.

A piros kockával dobott jó szám	6	6	6	6	5	5	4	4	4	3	3	2	2	1
A zöld kockával dobott jó szám	6	3	2	1	5	1	4	2	1	3	1	2	1	1
A tört értéke	1	2	3	6	1	5	1	2	4	1	3	1	2	1

Vagyis 14 olyan alakot kaptunk, amikor a tört értéke egész szám. Figyeljük meg, hogy ez nem 14 különböző egész szám!

2. példa

Olyan hónapban születtem, amikor a két szomszéd hónap napjainak az összege 61 volt – mondta Olivér. Mit mondhatunk ezek alapján a születési hónapjával kapcsolatban?

Megoldás

Két olyan számot keresünk, amelyek összege 61. Ezt egyenlet formájában is felírhatjuk. $\square + \bigcirc = 61$.
Tudjuk, hogy a négyzetbe és a körbe csak hónapok napjainak a számát jelölő számokat írhatunk. Ezek a következők lehetnek: 28, 29, 30, 31.
Gondoljuk végig az év 12 hónapját! Háromszor kapunk megfelelő esetet.
Ha a születési hónap július, akkor a két szomszéd június és augusztus: 30 + 31 = 61.
Ha a születési hónap augusztus, akkor a két szomszéd július és szeptember: 31 + 30 = 61.
Ha a születési hónap december, akkor a két szomszéd november és január: 30 + 31 = 61.
Azt tudjuk mondani, hogy Olivér júliusban, augusztusban vagy decemberben született.

3. példa

Legyen az alaphalmaz a kétjegyű számok halmaza. Adjuk meg a következő nyitott mondat igazsághalmazát: A … számok számjegyeinek összege nagyobb, mint 16!

Megoldás

Két számjegy összege maximum 18 lehet. A keresett kétjegyű számokban a számjegyek összege ezért csakis 17 vagy 18 lehet. Ezek az összegek a megfelelők: 8 + 9; 9 + 8; 9 + 9.
A nyitott mondat igazsághalmaza: $I = \{89; 98; 99\}$.

Feladatok

1. Az A = {hétfő; kedd; szerda; csütörtök; péntek} alaphalmaz mely elemei adják a következő nyitott mondat igazsághalmazát?
Ezen a héten … van matematikaóránk.

2. Legyen az alaphalmaz a háromjegyű számok halmaza. Add meg a nyitott mondatok igazsághalmazát!
a) A … számok csupa egyforma számjegyből állnak.
b) A … számok pontosan két nullát tartalmaznak.
c) A … számok pontosan egy nullát és két kilencest tartalmaznak.
d) A … számok kisebbek, mint 105.
e) A … számok nagyobbak, mint 999.

3. Írj egy-egy olyan nyitott mondatot, amelynek az igazsághalmaza
a) $I = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; b) $I = \{7; 77; 777\}$; *c)* $I = \{0\}$!

4. Ha egy 24 szeletes tortának több mint a kétharmada elfogyott, akkor a tálcán még … szelet torta lehet. Add meg a fenti nyitott mondat igazsághalmazát!

5. Két egymást követő hónap napjainak számát összegezzük és 60-at kapunk.
Vagyis $\square + \bigcirc = 60$. Add meg a két megfelelő számot! Melyik hónapok lehetnek ezek?

PRÓBÁLGATÁSOK, KÖVETKEZTETÉSEK 4.

Az előző leckében már láttuk, hogy az egyenletnek két oldala van, és ezeket egyenlőségjellel kötjük össze. Egyenleteknek mondjuk például a következő nyitott mondatokat (az alaphalmaz legyen az egész számok halmaza): $\square - 28 = 25$; $\square + \bigcirc = 81$; $x + 12 = 4 - x$; $a \cdot a = 169$.
A következő példákban azt láthatod, hogy ezeket a nyitott mondatokat egy-egy kérdő mondattal is megfogalmazhatjuk.

1. példa

Melyik számból kell 28-at elvenni, hogy az eredmény 25 legyen?

Megoldás

Néhány próbával közelebb jutunk a megoldáshoz.
A 40 túl kevés, hiszen 40 – 28 csak 12.
A 60 túl sok, hiszen 60 – 28 már 32.
A megoldás valahol 40 és 60 között lehet. Rövid időn belül megtalálható, hogy 53 – 28 = 25.
Vagyis a keresett szám az 53.
Ezzel a $\square - 28 = 25$ egyenlet megoldását is megadtuk: $\square = 53$.

2. példa

Melyik lehet az a két egész szám, amelyeknek az összege 81?

Megoldás

Ilyen számokat könnyen találunk. Láthatjuk, hogy kis keresgélés után a tetszőleges első számhoz megtaláljuk a másodikat.
Legyen például $\square = 1$. Ekkor $\bigcirc = 80$.
Legyen például $\square = 10$. Ekkor $\bigcirc = 71$.
Legyen például $\square = -1$. Ekkor $\bigcirc = 82$.
Ennek az egyenletnek végtelen sok megoldása van.

3. példa

Melyik az a szám, amelyikhez 12-t adva ugyanannyit kapunk, mintha 4-ből vennénk el?

Megoldás

Itt is megpróbálunk néhány próbával közelebb kerülni a megoldáshoz.
Ha a 2-t választjuk, akkor [2 + 12] van az egyik oldalon és [4 – 2] a másik oldalon. Ezek nem egyenlők, a jobb oldal kevesebb.
Ha a –6-ot választjuk, akkor [–6 + 12] van az egyik oldalon, és [4 – (–6)] a másik oldalon. Ezek nem egyenlők, a jobb oldal több.
A megoldást a –6 és a 2 között kereshetjük tovább. Néhány próbálkozás után megtalálható, hogy $-4 + 12 = 4 - (-4)$. Vagyis a keresett szám a –4.
Ezzel az $x + 12 = 4 - x$ egyenlet megoldását is megadtuk: $x = -4$.

4. példa

Melyik pozitív számot kell önmagával megszorozni, hogy az eredmény 169 legyen? Írd fel az egyenletet, és oldd meg!

Megoldás

Az egyenlet: $a \cdot a = 169$. A $10 \cdot 10$ kevés, a $15 \cdot 15$ pedig sok. A 13 pont jó.
Vagyis az egyenlet megoldása: $a = 13$.
Ha a kérdés bonyolultabb, akkor a próbálgatás lehetséges, hogy sokáig tartana.

4. PRÓBÁLGATÁSOK, KÖVETKEZTETÉSEK

5. példa

Gondoltam egy számra! A háromszorosát csökkentettem nyolccal. Az így kapott szám hétszereséhez kettőt adva eredményül 30-at kaptam. Melyik számra gondoltam?

Megoldás

Jelölje most x a gondolt számot. Ekkor a szöveg alapján fel tudunk írni egy egyenletet.
A háromszorosát csökkentettem nyolccal: $3 \cdot x - 8$.
Az így kapott szám hétszereséhez kettőt adtam: $(3 \cdot x - 8) \cdot 7 + 2$.
Ez 30-cal egyenlő: $(3 \cdot x - 8) \cdot 7 + 2 = 30$. Hogyan jutottunk el az x-től a 30-ig?

$$x \xrightarrow{\cdot 3} 3 \cdot x \xrightarrow{-8} 3 \cdot x - 8 \xrightarrow{\cdot 7} (3 \cdot x - 8) \cdot 7 \xrightarrow{+2} (3 \cdot x - 8) \cdot 7 + 2 = 30$$

Gondolkodjunk visszafelé! Az utolsó lépesben egy számhoz hozzáadtunk 2-t, és így kaptunk 30-at. Ez a szám csakis a 28 lehetett.
Ezt úgy kaptuk, hogy egy számot megszoroztunk 7-tel. Ez a szám csakis a 4 lehetett.
Ezt akkor kaptuk, amikor egy számból elvettünk 8-at. Ez a szám a 12 volt.
Ez pedig a gondolt szám háromszorosa.
Vagyis a gondolt szám a 4.
Ezeket az egymás utáni következtetéseket így szemléltethetjük:

$$30 \xrightarrow{-2} 28 \xrightarrow{:7} 4 \xrightarrow{+8} 12 \xrightarrow{:3} 4$$

Ezt a fajta következtetési módszert lebontogatásnak is szokták nevezni.

Feladatok

1. Használd a próbálgatás módszerét! (Az alaphalmaz a pozitív egész számok halmaza legyen!)
a) $a \cdot a = 1$; *b)* $b \cdot b = 121$; *c)* $c \cdot c = 12\,321$; *d)* $d \cdot d = 1\,234\,321$.

2. Használd a próbálgatás módszerét!
a) $a \cdot a \cdot a = 64$; *b)* $b \cdot b \cdot b = 1331$.

3. Következtess!
a) $x - 123 = 200$; *b)* $x + 25 = 120$; *c)* $42 - x = 12$; *d)* $33 + x = 99$.

4. Egy szám kétszereséhez 4-et kell adni, hogy 100 legyen. Melyik ez a szám?

5. Egy számot 3-mal kell csökkenteni, hogy a 4-szerese 100 legyen. Melyik ez a szám?

6. Egy szám feléhez 40-et kell adni, hogy 100 legyen. Melyik ez a szám?

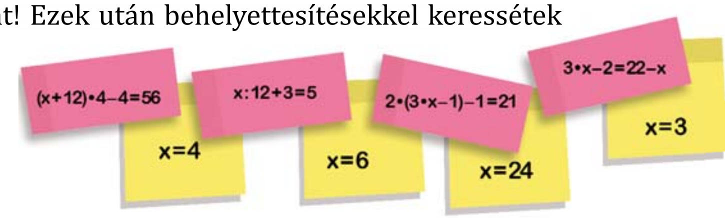
7. Egy számot 2-vel kell növelni, hogy a harmada 100 legyen. Melyik ez a szám?

8. Lebontogatással oldd meg az egyenleteket!
a) $(5 \cdot x + 2) : 7 + 4 = 10$; *b)* $(x + 42) \cdot 2 - 4 = 116$;
c) $(5 \cdot x + 8) \cdot 5 - 2 = 48$; *d)* $(x + 1) \cdot 10 + 9 = 20$.

EGYENLETMEGOLDÁS GYAKORLÁSA 5.

Csoportmunka

Készítsetek nyolc egyforma cédulát! Négyre írjátok rá a következő négy egyenletet, négyre pedig a megoldásokat! Ezek után behelyettesítésekkel keressétek meg a megfelelő párokat! Beszéljétek meg, hogy legrosszabb esetben hány behelyettesítést kellett elvégeznetek!



Az egyenletek megoldása nagyon fontos a matematikában. Az egyenletmegoldás módszereit nagyon gyakran fogjuk alkalmazni. A következő feladatok megoldásával ezt a képességedet fejlesztheted. Ahol nem adjuk meg az alaphalmazt, ott mindig gondolj az eddig tanult számok halmazára!

Feladatok

1. Add meg az egyenletek megoldását! Dönts, hogy a próbálgatást vagy a következtetéseket alkalmazod!
a) $6 \cdot x + 38 = 80$; *b)* $7 \cdot x - 102 = 234$; *c)* $14 \cdot x + 124 = 126$; *d)* $21 \cdot x - 136 = -122$.

2. Foglald táblázatba találgatásaidhoz az egyenlet bal és jobb oldalának értékét! Így próbáld megtalálni a megoldást!
a) $2 \cdot x - 8 = x + 6$; *b)* $3 \cdot x - 13 = x + 107$; *c)* $x + 22 = 26 - x$; *d)* $2 \cdot x - 136 = -32 - 2 \cdot x$.

3. Van-e megoldása a következő egyenleteknek, ha a páros számokat választjuk alaphalmaznak?
a) $3 \cdot x - 24 = 1111$; *b)* $3 \cdot x - 24 = 112$; *c)* $3 \cdot x - 24 = 426$.

4. Van-e megoldása a következő egyenleteknek, ha a páratlan számokat választjuk alaphalmaznak?
a) $5 \cdot x - 31 = 89$; *b)* $5 \cdot x - 9999 = 2015$;
c) $5 \cdot x - 1\,234\,567 = 2\,468\,642$.

5. Add meg az összes megoldását a következő egyenleteknek, ha az x és az y is pozitív egész szám!
a) $x + y = 5$; *b)* $2 \cdot x + 4 \cdot y = 10$; *c)* $2 \cdot x + 3 \cdot y = 5$.

6. Add meg az egyenletek megoldását!
a) $[2 \cdot (x - 3) + 5] \cdot 8 - 19 = 421$; *b)* $[2 \cdot (x - 3) + 5] \cdot 8 - 19 = 821$.

7. Az alaphalmaz legyen a pozitív egész számok halmaza. Add meg az egyenletek megoldását!
a) $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 6$; *b)* $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 60$; *c)* $x \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 0$.

8. Az alaphalmaz legyen a pozitív egész számok halmaza. Add meg az egyenletek megoldását!
a) $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 6$; *b)* $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 60$; *c)* $x \cdot (x - 1) \cdot (x - 2) = 0$.

6. SZÖVEGES FELADATOK

A mindennapi életben nem találkozunk közvetlenül egyenletekkel. Sok kérdésnél azonban hasznos segítséget jelent, ha könnyen tudjuk kezelni az egyenleteket. Egy szövegben megfogalmazott matematikai kérdésre válaszolhatunk azonnal is. Ha a kérdés összetettebb, akkor próbálkozhatunk egyenlet felírásával is!

1. példa

Becsomagolható-e az 500 kg alma úgy, hogy a 3 kg-os és az 5 kg-os csomagokból is ugyanannyi legyen?

Megoldás

Képzeljük el, hogy igen a válaszunk. Ekkor ugyanannyi 3 kg-os és 5 kg-os csomagot alakíthatunk ki. Ezek száma legyen x. Az x csakis természetes szám lehet. Vagyis az egyenlet alaphalmaza is a természetes számok halmaza lesz. Írjuk fel a szöveg alapján az egyenletet: $(3 + 5) \cdot x = 500$!

Az x-re nem kapunk természetes számot. Az $x = 62$ esetén $(3 + 5) \cdot 62$ csak 496, az $x = 63$ esetén pedig $(3 + 5) \cdot 63$ már 504 lesz.

Vagyis az egyenletnek nincs megoldása az alaphalmazon.

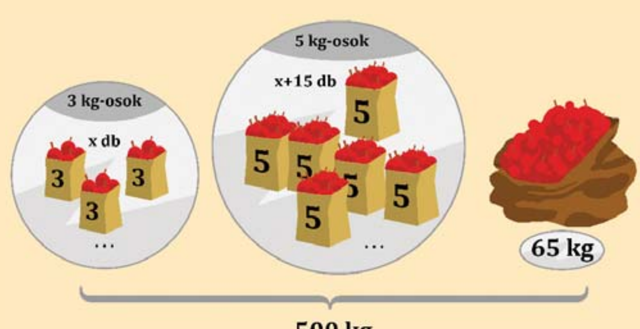
Ez azt jelenti, hogy az 500 kg alma nem csomagolható be úgy, hogy a 3 kg-os és az 5 kg-os csomagokból is ugyanannyi legyen.

2. példa

A zöldséges az 500 kg almából 3 kg-os és 5 kg-os csomagokat alakít ki. A nagyobb csomagokból 15 darabbal volt több, amikor még 65 kg alma csomagolásra várt. Hány darab 3 kg-os csomag készült el eddig?

Megoldás

Leggyakrabban a kérdésre adandó választ fogalmazzuk meg egy ismeretlennel.
Ebben az esetben legyen a 3 kg-os csomagok száma: x db.
A csomagok száma csakis természetes szám lehet, ezért az egyenlet alaphalmaza is a természetes számok halmaza lesz.
Mivel 15 db-bal több van a nagyobb csomagokból, ezért ezek száma: $x + 15$ db.
Felírhatjuk, hogy ez eddig hány kilogramm: $3 \cdot x + 5 \cdot (x + 15)$.
Van még 65 kg alma csomagolatlanul. Ha ezt is hozzáadjuk, akkor kapjuk az 500 kg-ot:
$3 \cdot x + 5 \cdot (x + 15) + 65 = 500$.
Keressük meg az egyenlet megoldását!
Ha $x = 40$-re gondolunk, akkor
$3 \cdot 40 + 5 \cdot (40 + 15) + 65 = 460$. Ez még kevés!
Ha $x = 50$-re gondolunk, akkor
$3 \cdot 50 + 5 \cdot (50 + 15) + 65 = 540$. Ez már sok!
Kis keresgélés után kapjuk, hogy
$3 \cdot 45 + 5 \cdot (45 + 15) + 65 = 500$.
Vagyis az egyenlet megoldása: $x = 45$.
Megfogalmazhatjuk a feltett kérdésre a választ:
Eddig 45 db 3 kg-os csomag készült.



Feladatok

1. Zsiga bácsi a kertjében lévő orgonabokrokról levágott virágokat hetesével összekötve árusította a piacon. Összesen 14 csokrot készített, de 5 szál kimaradt a csokrokból. Hány orgonát vágott le összesen?

2. Az előző feladattal kapcsolatban azt is tudjuk, hogy minden csokorban 5 lila, és 2 fehér orgona volt. Hány fehér orgonát vághatott le összesen?

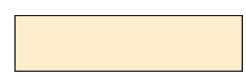
3. A bevásárlókosárba tömegre ugyanannyi barackot és almát tettünk. A kosár 56 dkg tömegű üresen. Mennyi barack, mennyi alma van a kosárban, ha a teli kosár 6 kg-os?

4. Tegnap elköltöttem a pénztárcámban lévő pénz felét, és még vettem egy meggyes rétest 200 Ft-ért. Ma pontosan a maradék pénzem felét költöttem. Most összesen 500 Ft van a pénztárcámban. Mennyi pénzem volt a tegnapi vásárlásaim előtt?

5. Az 5250 Ft-ot egyenlő számú 50 Ft-os és 100 Ft-os pénzérmékkel fizettük ki. Összesen hány darab érme kellett ehhez?

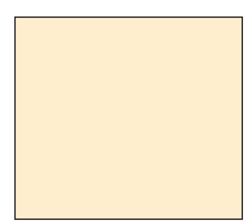
6. Botondnak van egy kis félretett pénze. Takarékoskodni kezd, így megkétszerezi ezt az összeget. Ekkor elkölt 400 Ft-ot. Összehúzza a nadrágszíjat, és ismét sikerül megkétszerezni az előző költés után maradt összeget. Ekkor elkölt belőle 1000 Ft-ot, és még marad 3000 Ft-ja. Mennyi pénze volt eredetileg?

7. Egy téglalap egyik oldala 11 cm-rel hosszabb, mint a másik. A kerülete 54 cm. Mekkora a területe?



a

8. Egy téglalap területe 72 cm^2. Tudjuk, hogy az egyik oldala 1 cm-rel rövidebb, mint a másik. Mekkora a téglalap kerülete?



a

9. Egy háromgyermekes családban az apa, az anya és a három gyermek életkorának összege 76 év. Mennyi lesz az éveik összege 2 év múlva?

10. Egy háromgyermekes családban az apa, az anya és a három gyermek éveinek összege 71. Két esztendővel ezelőtt a családtagok éveinek összege 62 volt. Hogyan lehetséges ez?

7. ÖSSZEFOGLALÁS

Az előző órákon tapasztaltak alapján összegezhetjük az egyenletek megoldási módszereit. Eddig próbálgatással, következtetéssel oldottuk meg az egyenleteket.

Példa

A −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4 számokat behelyettesítés után válogassuk két csoportra aszerint, hogy igazzá teszik-e az adott egyenletet, vagy sem! A vizsgált egyenletek:
$5 - 2 \cdot x = 3 \cdot x$; $x - (2 + x) + 4 = 2$; $8 \cdot x - 2 = 6 - 2 \cdot x$; $[4 \cdot (3 - x) + 2] - 1 = 17$.

Megoldás

A behelyettesítések után táblázatba rendeztük a megadott számokat.

	Igazzá teszi	Nem teszi igazzá
$5 - 2 \cdot x = 3 \cdot x$	1	−4, −3, −2, −1, 0, 2, 3, 4
$x - (2 + x) + 4 = 2$	−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4	nincs ilyen
$8 \cdot x - 2 = 6 - 2 \cdot x$	nincs ilyen	−4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4
$[4 \cdot (3 - x) + 2] - 1 = 17$	−1	−4, −3, −2, 0, 1, 2, 3, 4

Az előző példában az $A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ halmazt vettük az egyenletek alaphalmazának. Mivel az alaphalmaz minden elemét ellenőriztük, ezért mind a négy egyenlet igazsághalmazát is megkaptuk az adott alaphalmazon.
Tudjuk, hogy ha nem adják meg az alaphalmazt, akkor az eddig tanult számok halmazán kell gondolkodnunk. Egy szöveges feladatot érdemes alaposan elemezni, mert lehet, hogy információt tartalmaz az alaphalmazról, vagy következtethetünk rá.

Feladatok

1. Micimackó egy kanál mézet eszik minden olyan reggel, amikor a naptárban páratlan sorszámú napot lát, és két kanál mézet, ha páros sorszámút. Hány kanál mézet eszik
a) január 13-án; *b)* február 14-én; *c)* az év első hetében;
d) az év utolsó négy napjában; *e)* május 31-től június 6-ig?

2. Egy zsömle 15 Ft-ba kerül a pékségben. Mennyit fizetnénk, ha a vásárolt zsömlék száma
a) 3 darab; *b)* 5 darab; *c)* 6 darab; *d)* 10 darab?

3. Egy cipó akciós ára 99 Ft.
a) Rendezd táblázatba az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 darab cipó árát! Azt is tartalmazza a táblázat, hogy valójában mennyi pénzt kell érte adnunk. Gondolj a fizetésnél alkalmazott kerekítésre!
b) Minimum hány darabot vásároltunk, ha pontosan tudtunk fizetni érte?

4. Bence lakásának ajtajáig a bejárati kaputól összesen 60 lépcső vezet. Bence az egyik nap úgy érkezett haza, hogy minden lépcsőre rálépett, a következő napon csak minden másodikra, az azt követőn pedig minden harmadikra, aztán kezdte az egészet elölről.

a) Készíts egy táblázatot az első 12 napról, hogy mikor hány darab lépcsőre lépett rá!
b) Ha ezt a szokását tartja, akkor hány lépcsőre fog rálépni a 25. napon?
c) Hány lépcsőre fog rálépni az első három napon összesen?
d) Hány lépcsőre fog rálépni az első hat napon összesen?
e) Bence elképzelte, hogy mi lenne, ha tudna akkorákat lépni, hogy minden negyedik, ötödik, hatodik lépcsőre lépne. Hány lépcsőre lépne ezekben az esetekben?

5. Egy pénzkiadó automatában csupa azonos bankjegy van, de nem tudjuk, hogy milyen címletű. Szeretnénk 60 000 Ft-ot kivenni az automatából. Hány darab bankjegyet kaphatunk?

6. Az asztalon van néhány 100 Ft-os, és néhány 200 Ft-os érme, az értékük összesen 1200 Ft. Melyikből hány darab lehet?

7. A *Pontos lépés* nevű játék dobozában 19 darab egyforma hatszög alakú lapocska, továbbá piros, fehér és zöld bábuk találhatók, mindegyikből 4-4 darab.
a) Add meg a lapocskák és a bábuk számát 2, 3, 4, 5, 6 játék esetén!
b) Hány fehér bábu van 9 dobozban?
c) Hány hatszög van 11 dobozban?
d) Mennyivel több a hatszögek száma bábukéhoz képest 20 dobozban?

8. A *Pislog* nevű játékhoz egy megfelelő táblára és 30 darab egyforma méretű golyóra van szükség. Minden készletben van 8 darab bordó, 8 darab sötét zöld, 7 darab piros, és 7 darab halvány zöld golyó. Rendezd táblázatba, hogy 2, 3, 4, 5 játék dobozában hány darab
a) bordó színű golyó; *b)* zöld színű golyó; *c)* golyó van összesen?

9. Melyik szó kerülhet a három pont helyére? A választható szavak: piros, zöld, egy, két, alma. Ahol lehet, adj meg több lehetőséget is!
a) Megálltam, mert a közlekedési lámpán a … lámpa gyulladt ki.
b) Lehet egymást követő … hónap összesen 62 napos.
c) Ha almát mondunk, akkor leggyakrabban … színűnek gondolják az emberek, pedig van … alma is.
d) … fecske nem csinál nyarat! – tartja a mondás.
e) … … …. volt az uzsonnám.

10. Írd be a … helyére az összes lehetséges kétjegyű számot!
a) A számjegyek összege 17 a … számokban.
b) A … számokban a számjegyek összege 3.
c) A tízesek helyén 6-tal nagyobb számjegy szerepel a … számokban, mint az egyesek helyén.
d) A … számokban van 1-es számjegy.
e) Két egyforma számjegy szerepel a … számokban.
f) 4-re végződő számot kapsz, ha a … számoknak a kétszeresét veszed.

11. *a)* Melyik számból kell 14-et elvenned, hogy 60-at kapj?
b) Melyik számhoz kell 26-ot hozzáadni, hogy 80-at kapj?
c) Melyik számot kell megszoroznod 3-mal, hogy 96-ot kapj?
d) Melyik számot kell elosztanod 5-tel, hogy 16-ot kapj?

12. Melyik szám
a) kétszeresét kell 3-mal növelned, hogy 25-öt kapj?
b) felét kell 2-vel csökkentened, hogy 13 legyen az eredmény?

13. A következő kérdéseket írd át egyenlet alakúra, aztán add meg a megoldást!
a) Mennyiből kell –12-t elvenni, hogy a különbség 8 legyen?
b) Mennyihez kell 23-at adni, hogy az összeg –1 legyen?
c) Melyik számot kell 3-mal megszorozni, hogy a szorzat egy híján 1000 legyen?
d) Melyik számot kell 7-tel megszorozni, hogy a szorzat eggyel több legyen 55-nél?

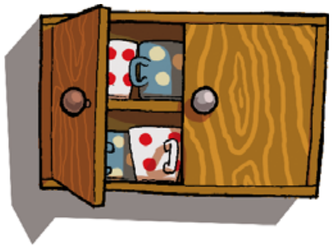
14. Mennyi az x, ha
a) $x - 27 = 140$; *b)* $x + 72 = 144$; *c)* $5 \cdot x = 555$;
d) $x : 7 = 12$; *e)* $x - 107 = 100$; *f)* $x + 81 = 102$;
g) $8 \cdot x = 1000$; *h)* $x : 5 = 41$; *i)* $(2 \cdot x + 4) \cdot 5 = 50$;
j) $(3 \cdot x + 7) \cdot 5 = 110$; *k)* $(4 \cdot x - 4) \cdot 6 = 120$; *l)* $(5 \cdot x - 10) \cdot 8 = 160$;
m) $(6 \cdot x + 3) : 5 = 9$; *n)* $(9 \cdot x + 7) : 7 = 10$; *o)* $(11 \cdot x - 2) : 4 = 5$;
p) $(7 \cdot x - 8) : 8 = 6$.

15. Add meg a következő egyenletek megoldását!
a) $3 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (x + 3) = 6$; *b)* $5 \cdot (x + 4) - 3 \cdot (x + 3) = 23$;
c) $5 \cdot (x - 7) = 9 \cdot (x - 11)$; *d)* $7 \cdot (x + 4) = 6 \cdot (x + 5)$.

16. Néhány hétpöttyös katicabogár berepült az ablakon. A pöttyeik száma 14-gyel több, mint a lábaik száma. Hány katica röpült be az ablakon?

17. Panka 27 plüssállatából néhányat az ágyán helyezett el, néhányat pedig egy polcra rakott. A polcon 5-tel több állat van, mint az ágyon. Hány darab plüssállat van Panka ágyán?

18. Nagymama összesen 60 darab derelyét készített, amelyek között volt szilvalekváros és volt túrós is. A túrósok száma 12-vel kevesebb, mint a lekvárosoké.
a) Hány darab lekváros derelye készült?
b) Hány unokája lehet a nagymamának, ha mind a kétféle derelyét igazságosan el tudja osztani közöttük?

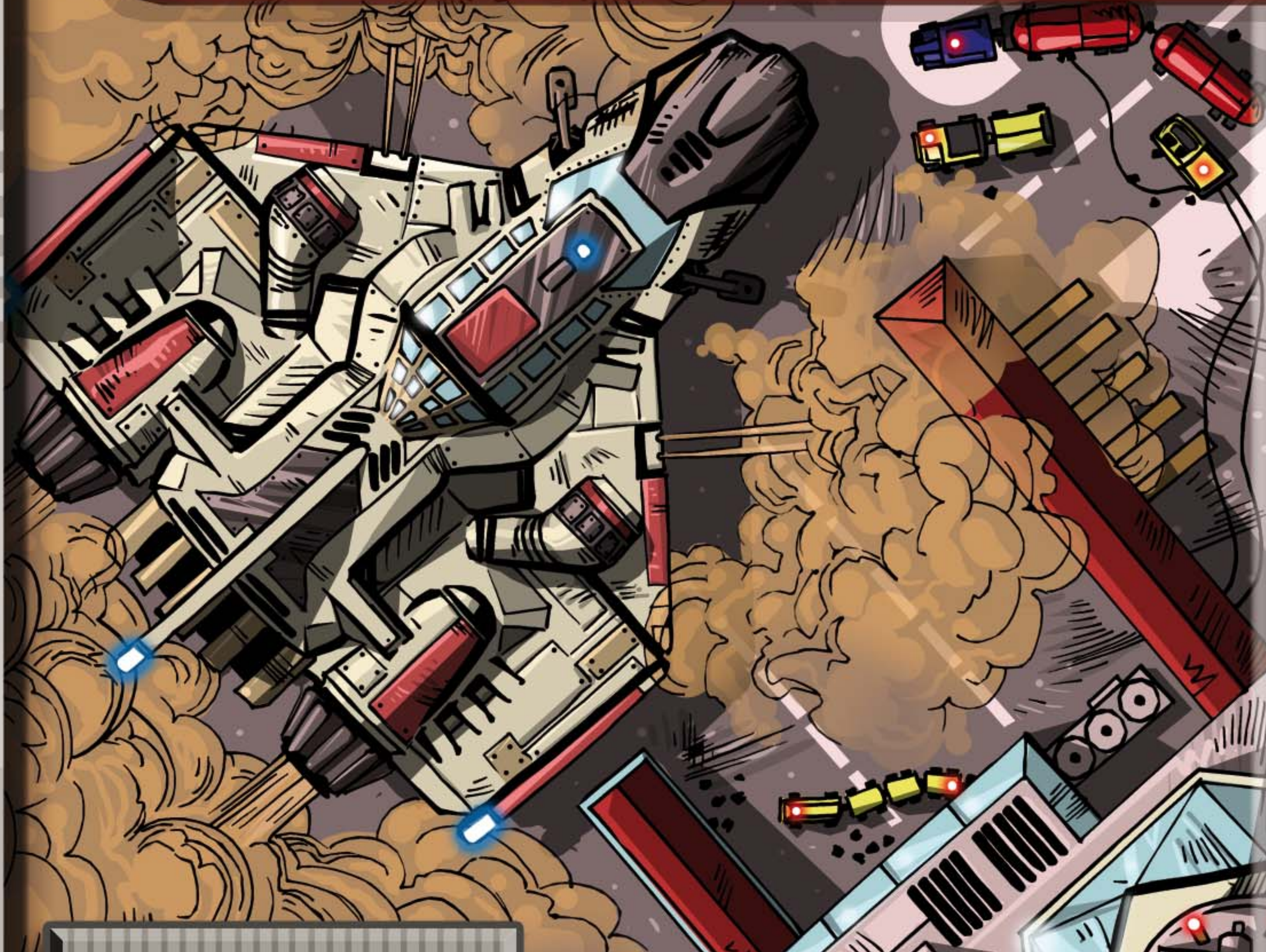


19. A szekrényben kétféle pöttyös bögrét találhatsz. A hétpöttyösből 3-mal több van, mint a négypöttyösből. Hány bögre van összesen a szekrényben, ha a pöttyök száma 76.

20. Egy könyv oldallapjainak számozása az ötödik oldalon az 5-tel kezdődik. Összesen 716 számjegyet használtak az oldalak számozásához. Melyik szám szerepel a könyv utolsó oldalán?

21. A bútorraktárban háromszor annyi négylábú szék van, mint háromlábú.
a) Hány darab a háromlábú, ha összesen 224 szék található a raktárban?
b) Hány darab a háromlábú, ha a székeknek összesen 600 lába van?

VII. Adatgyűjtés, statisztika



Leszálláshoz készülődtek. Az osztály kialvatlanul és izgatottan toporgott az ablakoknál. Együtt hallgatták a wikikomp tájékoztatóját.

– Kedves utasok! Hamarosan megérkezünk a célhoz. Kérem, foglalják el ülőhelyeiket a landolás idejére! Pozicionálom a leszállást segítő egységeket, hogy minél zavartalanabb legyen útjuk utolsó szakasza. Köszönöm, hogy társaságunkat választották az utazáshoz, remélem, máskor is találkozunk még.

Ekkor szólalt meg Okoska.

– Ne aggódjatok, azt olvastam a tájékoztató füzetben, hogy tavaly körülbelül 1 000 000 landolás volt a Liszt Ferenc 4-es terminálon, és 999 998 teljesen sikeres volt!

– Mi történt a másik kettővel? – kérdezte Zsombi aggódva.

– Arról nem írtak semmit, de ez csak 2 : 1 000 000-hoz, azaz 1 : 500 000-hez az esély arra, hogy valami apró probléma lesz.

– Mi lesz, ha nem sikerül a pozicionálás? – aggódott tovább a másik.

– Akkor szinte bárhol földet érhetünk, ami nem lenne túl kellemes. A Föld felszíne nagyjából 510 millió km^2, és ebből 360 millió km^2-t borít víz. Ez azt jelenti, hogy ... $\frac{360}{510} \approx 0{,}7$ az esély arra, hogy a leszállás után a tengerben kötünk ki.

Miközben Attila szóval tartotta osztálytársait, mindegyikük bekötötte magát, és baj nélkül landoltak. Gondolatban már a hatodikos kirándulást tervezték.

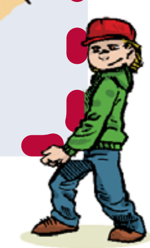
Játék

Ismeritek az akasztófajátékot? Két játékos játszhatja. Egyikőtök leírja egy híres ember nevét, egy közmondást, egy szót vagy amiben megállapodtok, és rajzol egy akasztófát. Aztán lerajzol annyi betűhelyet (kis vonalat), ahány betűből áll a megfejtendő szöveg. Betűnként találgathatsz. Ha olyan betűt mondasz, ami benne van a szövegben, akkor a társad beírja ezt a megfelelő helyre, és újra mondhatsz egy betűt. Ha olyan betűt mondasz, ami nincs a szövegben, akkor egy vonalat rajzol a kitaláló az akasztófás rajzra, vagyis elkezdi megrajzolni az akasztott embert. (Ezt a betűt nem érdemes újra mondani, ezért jól jön, ha felírod.) Ha előbb találod ki a teljes szöveget, mint ahogy minden vonalat megrajzolna a társad az akasztott emberből, akkor te nyertél. Ha előbb sikerült megrajzolnia a figurát, akkor ő nyert. Lássunk egy példát:

__ _____ _E_ _______ _E_

Játsszatok három-négy fordulót, felváltva!

a) Melyik betűvel kezdted a találgatást? Miért?
b) A hosszabb vagy a rövidebb feladatokat volt könnyebb kitalálni? Miért?



Játék

Álljatok össze négyesével! Egyikőtök két érmével fog dobni, a három játékos pedig a táblán lépked a bábujával. Ők választanak maguknak egy-egy bábut (radírdarab, papírcetli, érme, kabala …), amiket a tábla START mezejére tesznek.

Kezdődhet a játék! Akinél a két érme van, dobja fel, és

- ha két fej jön ki, akkor az 1. játékos léphet egyet;
- ha egy fej és egy írás, akkor a 2. játékos léphet egyet;
- ha két írás, akkor a 3. játékos léphet egyet.

Játsszatok egy-két kört, és beszéljétek meg az eredményeket! Melyik játékos szeretnél lenni a következő körben?

ADATGYŰJTÉS, AZ ADATOK ÁBRÁZOLÁSA 2.

Már az ősember is gyűjtött adatokat.

Mi is szoktuk az eseteket, dolgokat az ősember módszeréhez hasonlóan számlálni. Ezt őrzi a nyelvünk is. Mondták már neked, hogy elég sok van a rovásodon?

Ahhoz, hogy könnyebben számolhassunk, csoportosítani szoktuk a jeleket. Amikor négy rovás után jön egy újabb, akkor az ötödik vonással áthúzzuk az előző négyet.

Ha többféle adatot gyűjtünk, gyakran használunk táblázatot. Ez egyszerűbbé teszi az adatok összesítését, kényelmesebbé az eligazodást az adatok között.

A statisztika szó eredete a régmúlt időkbe nyúlik vissza. A *status* szó jelentése állam, állapot, foglalkozás. Már az ókorban is feladat volt az adatok gyűjtése. Volt, hogy az uralkodó összeíratta az újszülötteket, volt hogy megszámlálták népüket.

Mit gondolsz, miért gyűjtötték adatokat az ókori uralkodók a népről?

Mihez kellettek ezek az adatok?

Keresd ki egy olasz szótárból vagy az interneten, hogy mit jelent ma a *statista* szó Olaszországban!

Mit jelent a *statiszta* szó Magyarországon?

1. példa

Az ötödikesek fociedzője, Ede bácsi cipőt akart rendelni a csapatnak. Összeírta, kinek hányas lába van:

Marci 38, Milán 38, Matyi 36, Zalán 41, Géza 37, Máté 37, Miklós 39, Zsiga 38, Dani 38, Dávid 38, Milán 39, Zalán 41.

Egy picit jobban áttekinthető adatsort kapott, amikor nagyság szerint rendezte az adatokat:

Matyi 36, Géza 37, Máté 37, Zsiga 38, Marci 38, Milán 38, Dani 38, Dávid 38, Milán 39, Miklós 39, Zalán 41, Zalán 41.

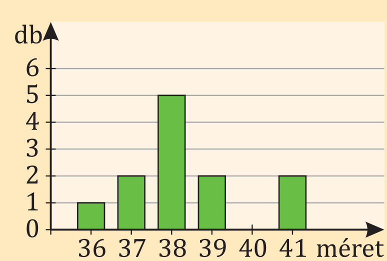
Még jobban átlátta a feladatot, amikor csak a számokat írta le:

36, 37, 37, 38, 38, 38, 38, 38, 39, 39, 41, 41.

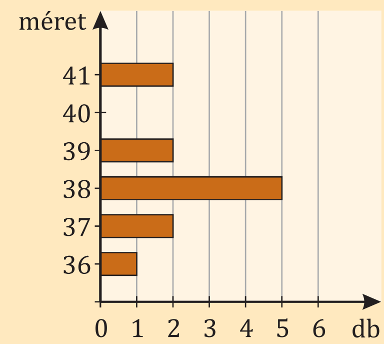
Ede Bácsi még így is nehezen igazodott el, ezért táblázatba foglalta az eredményeket:

cipőméret	36	37	38	39	40	41
db	1	2	5	2	–	2

A táblázatba foglalt adatokat gyakran grafikonon is ábrázoljuk. A vízszintes tengelyen a cipőméreteket, a függőleges tengelyen pedig a cipők számát jelöljük. Például 36-os cipőből csak egy kell, úgyhogy a 36-hoz 1 egység magas oszlopot rajzolunk, 37-es cipőből kettő kell, tehát ide 2 egység magas oszlop kerül, és így tovább.



Lehetne fordítva is. Ábrázoljuk a vízszintes tengelyen a darabszámokat és a függőleges tengelyen a cipők méreteit.
Gyerek focicipők 40-es méretig léteznek, és azoknak 7990 Ft darabja, a felnőtt focicipők 9990 Ft-ba kerülnek. A megrendelt cipők hányad része gyerekméret? Mennyi pénzt kell átutalnia Ede bácsinak a megrendeléskor, ha előre ki kell fizetnie a teljes összeg felét?



Megoldás

10 cipő a 12 közül gyerekméret, ez $\frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.
10 gyerek méretű cipő kell, ez összesen $10 \cdot 7990 = 79\,900$ (Ft)
2 felnőtt méretű cipő kell, ez összesen $2 \cdot 9990 = 19\,980$ (Ft)
Összesen: $(79\,900 + 19\,980) = 99\,880$ (Ft)
Tehát $99\,880 : 2 = 49\,940$ Ft-ot kell Ede bácsinak előlegként átutalnia.

2. példa

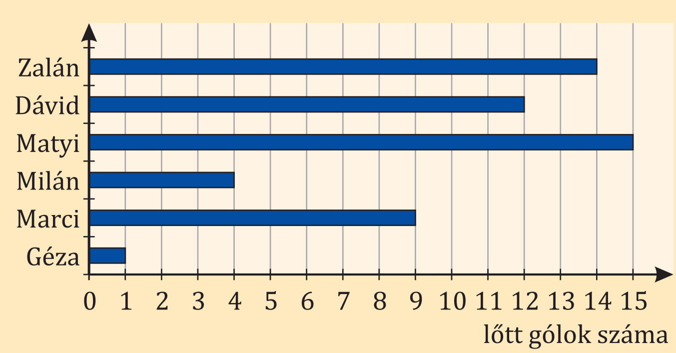
Az iskola 5. b osztályos csapata a megyei bajnokság során 12 meccset játszott. Az egyes mérkőzéseken a góllövők a következők voltak:

1. mérkőzés: Zalán, Zalán, Dávid, Matyi, Milán, Zalán
2. mérkőzés: Zalán, Dávid, Dávid, Matyi, Milán, Dávid
3. mérkőzés: Dávid, Matyi, Matyi, Matyi, Marci
4. mérkőzés: Zalán, Dávid, Matyi, Matyi
5. mérkőzés: Matyi, Marci, Dávid, Zalán, Zalán
6. mérkőzés: Zalán, Marci, Matyi, Dávid, Zalán, Milán, Géza
7. mérkőzés: Matyi, Marci, Zalán, Dávid
8. mérkőzés: Matyi, Zalán, Dávid
9. mérkőzés: Zalán, Marci, Matyi
10. mérkőzés: Matyi, Marci
11. mérkőzés: Marci, Marci, Matyi, Dávid
12. mérkőzés: Dávid, Matyi, Milán, Zalán, Zalán, Marci

Ki lett a csapat gólkirálya? Készítsétek el a csapat góllövő rangsorát!
Hányat rúgtak összesen a fiúk?

Megoldás

Zalán	卌 卌 ||||	Milán	||||
Dávid	卌 卌 ||	Marci	卌 ||||
Matyi	卌 卌 卌	Géza	|



Készítsünk táblázatot az adatokból, de jól mutatja a lőtt gólok számát egy színes oszlopdiagram is. Van, aki játszva eligazodik a számok között, és van, aki a diagram adatait olvassa le könnyebben. Akár a grafikon, akár a táblázat alapján minden kérdésre könnyen megkapjuk a választ.

	Mérkőzések												Összes
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
Zalán	3	1	–	1	2	2	1	1	1	–	–	2	14
Dávid	1	3	1	1	1	1	1	1	–	–	1	1	12
Matyi	1	1	3	2	1	1	1	1	1	1	1	1	15
Milán	1	1	–	–	–	1	–	–	–	–	–	1	4
Marci	–	–	1	–	1	1	1	–	1	1	2	1	9
Géza	–	–	–	–	–	1	–	–	–	–	–	–	1
	6	6	5	4	5	7	4	3	3	2	4	6	55

Matyi lett a gólkirály 15 góllal.
A góllövő rangsor: Matyi (15), Zalán (14), Dávid (12), Marci (9), Milán (4), Géza (1).
Meccsenként összeszámolva: 6 + 6 + 5 + 4 + 5 + 7 + 4 + 3 + 3 + 2 + 4 + 6 = 55 gólt rúgtak összesen.
Góllövőnként számolva: 15 + 14 + 12 + 9 + 4 + 1 = 55, azaz összesen 55 gólt lőttek.

Kutatómunka

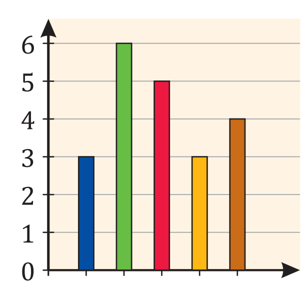
Hányan járnak az iskolátok egyes osztályaiba? Nézzetek utána! Gyűjtsétek össze az adatokat! Hol keresnétek ezeket?

Feladatok

1. Gyűjtsétek össze, hogy ebben a tanévben ki hány könyvet olvasott! Készítsetek táblázatot az adatokból! Válaszd ki öt barátodat, és ábrázold oszlopdiagramon a táblázatbeli értékeket!

2. Gyűjtsétek össze, hogy kinek hány édestestvére van! Készítsetek táblázatot az adatokból! Rajzoljatok oszlopdiagramot is az adatok alapján!

3. Egy állatkert néhány lakójának egyedszámát mutatja a diagram. Állapítsd meg, hogy melyik oszlop melyik állathoz tartozik, hány van belőlük az állatkertben!
Fele annyi víziló van, mint zebra.
Több a csimpánz, mint az orángután.
Ugyanannyi elefánt van, mint víziló.



4. Összesen 30 gyerek jár az osztályba. $\frac{2}{5}$ részük fiú. A lányok harmada barna hajú, 2 fekete, a többi szőke. A fiúk negyede szőke, fele barna, 1 vörös, a többi fekete.
Készíts a füzetedbe oszlopdiagramot, amin ábrázolod, hogy az osztály tanulói között hány szőke, barna, fekete, vörös gyerek van!

5. Mérjétek le, hogy kinek hány cm hosszú a haja! Rendezzétek az adatokat táblázatba! Készítsetek grafikont az adatok alapján!

3. ÁTLAG ÉS TULAJDONSÁGAI

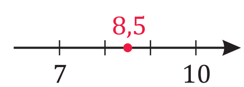
– Milyen volt a film? Nagyon jó?
– Á, csak átlagos.
– Nagyon sokan mentek el az előadásra?
– Nem, csak átlagos volt a nézőszám.
– A nagyon alacsony fickó volt a gonosz?
– Nem! Átlagos magasságú volt.

Ilyen és ehhez hasonló mondatokkal gyakran találkozhatsz. Nyelvünk hűen tükrözi az *átlagos* szó jelentését: olyan érték, amely középen helyezkedik el a nagyon kicsi és a nagyon nagy érték között.
Matematikaórán ennél pontosabban szoktuk megadni az értékeket. Most is így teszünk.

Két szám átlagán, más néven számtani közepén a **két szám összegének a felét** értjük.
Ez éppen az a szám, amely a **két szám között középen** helyezkedik el a számegyenesen, azaz a két számtól egyforma távolságra van.

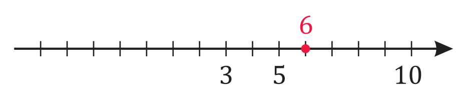
3 és 5 átlaga: $\frac{3+5}{2}=4$.

7 és 10 átlaga: $\frac{7+10}{2}=8{,}5$.

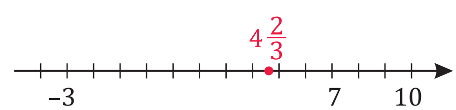


Három szám átlagát is kiszámíthatjuk, ilyenkor hárommal osztjuk a számok összegét.

3, 5 és 10 átlaga: $\frac{3+5+10}{3}=\frac{18}{3}=6$.



10, 7 és –3 átlaga: $\frac{10+7+(-3)}{3}=\frac{14}{3}=4\frac{2}{3}$.



Teljesen hasonlóan lehet 4, 5, 6, ... darab szám átlagát is kiszámolni.
A számok összegét annyival osztjuk el, ahány számot összeadtunk.
A számtani átlagot szoktuk $\overline{x}$-gal (ejtsd: *x* átlag) vagy *A*-val jelölni.

1. példa

Kengyel tanár úr a következő osztályzatokat írta be Ladó Gyula Lajosnak az év során: 5, 4, 4, 5, 3, 5, 5, 4. Mennyi volt az átlaga és hányast kapott év végén Tutajos (Ladó Gyula Lajos) matekból?

Megoldás

A számok átlaga: $\frac{5+4+4+5+3+5+5+4}{8}=\frac{35}{8}=4\frac{3}{8}=4{,}375$.

Tutajos mégis 5-öst kapott, mert Kengyel tanár úrnak vajszíve volt!

2. példa

Anya és apa elhatározta, hogy együtt kezdenek sportolni. Azzal kezdték, hogy összeállították az első heti edzéstervüket. Keddre, csütörtökre és vasárnapra pihenőnapot terveztek. Amit vállaltak, azt az első héten be is tartották.

	Hétfő	Kedd	Szerda	Csütörtök	Péntek	Szombat	Vasárnap
Bemelegítés (perc)	5	–	7	–	5	5	–
Biciklizés (perc)	20	–	30	–	45	45	–
Levezetés (perc)	5	–	3	–	5	5	–

a) Hány perc mozgást tervezett apa és anya összesen a hétre?
b) Átlagosan hány perc mozgást terveztek a négy napra?
c) Átlagosan hány percet kerékpároztak a négy nap alatt?
d) Hány percet kellett volna kerékpározniuk szombaton, hogy a négynapi átlaguk 40 perc legyen?

Megoldás

a) Fejenként 30 + 40 + 55 + 55 = 180 perc mozgást terveztek.

b) Az átlag a négy érték összegének a negyede, azaz napi $\frac{30+40+55+55}{4}=\frac{180}{4}=45$ perc mozgást terveztek átlagosan a négy napra.

c) Átlagosan $\frac{20+30+45+45}{4}=\frac{140}{4}=35$ percet bicikliztek a négy nap alatt.

d) Ha a négynapi átlag 40 perc, akkor összesen $4 \cdot 40 = 160$ percet kellett volna biciklizniük. Mivel az első 3 nap alatt 20 + 30 + 45 = 95 percet bicikliztek, szombaton 160 – 95 = 65 percig kellett volna biciklizniük, hogy az átlaguk napi 40 perc legyen.

Feladatok

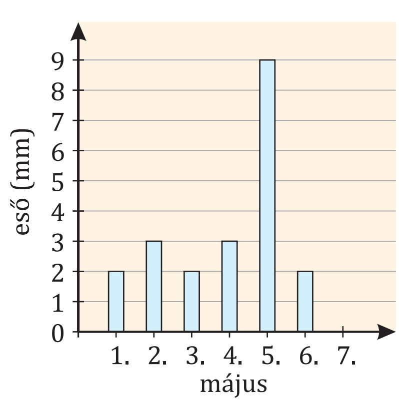
1. Add meg a következő számok átlagát
a) 2; 8; *b)* 1; 9; *c)* –1; 11; *d)* –12; 22; *e)* 2,5; 9,5!

2. Két szám átlaga 5. Mennyi lehet az egyik szám, ha a másik
a) 2; *b)* 9; *c)* 7; *d)* –8; *e)* 1,3?

3. Adj meg 2 egész számot, ha átlaguk
a) 10; *b)* 7; *c)* 4,5; *d)* –2; *e)* $\frac{4}{3}$!

4. Adj meg 3 egész számot, ha átlaguk
a) 10; *b)* 7; *c)* 4,5; *d)* –2; *e)* $\frac{4}{3}$!

5. A májusi eső aranyat ér.
a) Mely napon (napokon) esett a legkevesebb eső az első 7 nap alatt?
b) Hány mm eső esett május első hetében összesen?
c) Ha összesen ugyanannyi (mint a grafikonon látható), de minden nap egyforma mennyiségű eső esett volna, akkor naponta mennyi eső esett volna május első hetében?



6. Át lehet-e sétálni egy folyón, ha annak átlagos mélysége 70 cm?

4. LEHETETLEN, LEHETSÉGES, BIZTOS

Ez lehetséges, de nem biztos.

Holnap sütni fog a Nap.
Ötöst kapok matekból.
Anya két puszit ad reggel.
Egyest dobok a kockával.

Ez biztos

Holnap felkel a Nap.
Hetesnél kisebbet dobok a kockával.
Idősebb vagyok, mint tegnap voltam.
Ittam már vizet.

Ez lehetetlen

Hatost kapok matekból.
Varázsütésre megáll a Föld.
Az 5. b osztály matekórája holnap a Himalája csúcsán lesz.

Példa

Hova sorolnátok a következő eseményeket?

a) Feldobok egy kockát, és hatos lesz.
b) Feldobok 10 kockát, és mindegyiken hatos lesz.
c) „Wingardium leviosa”, és lebegni kezdek.
d) Ha feldobok egy érmét, leesik.

Megoldás

a) Lehetséges *b)* Lehetséges
c) Lehetetlen *d)* Biztos*

(*Eltekintünk attól az eseménytől, hogy egy sirály a csőrébe kapja, és elrepül vele.)

CSOPORTMUNKA

Dolgozzatok 3 fős csoportokban!

Gyűjtsetek minél több lehetséges, biztos és lehetetlen állítást!

Az a csoport nyer, amelyik a fenti példákon kívül a legtöbb helyes állítást gyűjti.

Nagyon sok szerencsével és véletlennel összefüggő játék létezik.

Gyűjtsetek ilyeneket!

Feladatok

1. Sajnos Olga néni kicsit megégette az almás pite alját a tepsi szélénél, de ez nem látszik. A tányéron evésre vár 12 szelet almás pite, amelyek közül 3 égett aljú.

a) A tányéron lévő piték hányad része égett?
b) Hányat kell elvenni a tányérról, hogy biztosan legyen köztük jó?
c) Hányat kell elvenni a tányérról, hogy biztosan legyen köztük jó és égett is?
d) Jó vagy égett pitére van nagyobb esély, ha csak egyet vehetek el?

2. Az 5. b-be 8 szőke, 12 barna és 5 fekete hajú gyerek jár.

a) Legfeljebb hány gyereket választhatok ki, hogy ne legyen köztük szőke?
b) Hány gyereket kell kiválasztani a hétvégi sportversenyre, hogy biztos legyen köztük szőke?
c) Hány gyereket kell kiválasztani a hétvégi sportversenyre, hogy biztos legyen köztük barna?
d) Ha csak egy gyereket választunk, akkor az legnagyobb eséllyel milyen hajszínű lesz?
e) Hány gyereket kell kiválasztani, hogy biztos köztük legyen a fekete hajú, ábrándos tekintetű Panni?

Gyűjtsétek össze, hogy az osztályotokba hány szőke, barna, fekete, vörös hajú gyerek jár, és válaszoljátok meg az első négy kérdést a ti adataitok alapján is!

Feladatok

1. Készítettünk egy egyszerű titkosírást. Minden betűt az ötödik rákövetkezővel helyettesítettünk az alábbi betűsorban:

AÁBCDEÉFGHIÍJKLMNOÓÖŐPQRSTUÚÜŰVWXYZ

Amikor a végére értünk, akkor újra az elején folytattuk. Például A helyett E-t írtunk, M helyett Ő-t, V helyett A-t. A PUSZI szó kódolva: UWŰDM. Pontot, vesszőt, egyéb írásjelet nem használtunk. Kódoltunk egy szövegrészt, és a következő eredményt kaptuk:

ŰDIÜIÖIŐVYDIÍKJMEVEÖŰDMAÍFIP

Vajon mi lehetett az eredeti szöveg?
Küldj pár szavas üzenetet padtársadnak titkosítva!

2. A gyerekek sorsolással akarják eldönteni, hogy melyik két tanuló marad bent az iskolában rendet rakni.

Matyi: Mindenki dobjon egyet a kockával! Akik a legkisebbet dobták, újra dobnak, amíg ketten maradnak.
Panni: Dobjunk célba! Aki eltalálja a célt, az nem dob tovább. A két utolsónak maradó fog rendet rakni.
Gazsi: Készítsünk annyi cetlit, ahányan vagyunk, de kettőre rajzoljunk fekete foltot! Összehajtogatjuk, és mindenki húz egy cetlit. Akik a fekete foltot húzzák, bent maradnak rendet rakni.

Melyikük javaslata ad egyenlő esélyt a gyerekeknek?

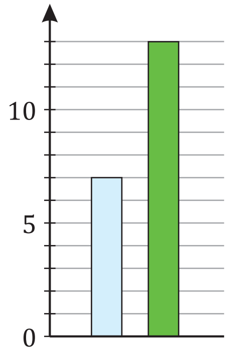
3. A kisbabákról adatokat szoktak felvenni, mint például a testtömeg, testhossz és a fejkörfogat (a fej kerülete). A védőnő hat egyhónapos babáról gyűjtött adatokat, amelyeket táblázatba rendezett:

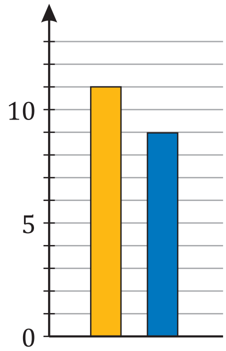
	Anna	Ráhel	Gyöngyvér	Kolos	Etele	Sándor
testtömeg (g)	3100	4400	4200	4400	3600	4800
testhossz (cm)	48	57	57	58	54	58
fejkörfogat (cm)	34	39	37	38	36	38

a) Számold ki az átlagos tömeget, hosszt és fejkörfogatot!
b) Melyik baba testi fejlődése a legátlagosabb ezen adatok alapján?

4. Ha kinyitod a matematikakönyvedet, akkor mi az esélye, hogy az oldalszám a jobb oldalon páratlan szám lesz? Próbáld ki!
Mi az esélye, hogy 3 többszöröse lesz? Próbálgasd!

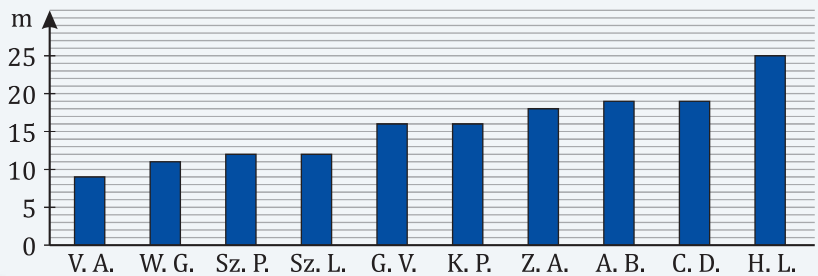
5. Össze tudod párosítani a grafikonokat az adatokkal?
A) Feldobtunk egy érmét hússzor, és lejegyeztük hány fej és hány írás volt.
B) Az osztályban az első 20 gyerek között ilyen a lányok és a fiúk megoszlása.





Tesztfeladatok

1. Az 5. b-ben 10 lány kislabda-hajítását mérik.

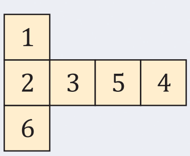


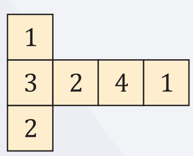
Aki 18 méter fölött dobott, az 5-öst kapott. Hányan kaptak ötöst?

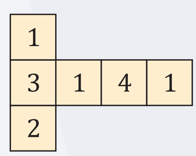
A: 6; B: 5; C: 4; D: 3.

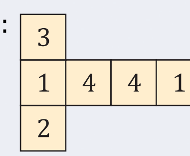
2. A kiterített négy kocka egyikével 120-szor dobtak a gyerekek Kengyel tanárnő matekóráján. A dobott számok darabszámát a táblázat tartalmazza. Szerinted melyik kockát használhatták a legnagyobb eséllyel?

dobott szám	1	2	3	4
darab	63	16	15	26

A:


B:


C:


D:


3. Bütyök félévi jegyeihez képest év végére 2 tárgyból egy-egy jegyet javított, testnevelésből viszont két jegyet rontott. A többi jegye nem változott. Mennyivel változott év végére az átlaga a félévi átlagához képest?

A: Romlott; B: Nem változott; C: Nőtt; D: Ezekből az információkból nem lehet megállapítani.

4. Melyik nem lehet négy egész szám átlaga?

A: 5,5; B: –2; C: 3,25; D: 5,2.

5. Gyűjtsétek össze az osztályban a tippeket az oldalon látható 4 tesztkérdésre! Készítsetek az adatokból táblázatot és oszlopdiagramot is!

Mit tanultunk?

Kezdetben átismételtük
a pozitív egész számokkal végzett műveleteket. 1.

A természetes számokon túl megtanultunk összeadni,
kivonni, szorozni és osztani az egész számokkal is. 2.

Sőt! Megismerkedtünk a racionális számokkal,
és azokkal is tudunk már összeadni, szorozni. 3.

Használtunk különböző mértékegységeket,
amelyeket az előtagok segítségével
sokkal könnyebben áttekintettünk, mint korábban. 4.

Áttekintettük a sík és a tér elemeit:
pont, egyenes, szög, … . 5.

Megtanultuk a kerület, a terület és a térfogat mérését és
kiszámítását néhány speciális esetben. 6.

Szerkesztettünk egyszerű alakzatokat. 7.

Megismerkedtünk a koordináta-rendszerrel,
a sorozatokkal és a grafikonokkal. 8.

Többféleképpen is oldottunk meg egyenleteket. 9.

Sokat játszottunk, miközben adatokat gyűjtöttünk,
és átlagokat számoltunk. 10.

Találkozunk a következő évben!

R. sz.: FI-503010501/1
ISBN 978-963-682-968-1

„A matematika annyira komoly szakterület,
hogy egyetlen alkalmat sem szabad elmulasztanunk arra,
hogy szórakoztatóbbá tegyük."

Blaise Pascal